# Poznámky z matematiky

Petr Hasil, Mendelova univerzita v Brně, 2014

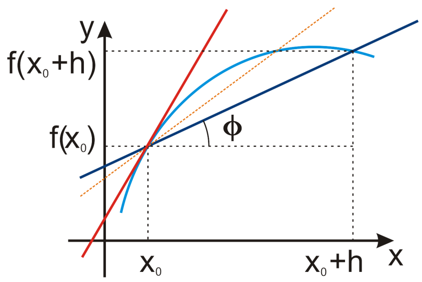
*(Aktualizace: 14. ledna 2023)*

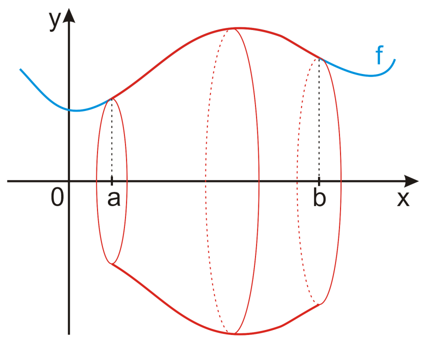
Mendelova univerzita v Brně

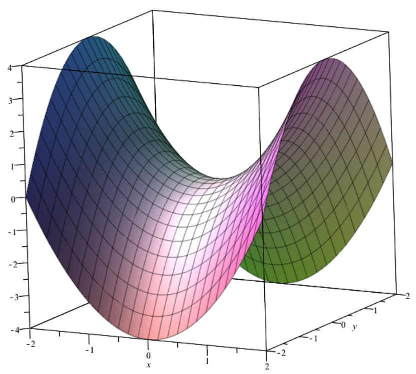
MENDELU Lesnická a dřevařská fakulta

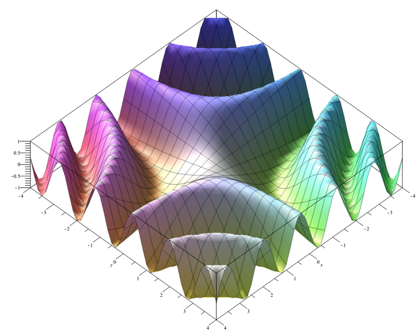
Petr Hasil
hasil@mendelu.cz
http://user.mendelu.cz/hasil/

Ústav matematiky
Lesnická a dřevařská fakulta
Mendelova univerzita v Brně





Tento text je primárně určen pro posluchače základních kurzů matematiky na Agronomické fakultě Mendelovy univerzity v Brně, nicméně je použitelný jako doplňující text pro každý kurz základů matematiky. Jsou zde zahrnuty základy lineární algebry, diferenciálního počtu a integrálního počtu včetně řešených příkladů i příkladů k procvičení.

Cílem tohoto kurzu je především to, aby posluchači získali povědomí o základních nástrojích v matematice, byli schopni dále prohlubovat své znalosti ve směru daném jejich specializací a tyto bezchybně používat, neboť ke správné volbě metody, rozplánování experimentu, nebo například vyhodnocení výstupu je nutná nejen povrchní znalost typu 'vstup/výstup', ale také logika a důkladné porozumění vnitřním principům metod.

Na konci každé kapitoly je uvedena ukázka zadání příkladů typických pro danou kapitolu ve formě vhodné pro Wolfram|Alpha, což je odpovídací stroj volně dostupný na adrese

`http://www.wolframalpha.com/`

Výhodou Wolfram|Alpha oproti programům určeným k řešení matematických úloh je jeho dostupnost v síti bez instalace a také jeho univerzálnost. Otázka nemusí být zadaná přesně daným způsobem a často dokonce ani úplně jednoznačně — stroj najde nejpravděpodobnější interpretaci otázky a zobrazí výsledek, případně sám upozorní na možné jiné interpretace. Toto nefunguje jen pro matematické výpočty, ale pro otázky všeho druhu. Je tedy možné zeptat se nejen na výsledek početního příkladu, ale také na definici neznámého pojmu, nebo třeba na počasí v Amsterdamu. Při používání doporučuji vždy kontrolovat, jaká interpretace otázky byla použita. Například zadáním 'weather Amsterdam' získáte předpověď počasí pro Amsterdam v Nizozemí a ostatní Amsterdamy jsou zobrazeny jako další možné interpretace. Také proto je vhodné si Wolfram|Alpha před řešením matematických úloh uvedených v textu vyzkoušet zadáváním jiných dotazů (od 'How are you?' po '5%=123, 72%=?') a sledováním odpovědí. V odpovědích je většinou obsaženo mnohem více informací, než bylo požadováno. Např. v odpovědi na otázka ohledně vlastních čísel matice (viz str. 40) jsou obsaženy i příslušné vlastní vektory. Doporučuji vyzkoušet Wolfram|Alpha na řešení všech příkladů uvedených v textu. Tím získáte představu jak vypadá odpověď např. když řešení neexistuje, nebo při nevhodné formě zadání. Za povšimnutí stojí také možnosti typu 'More digits', nebo 'Show steps', které jsou u některých odpovědí k dispozici. Zvláště zobrazení kroků při řešení příkladů může být velmi užitečné (zde ale pozor — způsob výpočtu, který si vybere stroj, je většinou ten, který lze nejsnadněji algoritmizovat, což nemusí být nejlepší způsob jak příklad počítat ručně).

Na závěr si uveďme několik ukázek jak zadávat početní operace:

- Početní operace.

```
12 + 5 * 3 - 2^3

2 * (1 - 3 / (5 + 1))
```

- Další početní operace (hvězdička jako násobení může být vynechána, nedojde-li k nedorozumění).

```
5*8^(1/3)

5 (8)^(1/3)
```

- Procenta.

```
20% = 120, 50% = ?
```

- Poměr.

```
52:32
```

# Obsah

Kapitola

# 1 Úvod

## § 1.1 Symboly

| | |
|---|---|
| $A \wedge B$ | $A$ a současně $B$ (současná platnost, konjunkce) |
| $A \vee B$ | $A$ nebo $B$ (disjunkce) |
| $A \Rightarrow B$ | $A$ z toho plyne $B$; platí-li $A$, potom platí $B$ (implikace) |
| $A \Leftrightarrow B$ | $A$ právě tehdy když $B$; (ekvivalence, $A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$) |
| $\forall$ | pro všechna (obecný kvantifikátor) |
| $\exists$ | existuje (existenční kvantifikátor) |
| $\exists!$ | existuje právě jeden |
| $\nexists$ | neexistuje |
| $\in$ | je prvkem |
| $\notin$ | není prvkem |
| $A = \{a, b, c\}$ | množina $A$ s prvky $a, b, c$ |
| $\emptyset$ | prázdná množina |
| $\{x \in M : V(x)\}$ | množina takových $x$ z množiny $M$, které splňují vlastnost $V(x)$ |
| $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ | uspořádaná $n$-tice |
| $A \times B$ | kartézský součin množin $A$ a $B$; $A \times B = \{[a, b] : a \in A, b \in B\}$ |
| $A^n$ | $n$-tá kartézská mocnina množiny $A$; $A^n = A \times A \times \cdots \times A$ |
| $A \subseteq B$ | množina A je podmnožinou množiny B; množina A je obsažena v množině B (je povolena rovnost) |
| $A \subset B$ | množina A je vlastní podmnožinou množiny B (není povolena rovnost) |
| $A \cap B$ | průnik množin $A, B$ ($x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$) |
| $A \cup B$ | sjednocení množin $A, B$ ($x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$) |
| $f : A \to B$ | zobrazení $f$ z množiny $A$ do množiny $B$ |
| $y = f(x)$ | hodnota zobrazení (funkce) $f$ v bodě $x$; funkce $f$ nezávisle proměnné $x$ (zde $y$ je závisle proměnná) |
| $(f \circ g)(x), f(g(x))$ | složené zobrazení (funkce) $f$ po $g$ |
| $a = b$ | $a$ je rovno $b$ |
| $a \neq b$ | $a$ není rovno $b$; $a$ je různé od $b$ |
| $a \approx b$ | $a$ je přibližně rovno $b$ |
| $a \doteq b$ | $a$ je po zaokrouhlení rovno $b$ |
| $a < b$ | $a$ je menší než $b$ |
| $a > b$ | $a$ je větší než $b$ |
| $a \leq b$ | $a$ je menší nebo rovno $b$ |
| $a \geq b$ | $a$ je větší nebo rovno $b$ |
| $(a, b)$ | otevřený interval od $a$ do $b$; $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ |

| | |
|---|---|
| $[a, b]$ | uzavřený interval od $a$ do $b$; $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ |
| $(a, b]$ | zleva otevřený a zprava uzavřený interval od $a$ do $b$; $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (též polootevřený) |
| $[a, b)$ | zleva uzavřený a zprava otevřený interval od $a$ do $b$; $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (též polouzavřený) |
| $n!$ | $n$ faktoriál $(0! = 1, 1! = 1, 2! = 2 \cdot 1, 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1, \ldots)$ |
| $\lvert a \rvert$ | absolutní hodnota čísla $a$; velikost čísla $a$ (vzdálenost od počátku) |
| max | maximum |
| min | minimum |
| $\sum\limits_{i=a}^{b} x_i$ | součet $x_a + x_{a+1} + \cdots + x_{b-1} + x_b$ |
| $\prod\limits_{i=a}^{b} x_i$ | součin $x_a \cdot x_{a+1} \cdot \cdots \cdot x_{b-1} \cdot x_b$ |
| $\infty$ | nekonečno |
| $\mathrm{e}$ | Eulerovo číslo $(\mathrm{e} = 2{,}718\,281\,828\ldots)$; základ přirozeného logaritmu |
| $\pi$ | Ludolfovo číslo $(\pi = 3{,}141\,592\,654\ldots)$; poměr obvodu kruhu k jeho průměru |
| $i$ | imaginární jednotka ($i = \sqrt{-1}$, tj. $i^2 = -1$) |
| $z = a + bi$ | komplexní číslo $z$, kde $\operatorname{Re} z = a, \operatorname{Im} z = b$ |
| $\operatorname{Re} z$ | reálná část komplexního čísla $z$ |
| $\operatorname{Im} z$ | imaginární část komplexního čísla $z$ |
| $\bar{z}$ | komplexně sdružené číslo ke komplexnímu číslu $z$; $(z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi)$ |
| $\vec{v}$ | vektor |
| $\vec{0}$ | nulový vektor |
| $-\vec{v}$ | opačný vektor k vektoru $\vec{v}$ |
| $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v}$ | skalární součin vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ |
| $\mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ | množina matic o $m$ řádcích a $n$ sloupcích s reálnými prvky |
| $a_{i,j}, a_{ij}$ | prvek matice $A$ z řádku $i$ a sloupce $j$ |
| $\mathcal{O}$ | nulová matice |
| $\mathcal{O}_{m \times n}$ | nulová matice o $m$ řádcích a $n$ sloupcích |
| $I$ | jednotková matice |
| $I_n$ | jednotková matice o $n$ řádcích a $n$ sloupcích |
| $A^{-1}$ | inverzní matice k matici $A$ |
| $A^T$ | transponovaná matice k matici $A$ |
| $\mathrm{h}(A)$ | hodnost matice $A$ |
| $\lvert A \rvert, \det A$ | determinant matice $A$ |
| $A \sim B$ | matice $A$ ekvivalentní s matici $B$ |
| $\operatorname{sgn} x$ | signum (znaménko) čísla $x$ |
| $x \to a$ | $x$ se blíží k $a$ |
| $x \to a^+$ | $x$ se blíží k $a$ zprava |
| $x \to a^-$ | $x$ se blíží k $a$ zleva |
| $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ | limita funkce $f$ pro $x$ blížící se k $a$ |
| $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ | limita funkce $f$ pro $x$ blížící se k $a$ zprava (jednostranná limita) |

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ | limita funkce $f$ pro $x$ blížící se k $a$ zleva (jednostranná limita) |
| $\mathrm{D}(f)$ | definiční obor funkce $f$ |
| $\mathrm{H}(f)$ | obor hodnot funkce $f$ |
| $f(a)$ | hodnota funkce $f$ v bodě $x = a$ |
| $f(x)\vert_{x=a}$ | dosazení čísla $a$ za nezávisle proměnnou $x$ do funkce $f$; $f(a)$ |
| $f'(x), \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, y'$ | derivace funkce $f$ podle nezávisle proměnné $x$ |
| $f''(x), \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}, y''$ | druhá derivace funkce $f$ podle nezávisle proměnné $x$ |
| $f^{(n)}(x), \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}, y^{(n)}$ | $n$-tá derivace funkce $f$ podle nezávisle proměnné $x$ |
| $\mathrm{d}f$ | diferenciál funkce $f$ |
| $\mathrm{d}x$ | diferenciál argumentu $x$ (nezávisle proměnné) |
| $[x, f(x)] = [x, y]$ | bod grafu funkce $f$ o souřadnicích $x, y$ |
| $\mathcal{O}_\delta(x_0)$ | $\delta$-okolí bodu $x_0$; $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ |
| $\widehat{\mathcal{O}}_\delta(x_0)$ | prstencové (ryzí) $\delta$-okolí bodu $x_0$; $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ |
| $\mathcal{O}_\delta^-(x_0)$ | levé $\delta$-okolí bodu $x_0$; $(x_0 - \delta, x_0]$ |
| $\mathcal{O}_\delta^+(x_0)$ | pravé $\delta$-okolí bodu $x_0$; $[x_0, x_0 + \delta)$ |
| $\widehat{\mathcal{O}}_\delta^-(x_0)$ | levé prstencové $\delta$-okolí bodu $x_0$; $(x_0 - \delta, x_0)$ |
| $\widehat{\mathcal{O}}_\delta^+(x_0)$ | pravé prstencové $\delta$-okolí bodu $x_0$; $(x_0, x_0 + \delta)$ |
| $\int f(x)\mathrm{d}x$ | primitivní funkce k funkci $f$; (neurčitý) integrál funkce $f$ |
| $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ | Riemannův (určitý) integrál funkce $f$ od $a$ do $b$ |
| $[F(x)]_a^b = F(x)\vert_a^b$ | $F(b) - F(a)$ |

## § 1.2 Číselné obory[1]

- **Přirozená čísla**: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- **Celá čísla**: $\mathbb{Z} = \{z = n \vee z = -n \vee z = 0 : n \in \mathbb{N}\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- **Racionální čísla**: $\mathbb{Q} = \{q = \frac{z}{n} : z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.
  Čísla, která nejsou racionální, tj. nelze je vyjádřit jako podíl celého a přirozeného čísla, nazýváme *iracionální* a značíme $\mathbb{I}$.
- **Reálná čísla**: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.
  K reálným číslům lze jednoznačně přiřadit všechny body nekonečné přímky (číselné osy) dle jejich vzdálenosti od počátku.
- **Komplexní čísla**: $\mathbb{C} = \{z = a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.
  Komplexním číslem $z$ nazýváme uspořádanou dvojici reálných čísel $[a, b]$ a píšeme $z = [a, b] = a + bi$. Číslu $a$ říkáme reálná část komplexního čísla $z$ ($\mathrm{Re}\, z$), číslu $b$ imaginární část komplexního čísla $z$ ($\mathrm{Im}\, z$).

[1] Bůh stvořil přirozená čísla, vše ostatní už je výtvorem člověka. (Leopold Kronecker)

*Poznámka.* Občas se používají např. pouze kladná reálná čísla včetně, nebo bez nuly apod. Proto označíme:

- ▷ $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$,
- ▷ $\mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} : x > 0\}$, $\mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{Z} : x < 0\}$,
- ▷ $\mathbb{Z}_0^+ = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\}$, $\mathbb{Z}_0^- = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq 0\}$,
- ▷ $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$, $\mathbb{Q}^- = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$,
- ▷ $\mathbb{Q}_0^+ = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\}$, $\mathbb{Q}_0^- = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\}$,
- ▷ $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$,
- ▷ $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$,
- ▷ $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ (tzv. rozšířená množina reálných čísel).

Kapitola

# 2 Vektory

## § 2.1 Vektorový prostor

Veličiny, kterými popisujeme svět kolem nás lze rozdělit do dvou skupin:

- **Skalární veličiny (skaláry)**
  – jsou plně určeny jediným číselným údajem udávajícím jejich velikost
  – teplota, hmotnost, množství,...

- **Vektorové veličiny (vektory)**
  – k jejich popisu je třeba více čísel v určeném pořadí
  – rychlost, síla (velikost a směr), poloha (souřadnice), barevný odstín (souřadnice RGB, CMYK), stav populace (počet a čas), ...

**Definice 1** (Vektor)**.**

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Uspořádanou $n$-tici reálných čísel $v_1, v_2, \ldots, v_n$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

nazýváme (reálným) *vektorem*. Číslo $n$ potom nazýváme *dimenzí* (rozměrem) vektoru $\vec{v}$ a čísla $v_1, v_2, \ldots, v_n$ nazýváme *složky* vektoru $\vec{v}$.

*Poznámka.* Vektory se v literatuře někdy zapisují do řádku, tj. $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Je-li potom potřeba použít ho jako sloupec, používá se na něj operace transpozice (viz dále v části o maticích, kdy je na vektor nahlíženo jako na matici o jediném řádku/sloupci), podobně obráceně.

- Sčítání vektorů definujeme po složkách, tj. pro $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ máme

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

  Je zřejmé, že je možné sčítat pouze vektory o stejné dimenzi.

- Násobení vektoru $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ skalárem $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme tak, že každou složku vektoru $\vec{v}$ vynásobíme skalárem $\alpha$, tj.

$$\alpha \vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

**Definice 2** (Nulový vektor)**.**

Vektor

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

nazýváme *nulový vektor*.

Pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ platí:

- $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$,
- $\alpha \vec{0} = \vec{0}$.

**Definice 3** (Opačný vektor)**.**

Vektor $-\vec{v} = -1\vec{v}$ nazýváme *opačný vektor* k vektoru $\vec{v}$.

Platí

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}.$$

***Vlastnosti operací na vektorech***

Pro všechny vektory $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ a skaláry $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí:

(i) $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$,

(ii) $\alpha\vec{v} = \vec{v}\alpha$,

(iii) $\alpha(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}$,

(iv) $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$,

(v) $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$,

(vi) $1\vec{v} = \vec{v}$.

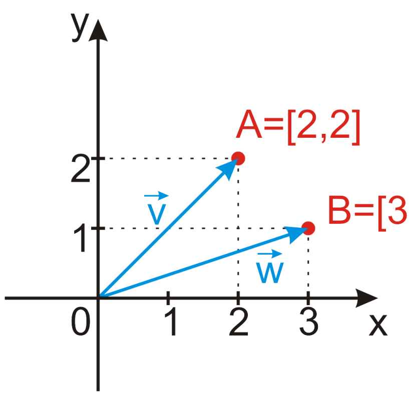
**Definice 4** (Vektorový prostor)**.**

Množinu všech $n$-rozměrných vektorů s operacemi sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem nazýváme $n$-rozměrný *vektorový prostor*.

*Poznámka.* Vektorový prostor je uzavřen na operace sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem. Tj. je-li $V$ vektorový prostor, $\vec{v}, \vec{w} \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$, pak

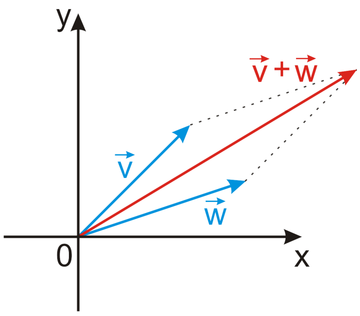
- $\vec{v} + \vec{w} \in V$,
- $a\vec{v} \in V$,
- $a\vec{v} + b\vec{w} \in V$.

Geometricky lze vektory (dimenze 2 a 3) zobrazit jako orientované průvodiče bodů (v rovině, nebo v prostoru). Na obr. 2.1 jsou zobrazeny vektory $\vec{v} = \binom{2}{2}$ a $\vec{w} = \binom{3}{1}$.

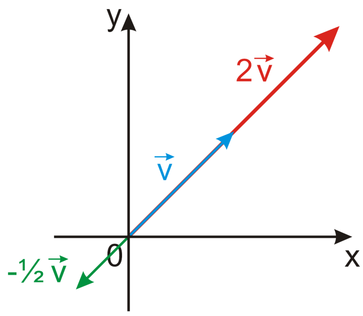



Obr. 2.1: Vektory v rovině.

Operaci sčítání vektorů lze snadno znázornit pomocí tzv. rovnoběžníkového pravidla (viz obr. 2.2). Násobení konstantou $\alpha \in \mathbb{R}$ geometricky znamená prodloužení vektoru (pro $\alpha > 1$), žádnou změnu (pro $\alpha = 1$), nebo jeho zkrácení (pro $\alpha < 1$) při zachování jeho směru. Vynásobení zápornou konstantou navíc vektor otáčí (viz obr. 2.3).

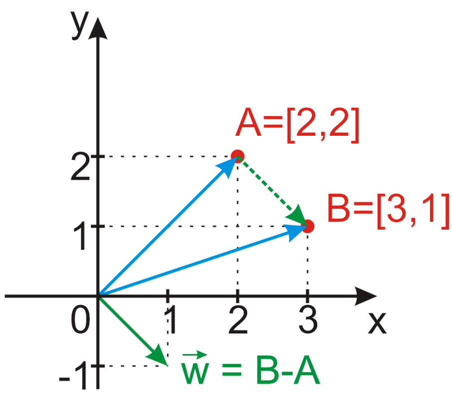



Obr. 2.2: Sčítání vektorů.




Obr. 2.3: Násobení vektoru konstantou.

Vektor lze zadat také pomocí jeho počátečního a koncového bodu. Vektor $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = B - A$ je orientovaná úsečka z bodu $A$ do bodu $B$, viz obr. 2.4.




Obr. 2.4: Vektor $\vec{w} = B - A$.

*Poznámka.* Protože vektor je dán jen svou velikostí a směrem, zelené šipky na obr. 2.4 jsou jen různá umístění téhož vektoru $\vec{w} = \binom{1}{-1}$.

**Definice 5** (Lineární kombinace)**.**

Nechť $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$. Vektor

$$\vec{w} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_m\vec{v}_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\vec{v}_i$$

nazýváme *lineární kombinace* vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$.

**Příklad 1.** *Vektor* $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ *je lineární kombinací vektorů* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, *neboť*

$$2\vec{u}+\vec{v}=2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1+(-3)\\2\cdot 2+1\\2\cdot 3+(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\\4\end{pmatrix}=\vec{w}.$$

**Definice 6** (Lineární závislost)**.**

Řekneme, že vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ jsou *lineárně závislé*, jestliže je jeden z těchto vektorů lineární kombinací ostatních. V opačném případě řekneme, že jsou *lineárně nezávislé*.

**Platí 1.** *Vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když existují taková čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, že aspoň jedno z nich je nenulové a platí*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{v}_i = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_m\vec{v}_m = \vec{0}.$$

*Poznámka.* Vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ jsou zcela jistě závislé, jestliže:

- je mezi nimi aspoň jeden nulový vektor,
- jsou mezi nimi aspoň dva vektory stejné,
- jeden z daných vektorů je násobkem jiného,
- $m > n$ (vektorů je větší počet, než je jejich dimenze).

**Příklad 2.** *Vektory $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}$ a $\vec{w}=\begin{pmatrix}-1\\5\\4\end{pmatrix}$ jsou lineárně závislé, neboť $\vec{w}=2\vec{u}+\vec{v}$, tj.*

$$2\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}=\vec{0}.$$

**Definice 7** (Skalární součin)**.**

Nechť $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Číslo

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{v}\cdot\vec{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + \cdots + v_mw_m = \sum_{i=1}^{m} v_iw_i$$

nazýváme *skalární součin* vektorů $\vec{v}, \vec{w}$.

**Příklad 3.**

$$\langle \begin{pmatrix}-3\\7\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\5\\4\end{pmatrix} \rangle = (-3)\cdot(-1) + 7\cdot 5 + (-2)\cdot 4 = 3 + 35 - 8 = 30.$$

## § 2.2 Příklady k procvičení

**Příklad 4.** *Jsou dány vektory*

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Spočtěte:*

*(i)* $5w - u$,

*(ii)* $3u - 2v + w$,

*(iii)* $\langle u, v \rangle = u \cdot v$,

*(iv)* $\langle 2u - w, -v \rangle = (2u - w) \cdot (-v)$.

## § 2.3 Wolfram|Alpha

- Součet vektorů.

```
(1,3,2) + (-2,4,5)
```

- Násobení vektoru konstantou.

```
-2 (-1,0,2)
```

- Lineární kombinace vektorů.

```
4 (-1,0,2) -3 (5,4,-6)
```

- Skalární součin.

```
(-1,0,2).(5,4,-6)
```

- Lineární (ne)závislost.

```
linear independence (-1,0,2),(5,4,-6),(1,2,3),(0,2,5)
```

Kapitola

# 3 Matice

## § 3.1 Definice a operace

**Definice 8** (Matice)**.**

(Reálnou) *maticí* typu $m \times n$ rozumíme obdélníkové číselné schéma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde čísla $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$, nazýváme prvky matice $A$. Množinu všech matic typu $m \times n$ značíme $Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$. Matici $A$ s prvky $a_{ij}$ značíme také $A = (a_{ij})$.

*Poznámka.* V předchozí definici $m$ značí počet řádků a $n$ počet sloupců matice $A$. Prvek $a_{ij}$ se nachází v $i$-tém řádku a $j$-tém sloupci matice $A$.

- Sčítání matic stejných rozměrů definujeme po složkách, tj. pro $A, B \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$ máme
$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R}).$$

**Příklad 5.**
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 4 & -2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & -1+7 \\ 0+4 & 1-2 \\ 5+1 & 3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -1 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$$

**Příklad 6.**
$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \textit{Nelze sečíst, matice mají různé rozměry.}$$

- Násobení matice $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$ skalárem $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme tak, že každou složku matice $A$ vynásobíme skalárem $\alpha$, tj.
$$\alpha A = \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij}) \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R}).$$

**Příklad 7.**

$$7\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 4 & -1\\ 1 & 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\cdot(-2) & 7\cdot 7\\ 7\cdot 4 & 7\cdot(-1)\\ 7\cdot 1 & 7\cdot 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14 & 49\\ 28 & -7\\ 7 & 56\end{pmatrix}$$

***Vlastnosti operací na maticích***

Pro všechny matice $A, B \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ a skaláry $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí:

(i) $A + B = B + A$,

(ii) $\alpha A = A\alpha$,

(iii) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,

(iv) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,

(v) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,

(vi) $1A = A$.

**Definice 9.**

Nechť $A = (a_{ij}) \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$.

- Platí-li $m = n$, nazýváme matici $A$ *čtvercová matice* řádu $m$ (řádu $n$).
- Prvky $a_{ii}$ čtvercové matice nazýváme prvky *hlavní diagonály*.
- Matice, jejíž všechny prvky jsou nulové, nazýváme *nulová matice* a značíme $\mathcal{O}$.
- Čtvercovou matici, která má na hlavní diagonále jedničky a všude jinde nuly, nazýváme *jednotkovou maticí* a značíme $I$.
- Matici, jejíž každý řádek začíná větším počtem nul než řádek přecházející, nazýváme *schodovitou maticí*.
- Matici
$$A^T = (a_{ji}) \in Mat_{n\times m}(\mathbb{R})$$
nazýváme *transponovaná matice* k matici $A$. (Transponovaná matice vznikne záměnou řádků a sloupců původní matice.)

**Příklad 8.** *Jsou dány matice*

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\\ 3 & -4\end{pmatrix}.$$

- *Matice $A$ je čtvercovou maticí řádu 2, je to jednotková matice a je schodovitá.*
- *Matice $B$ je schodovitá.*

- *Matice $C$ je čtvercová řádu 3, není schodovitá.*
- *Matice $D$ je transponovaná k matici $B$, tj. $D = B^T$ a $B = D^T$.*

**Definice 10** (Násobení matic)**.**

Nechť matice $A$ je typu $m \times \boxed{\text{p}}$ a $B$ je matice typu $\boxed{\text{p}} \times n$. *Součinem matic* $A$ a $B$ (v tomto pořadí) rozumíme matici $C$ typu $m \times n$, pro jejíž prvky platí

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots a_{ip}b_{pj} = \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}, \end{aligned}$$

pro $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Píšeme $C = AB$

*Poznámka.* Při násobení matic v předchozí definici vznikl prvek $c_{ij}$ jako skalární součin $i$-tého řádku matice $A$ a $j$-tého sloupce matice $B$.

**Příklad 9.**

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 5 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-4) + (-2) \cdot 9 \\ 1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 5 & 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-4) + 3 \cdot 9 \\ 2 \cdot 2 + 7 \cdot 0 + 1 \cdot 5 & 2 \cdot 1 + 7 \cdot (-4) + 1 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -15 \\ 17 & 12 \\ 9 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} = {\color{red}\times}$$

*Matice nelze násobit, nemají správné rozměry* $[(3 \times 2)(3 \times 3)]$.

**Věta 1.**

Nechť $A$, $B$, $C$ jsou matice vhodných rozměrů. Pak platí

$$\begin{aligned} (AB)C &= A(BC), \\ A(B + C) &= AB + AC, \\ (A + B)C &= AC + BC. \end{aligned}$$

*Poznámka.* Součin matic *není* komutativní, tj. obecně nelze zaměňovat pořadí násobení matic.

**Věta 2.**

Nechť $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$. Potom platí $A \cdot I_n = A$, $I_m \cdot A = A$.

**Definice 11** (EŘO)**.**

Následující úpravy matic nazýváme *ekvivalentní řádkové operace* (úpravy)

- výměna dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovým číslem,
- přičtení jednoho řádku k jinému,
- vynechání nulového řádku.

Řekneme, že matice $A$ a $B$ jsou ekvivalentní a píšeme $A \sim B$, jestliže lze matici $A$ převést konečným počtem ekvivalentních úprav na matici $B$.

**Věta 3.**

Každou matici lze konečným počtem ekvivalentních řádkových úprav převést do schodovitého tvaru.

## § 3.2 Gaussova eliminační metoda

Pomocí *Gaussovy eliminační metody* (GEM) lze převést libovolnou matici do schodovitého tvaru.

***Postup***

(i) V matici najdeme sloupec nejvíce vlevo s alespoň jedním nenulovým prvkem.

(ii) Zvolíme v tomto sloupci jeden z nenulových prvků (tzv. pivota) a přemístíme řádek, ve kterém se nachází, na pozici prvního řádku (pomocí výměny řádků).

(iii) Pomocí EŘO vynulujeme prvky pod pivotem. Vznikne-li nulový řádek, vynecháme ho.

(iv) Kroky (i)–(iii) opakujeme na podmatici vzniklé z původní matice vynecháním řádku s pivotem.

(v) Postup opakujeme, dokud není matice ve schodovitém tvaru

*Poznámka.* Kdykoliv během postupu můžeme některý řádek vynásobit, nebo vydělit vhodným číslem tak, abychom matici zjednodušili.

**Příklad 10.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 6 \\ \boxed{1} & 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \; I \leftrightarrow II \; \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \; III - 2 \cdot I$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & 1 \end{pmatrix} \; III - 5 \cdot II \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -29 \end{pmatrix}$$

**Definice 12** (Hodnost matice)**.**

Nechť $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$. *Hodností* $h(A)$ matice $A$ rozumíme maximální počet lineárně nezávislých řádků (= počet lineárně nezávislých sloupců).

**Věta 4.**

- Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.
- Matice transponovaná má stejnou hodnost jako matice původní.
- Ekvivalentní matice mají stejnou hodnost.

**Příklad 11.** *V předchozím příkladu jsme zjistili, že*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -29 \end{pmatrix},$$

*tedy* $h(A) = 3$.

*Poznámka.* Tímto způsobem lze také snadno zjistit, zda jsou dané vektory lineárně závislé, popř. z nich dokonce vybrat maximální počet lineárně nezávislých vektorů.
Vektory naskládáme jako sloupce do matice, tu převedeme do schodovitého tvaru. Lineárně nezávislé vektory jsou ty, které se nacházely ve sloupcích s pivoty.

**Definice 13.**

Nechť $A$ je čtvercová matice řádu $n$. Jestliže existuje čtvercová matice $A^{-1}$ řádu $n$ taková, že platí

$$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A,$$

nazýváme matici $A^{-1}$ *inverzní maticí* k matici $A$.

**Věta 5.**

Nechť je $A$ čtvercová matice řádu $n$. Potom k ní existuje inverzní matice $A^{-1}$ právě tehdy, když má matice $A$ lineárně nezávislé řádky (říkáme, že je regulární).

Z předchozí věty plyne, že inverzní matici lze najít jen ke čtvercové matici, která má plnou hodnost. To znamená, že ve schodovitém tvaru jsou všichni pivoti na její hlavní diagonále a v průběhu GEM se neobjevil žádný nulový řádek. Jádrem algoritmu pro výpočet inverzní matice je tzv. *úplná Gaussova eliminace*, která spočívá v tom, že po získání schodovitého tvaru pokračujeme stejným způsobem v nulování prvků nad pivoty (se kterými se už nehýbe), a to zprava doleva.

***Postup***

1. K matici $A$ přidáme jednotkovou matici stejné velikosti. Tím získáme rozšířenou matici $(A|I)$.

2. Pomocí úplné Gaussovy eliminace převedeme matici $A$ na diagonální matici (tj. matici, která má nenulové prvky pouze na hlavní diagonále). Všechny EŘO přitom provádíme s *celými* řádky matice $(A|I)$.

3. Každý řádek matice $(A|I)$ vydělíme diagonálním prvkem matice $A$, který se v něm nachází.

4. Tím jsme matici $A$ převedli na matici $I$ a matici $I$ na matici $A^{-1}$. Výsledná rozšířená matice je tedy $(I|A^{-1})$.

*Poznámka.* Opět jako u „neúplné“ Gaussovy eliminační metody můžeme kdykoliv to jde matici zjednodušit vhodnou úpravou (zvláště vydělení řádku společným dělitelem všech jeho prvků).

**Příklad 12.** *Najděte inverzní matice k maticím $A$, $B$ a $C$.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Matice $A$ není čtvercová, tedy k ní neexistuje inverzní matice.

$$(B|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II + I \\ III - 2\cdot I \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III + II \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot\frac{1}{5} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right) \begin{array}{l} I - 2\cdot III \\ II - 6\cdot III \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 7/5 & -2/5 & -2/5 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 11/5 & -1/5 & -6/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right) \begin{array}{l} I - II \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4/5 & -1/5 & 4/5 \\ 0 & 3 & 0 & 11/5 & -1/5 & -6/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot\frac{1}{3} \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4/5 & -1/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 & 11/15 & -1/15 & -6/15 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right) = (I|B^{-1})$$

Tedy

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -4/5 & -1/5 & 4/5 \\ 11/15 & -1/15 & -6/15 \\ -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} -12 & -3 & 12 \\ 11 & -1 & -6 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
(C|I) = &\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II - 2I \\ III - I \end{array} \\
\sim &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-5} & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \end{array} \\
\sim &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

Matice $C$ není regulární ($h(C) = 2$), tedy k ní neexistuje inverzní matice.

## § 3.3 Aplikace – Leslieho model růstu

Pomocí Leslieho modelu je možné odhadnout vývoj populace. Popíšeme si pouze její vytvoření a použití. Zkoumáme nějaký systém jednotlivců (zvířata, hmyz, buněčné kultury,...) rozdělený do $n$ skupin (stáří, fáze vývoje,...). Stav v čase $k$ je tedy dán vektorem

$$
x_k = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},
$$

kde $a_i, i = 1, \ldots, n$, je počet jedinců skupiny $i$ v čase $k$. (Lineární) model vývoje takového systému je dán maticí $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, která popisuje změnu z $x_k$ na $x_{k+1}$ (jde o iterovaný proces):

$$
x_{k+1} = Ax_k.
$$

Leslieho matice má tvar

$$
A = \begin{pmatrix}
f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_{n-2} & f_{n-1} & f_n \\
\tau_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \tau_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \tau_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \tau_{n-2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tau_{n-1} & 0
\end{pmatrix},
$$

kde $f_i$ je relativní plodnost a $\tau_i$ relativní přežití skupiny $i$.

**Příklad 13.** *Uvažujme populaci nezmarů, kteří se dožívají tří měsíců. Každý nezmar splodí mezi prvním a druhým měsícem dva malé nezmárky, stejně tak mezi druhým a třetím měsícem života. Mladí nezmaři (do stáří jednoho měsíce) neplodí. Polovina nezmarů po dovršení druhého měsíce umírá, po dovršení třetího měsíce umírají všichni. Napište Leslieho matici nezmařího modelu a určete složení populace, o složení* $(17, 102, 191)$ *po třech měsících.*

Řešení: Leslieho matice je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daná populace bude mít po třech měsících složení

$$A^3 \cdot (\text{počáteční složení}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 102 \\ 191 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1189 \\ 136 \\ 293 \end{pmatrix}.$$

*Poznámka.* Z modelu daného Leslieho maticí lze snadno určit i přírůstek za období a také k jakému složení (vzhledem k “věkovým” skupinám) populace spěje. K obojímu se vrátíme po probrání náležitých matematických nástrojů. Populace z nezmařího příkladu má přírůstek cca 62% a ustálí se na složení cca 52 : 32 : 10. Tedy nejmladších bude (cca) 55, 32%, středního věku 34, 04% a seniorů 10, 64%.

## § 3.4 Příklady k procvičení[1]

**Příklad 14.** *Jsou dány matice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Spočtěte:*

*(i)* $A + B$,

*(ii)* $3A - 2B$,

*(iii)* $A - 3B^T$,

*(iv)* $AB^T$,

*(v)* $AB$.

**Příklad 15.** *Jsou dány matice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Určete, v jakém pořadí je lze vynásobit a násobení proveďte.*

**Příklad 16.** *Proveďte totéž, co v příkladu 15, pro transponované matice* $A^T, B^T, C^T$.

**Příklad 17.** *Pomocí Gaussovy eliminační metody převeďte matici* $D$ *na schodovitý tvar.*

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

[1] Největší matice v testu bude $3 \times 3$ nebo $4 \times 4$. Je to test, ne reálný život. (Michael Sand)

**Příklad 18.** *Určete hodnost matice*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Dále určete, které sloupce v matici $E$ jsou lineárně nezávislé.*

**Příklad 19.** *Najděte matici inverzní k zadaným maticím.*

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 20.** *Jsou dány matice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Spočtěte $3A - 2B, AB^T, A^TB$.*

**Příklad 21.** *Jsou dány vektory*

$$u = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

*Spočtěte $\langle u, v\rangle, uv^T, u^Tv$.*

**Příklad 22.** *Určete hodnost matice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 23.** *Napište příklady matic o hodnosti $1, 2, 3$ a $4$ a hodnost zdůvodněte.*

**Příklad 24.** *Jsou dány vektory*

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, u_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

*Vyberte z nich co nejvíce lineárně nezávislých vektorů.*

**Příklad 25.** *Najděte inverzní matici k maticím*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

## § 3.5 Wolfram|Alpha

- Součet matic.

```
{(-1,0,2),(5,4,-6),(1,2,3)} + {(2,1,0),(6,-3,4),(2,2,5)}
```

- Násobení matice konstantou.

```
3 {(5,-3,0),(2,1,-3),(4,0,3)}
```

- Lineární kombinace matic.

```
-2 {(3,3,2),(-2,1,6),(1,5,3)} +5 {(2,2,-2),(3,-6,1),(0,2,7)}
```

- Součin matic.

```
{(-1,1,0,2),(5,4,-4,-6),(3,5,2,-3)}.{(0,1),(3,-3),(2,-1),(5,0)}
```

- Hodnost matice.

```
rank{(5,-4,8),(3,-3,4),(3,-3,4),(2,-1,4)}
```

- Transponovaná matice.

```
transpose{(4,2,-1),(3,9,5),(2,-1,1),(1,6,-2)}
```

- Inverzní matice.

```
inverse{(2,-1,3),(0,-3,2),(2,-1,5)}
```

Kapitola

# 4 Soustavy lineárních rovnic I

## § 4.1 Definice a pojmy

**Definice 14** (Soustava lineárních rovnic)**.**

Nechť $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Soustavou $m$ lineárních rovnic o $n$ neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$ rozumíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{SLR}$$

**Věta 6.**

Řešení soustavy lineárních rovnic (SLR) rozumíme uspořádanou $n$-tici reálných čísel $r_1, r_2, \dots, r_n$, po jejichž dosazení za neznámé $x_1, x_2, \dots, x_n$ (v tomto pořadí) do soustavy lineárních rovnic dostaneme ve všech rovnicích identity.

**Definice 15** (Matice soustavy)**.**

- Matici
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
nazýváme *maticí soustavy* (SLR).

- Matici
$$A_r = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$
nazýváme *rozšířenou maticí soustavy* (SLR).

*Poznámka.* Soustavu (SLR) můžeme zapsat v maticové formě:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$
po příslušném označení $Ax = b$.

**Definice 16** (Homogenní soustava lineárních rovnic)**.**

Jestliže v soustavě (SLR) platí
$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0,$$
nazýváme tuto soustavu *homogenní*. V opačném případě se nazývá soustava *nehomogenní*.

*Poznámka.* Homogenní soustava lineárních rovnic má buď pouze triviální řešení (jestliže $h(A) = n$), nebo nekonečně mnoho řešení (jestliže $h(A) < n$), která lze vyjádřit pomocí $n - h(A)$ nezávislých parametrů.

**Věta 7** (Frobeniova)**.**

Soustava lineárních rovnic $Ax = b$ je řešitelná právě tehdy, když matice soustavy $A$ a rozšířená matice soustavy $A_r = (A|b)$ mají stejnou hodnost.

***Počet řešení SLR***

- Jestliže $h(A) \neq h(A_r)$, soustava *nemá řešení*.
- Jestliže $h(A) = h(A_r) = n$, soustava *má právě jedno řešení*.
- Jestliže $h(A) = h(A_r) < n$, soustava *má nekonečně mnoho řešení*, která lze vyjádřit pomocí $n - h(A)$ nezávislých parametrů.

## § 4.2 Řešení soustav lineárních rovnic

**Definice 17** (Ekvivalentní soustavy lineárních rovnic)**.**

Dvě soustavy lineárních rovnic se nazývají *ekvivalentní*, jestliže mají shodné řešení.

***Postup***

(i) Pomocí GEM převedeme rozšířenou matici soustavy $A_r = (A|b)$ na schodovitý tvar.

(ii) Pomocí Frobeniovy věty rozhodneme, zda má soustava řešení.

(iii) Je-li soustava řešitelná, přiřadíme schodovité matici soustavu lineárních rovnic. Tato je ekvivalentní s původní soustavou.

(iv) Postupně řešíme rovnice od poslední a získané výsledky dosazujeme do následujících rovnic. Má-li soustava nekonečně mnoho řešení, zvolíme vhodné proměnné za nezávislé parametry.

*Poznámka.* Je-li matice $A$ soustavy $Ax = b$ regulární, pak má tato soustava vždy jediné řešení. Toto řešení je možné získat použitím inverzní matice $A^{-1}$.

$$\begin{aligned} Ax &= b \quad /\underrightarrow{A^{-1}} \\ A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\ Ix &= A^{-1}b \\ x &= A^{-1}b. \end{aligned}$$

Pozor, obě strany rovnice musíme vynásobit maticí ze stejné strany (zde zleva), protože násobení matic není komutativní.

**Příklad 26.**

$$\begin{aligned} x+y+z&=3\\ 2x+7y+z&=-2\\ x+2y+z&=4 \end{aligned}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&7&1\\1&2&1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}5&1&-6\\-1&0&1\\-3&-1&5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot b=\begin{pmatrix}5&1&-6\\-1&0&1\\-3&-1&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\1\\13\end{pmatrix}$$

Řešení je tedy $x=-11$, $y=1$, $z=13$.

## § 4.3 Příklady k procvičení

**Příklad 27.** *Vyřešte soustavu lineárních rovnic:*

*(i)*

$$\begin{aligned} 2x+3y-z&=9,\\ x-y+z&=-2,\\ -x+2y-3z&=6, \end{aligned}$$

*(ii)*

$$\begin{aligned} x+3y+2z&=-1,\\ 2x+7y+6z&=3,\\ x+5y+6z&=13, \end{aligned}$$

*(iii)*

$$\begin{aligned} 2x-3y-6z&=-13,\\ x-y-2z&=-5,\\ -x+2y+4z&=8, \end{aligned}$$

*(iv)*

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2-x_4&=1,\\ 3x_1+2x_2+4x_3-2x_4&=3,\\ x_1-x_2+4x_3-x_4&=2, \end{aligned}$$

*(v)*

$$\begin{aligned} x+y+z&=6,\\ x-y+z&=2,\\ x-2y-2z&=-6, \end{aligned}$$

*(vi)*

$$\begin{aligned} x+y+z&=6,\\ x+2y-2z&=4,\\ 2x+3y-z&=10, \end{aligned}$$

*(vii)*

$$\begin{aligned} 2x+2y+z&=-1,\\ -3x+y&=0,\\ 2x+3y-z&=1,\\ 4x+5y&=0, \end{aligned}$$

*(viii)*

$$\begin{aligned} -3x+y-2z&=4,\\ -3x+y-z&=2,\\ x+3y-5z&=-2,\\ 4x+5y-3z&=1, \end{aligned}$$

*(ix)*

$$
\begin{aligned}
x + y - 2z - w &= 2, \\
-2x + 3y - z + 2w &= 1, \\
3x + 2y - z - 3w &= -2, \\
4x - 2y - 3z - 2w &= 1.
\end{aligned}
$$

*(x)*

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 &= 2, \\
2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3, \\
x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 1, \\
4x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 6.
\end{aligned}
$$

## § 4.4 Wolfram|Alpha

- Řešení soustavy lineárních rovnic.

```
solve 2x+3y-z=2,5x-y-4z=7,x-y+6z=1
```

```
solve x1+3x2-5x3+x4=12,2x1-x2+x3-x4=-5,x3-5x4=1
```

Kapitola

# 5 Determinanty

## § 5.1 Definice a determinanty do řádu 3

**Definice 18** (Permutace)**.**

Nechť jsou dána čísla $1, 2, \dots, n$. *Permutací* těchto prvků rozumíme uspořádanou $n$-tici, která vznikla jejich přeskládáním. *Inverzí* rozumíme záměnu $i$-tého a $j$-tého prvku v permutaci.

*Poznámka.* Počet permutací $n$-prvkové množiny je $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Např. permutací prvků $1, 2, 3$ je $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, konkrétně:

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).$$

**Definice 19** (Determinant)**.**

Nechť $A$ je čtvercová matice řádu $n$. *Determinant* matice $A$ je číslo $\det A = |A| \in \mathbb{R}$,

$$\det A = \sum (-1)^p a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n},$$

kde sčítáme přes všechny permutace $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ sloupcových indexů. Číslo $p$ značí počet inverzí příslušné permutace.

*Poznámka.* Podle definice tedy „stačí“ vzít po jednom prvku z každého řádku tak, aby žádné dva nebyly ze stejného sloupce. Tyto prvky mezi sebou vynásobit. Determinant je právě součtem všech těchto součinů. Z toho je vidět, že definice není vhodná pro počítání determinantů matic větších rozměrů.

***Výpočet determinantů nižších řádů***

- Determinant řádu 1:
$$\det(a_{11}) = a_{11}.$$

- Determinant řádu 2 – křížové pravidlo:
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

- Determinant řádu 3 – Sarrusovo pravidlo
$$\det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} \left|a_{11}\right. & a_{12} & \left.a_{13}\right| \\ \left|a_{21}\right. & a_{22} & \left.a_{23}\right| \\ \left|a_{31}\right. & a_{32} & \left.a_{33}\right| \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$
$$= \; a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

## § 5.2 Determinanty vyšších řádů

**Definice 20.**

Nechť $A$ je čtvercová matice řádu $n$. Vynecháme-li v matici $A$ $i$-tý řádek $j$-tý sloupec, označujeme derminant vzniklé submatice $M_{ij}$ a nazýváme jej *minor* příslušný prvku $a_{ij}$. Číslo
$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$
nazýváme *algebraický doplněk* prvku $a_{ij}$.

**Věta 8** (Laplaceův rozvoj)**.**

Nechť $A$ je čtvercová matice řádu $n$. Pro libovolný řádek (sloupec) determinantu $\det A$ platí

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

$$\Big(\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\Big).$$

**Příklad 28.** *Je dán determinant*

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}.$$

Protože druhý řádek a třetí sloupec obsahuje nulu, je vhodné zvolit pro Laplaceův rozvoj jeden z nich. Zvolme druhý řádek a počítejme:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ \boxed{4} & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}, \quad a_{21} = 4, \quad M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix},$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1) \cdot [-12 - (-1)] = 11$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & \boxed{5} & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}, \quad a_{22} = 5, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix},$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1 \cdot [8 - 3] = 5$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & \boxed{0} \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}, \quad a_{23} = 0, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix},$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1) \cdot [2 - 9] = 7.$$

Odtud

$$\det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 4 \cdot 11 + 5 \cdot 5 + 0 \cdot 7 = 69.$$

*Poznámka.* Determinant řádu $n$ se pomocí Laplaceova rozvoje převede na nejvýše $n$ determinantů řádu $n-1$. Přitom cílem je převést determinant vyššího řádu na determinanty řádu 2 nebo 3, které lze snadno spočítat křížovým, resp. Sarrusovým pravidlem. Např. determinant řádu 5 vede na nejvýše 5 determinantů řádu 4. Z nich každý vede na nejvýše 4 determinanty řádu 3. Celkem tedy determinant řádu 5 vede na nejvýše 20 determinantů řádu 3, popř. na 60 determinantů řádu 2. Proto je velmi vhodné vybírat pro rozvoj řádek, nebo sloupec obsahující co největší počet nulových prvků.

## § 5.3 Úpravy determinantů

**Věta 9** (Operace neměnící hodnotu determinantu)**.**

Ponechání jednoho řádku/sloupce beze změny a přičtení jeho násobku k jinému řádku/sloupci nemění hodnotu determinantu.

**Příklad 29.**

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} I \\ II-2I \\ III+3I \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-32+40) = 8.$$

**Věta 10** (Operace měnící hodnotu determinantu)**.**

- Záměna dvou řádků/sloupců determinantu změní jeho znaménko.
- Vynásobení řádku/sloupce nenulovým číslem $\alpha$ zvětší hodnotu determinantu $\alpha$-krát. (Tj. z řádků/sloupců lze vytýkat před determinant.)

**Příklad 30.**

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} \; I \leftrightarrow II \; = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

**Věta 11.**

Jsou dány čtvercové matice $A, B$ řádu $n$.

(i) $|A| = 0 \Leftrightarrow$ řádky nebo sloupce matice $A$ jsou lineárně závislé,

(ii) matice $A$ obsahuje nulový řádek nebo sloupec $\Rightarrow |A| = 0$,

(iii) $|A^T| = |A|$,

(iv) jestliže je $|A| \neq 0$, pak $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$,

(v) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$,

(vi) determinant matice ve schodovitém tvaru je roven součinu prvků na její hlavní diagonále.

## § 5.4 Vektorový součin – postup

Pomocí determinantů je možné počítat *vektorový součin* dvou vektorů délky tři. V postupu jsou využity směrové elementy pro jednotlivé osy, tedy postupně pro osy $x, y$ a $z$ jde o

$$i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Na rozdíl od skalárního součinu, kdy je výsledkem skalár (číslo), výsledkem vektorového součinu je opět vektor. Tento výsledný vektor je kolmý k oběma násobeným vektorům a jeho směr lze určit podle pravidla pravé ruky. Představíme si, jak násobené vektory určují rovinu a vycházejí z jednoho bodu. Pak kolmý směr je z tohoto výchozího bodu nahoru nebo dolů s ohledem na danou rovinu. Uchopíme-li tuto osu do pravé ruky tak, aby prsty směřovaly od prvního násobeného vektoru k druhému, potom vztyčený palec ukazuje směr výsledného vektoru.

Vektorový součin se značí $u \times v$ a z popisu výše je zřejmé, že záleží na pořadí v jakém násobíme, protože při jeho změně směřuje výsledný vektor přesně na opačnou stranu.

Samotný postup si nejsnadněji ukážeme na konkrétním příkladu.

**Příklad 31.** *Jsou dány vektory*

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

*Vypočítejte $u \times v$ a $v \times u$.*

Pro výpočet vektorového součinu sestavíme determinant, kde v prvním řádku budou směrové elementy $i, j, k$, ve druhém řádku bude první násobený vektor a na posledním řádku bude druhý násobený vektor.

Tento determinant vypočítáme pomocí Sarrusova pravidla, tj.

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 7i - 11j + 5k = 7\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 11\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Podobně vypočítáme druhé pořadí násobení, tj.

$$v \times u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -7i + 11j - 5k = -7\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 11\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

## § 5.5 Příklady k procvičení

**Příklad 32.** *Určete determinanty:*

*(i)* $\left|-8\right|$,

*(ii)* $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$,

*(iii)* $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$,

*(iv)* $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 8 & -3 \end{vmatrix}$,

*(v)* $\begin{vmatrix} x^2 & 1-x \\ 5x & 3 \end{vmatrix}$,

*(vi)* $\begin{vmatrix} a-b & 3 & 2a \\ b-1 & -2a & a+2b \\ b & 3a & ab \end{vmatrix}$,

**Příklad 33.** *Určete determinanty:*

*(i)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, *(ii)* $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, *(iii)* $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

**Příklad 34.** *Vypočtěte determinant:*

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

**Příklad 35.** *Jsou dány vektory*

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

*Vypočítejte vektorové součiny*

*(i)* $u \times v$, *(ii)* $v \times u$, *(iii)* $w_1 \times w_2$, *(iv)* $w_2 \times w_1$.

**Příklad 36.** *Objem rovnoběžnostěnu, jehož tři strany vycházející ze stejného vrcholu určuje trojice vektorů $u, v, w$, lze vypočítat pomocí tzv. smíšeného součinu. Vzorec je $V = |(u \times v) \cdot w|$, kde je použit vektorový součin, skalární součin a na závěr absolutní hodnota. Určete objem rovnoběžnostěnu daného vektory*

$$u = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 37.** *Je dán rovnoběžnostěn s vrcholy*

$$A = [1,0,0], B = [6,0,0], C = [6,-4,0], D = [1,-4,0],$$

$$E = [1,0,5], F = [6,0,5], G = [6,-4,5], H = [1,-4,5].$$

*Určete jeho objem pomocí postupu v příkladu 36. (Vhodné je načrtnout obrázek a následně určit příslušnou trojici vektorů pro dosazení do vzorce. Vektor z dvojice bodů získáme odečtením „koncový minus počáteční“.)*

## § 5.6 Wolfram|Alpha

- Výpočet determinantu.

```
det{(2,-1,1,3),(6,2,0,1),(-2,5,3,1),(2,2,0,1)}
```

Kapitola

# 6 Soustavy lineárních rovnic II

## § 6.1 Cramerovo pravidlo

Uvažujme soustavu $n$ lineárních rovnic o $n$ neznámých $Ax = b$. Matice $A$ takovéto soustavy je tedy čtvercová matice řádu $n$. Jestliže je determinant matice $A$ nenulový, tedy soustava $Ax = b$ má právě jedno řešení, lze použít k jejímu vyřešení tzv. Cramerovo pavidlo. Jeho výhodou je, že je možné spočítat libovolnou neznámou bez znalosti ostatních.

**Věta 12** (Cramerovo pravidlo)**.**

Nechť je $A$ čtvercová regulární matice řádu $n$. Potom má soustava lineárních rovnic $Ax = b$ jediné řešení $x$, pro jehož $i$-tou složku platí

$$x_i = \frac{D_i}{D},$$

kde $D = \det A$ a $D_i$ je determinant matice řádu $n$ vzniklé z matice $A$ náhradou jejího $i$-tého sloupce za sloupec pravých stran $b$.

**Příklad 38.** *Určete hodnotu neznámé proměnné $x_2$ ze soustavy lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Řešíme tedy soustavu lineárních rovnic $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pro výpočet neznámé $x_2$ je nutné určit determinanty $D$ a $D_2$:

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

Protože je $\det A \neq 0$, lze použít Cramerovo pravidlo.

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -11.$$

Tedy $x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-11}{-5} = \frac{11}{5}$.

## § 6.2 Aplikace – Leslieho model růstu II

**Příklad 39.** *Mějme dán zjednodušený model populace jistého modrého ptáčka (lat. Ptacchus modrus). Populace je rozdělena do čtyř věkových skupin – vajíčko, mládě v hnízdě, létající mládě a dospělý jedinec. Je známo, že bývá zničeno sedm vajíček ze šestnácti, osmina mláďat v hnízdě uhyne a další osmina zemře při pokusu o první let. Z létajících mláďat se dospělosti dožijí tři ze čtyř a pár dospělých ptáčků přivede na svět průměrně* 32 *vajíček. Napište matici modelu, určete přírůstek populace a výsledný poměr mezi věkovými skupinami.*

Řešení: Leslieho matice je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 16 \\ \frac{9}{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Přírůstek a výsledný poměr populace získáme pomocí tzv. vlastních čísel a vlastních vektorů. Protože nás zajímá jen algoritmické řešení daného problému, nebudeme se zabývat teorií na pozadí. Vlastní čísla získáme tak, že od každého prvku na hlavní diagonále Leslieho matice odečteme neznámou $\lambda$ a spočítáme determinant. Determinantem je polynom s proměnnou $\lambda$ a jeho kořeny jsou právě vlastní čísla naší matice. Z nich nás zajímá pouze jediné – největší reálné. To udává přírůstek dané populace.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 16 \\ \frac{9}{16} & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - \left(\frac{3}{2}\right)^4.$$

Tedy řešíme rovnici $\lambda^4 - \left(\frac{3}{2}\right)^4 = 0$. Ta má pouze dva reálné kořeny a to $-\frac{3}{2}$ a $\frac{3}{2}$. Větší je $\frac{3}{2} = 1,5$, takže po jednom období bude mít populace $1,5$ násobek Ptacchusů. Populace tedy roste s přírůstkem 50%.

Nyní zbývá určit výsledné složení populace. To udává vlastní vektor příslušný již použitému (dominantnímu) vlastnímu číslu. Získáme ho jako řešení homogenní soustavy lineárních rovnic dané Leslieho maticí, ve které od každého prvku na hlavní diagonále odečteme příslušné vlastní číslo.

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 16 \\ \frac{9}{16} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} -\tfrac{3}{2}x_1 + 16x_4 &= 0 \\ \tfrac{9}{16}x_1 - \tfrac{3}{2}x_2 &= 0 \\ \tfrac{3}{4}x_2 - \tfrac{3}{2}x_3 &= 0 \\ \tfrac{3}{4}x_3 - \tfrac{3}{2}x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na jednom parametru:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{32}{3}p \\ 4p \\ 2p \\ p \end{pmatrix}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Nám stačí kterékoli nenulové z nich. Zvolme tedy např. parametr $p = 1$. Tím získéme jediné řešení (jediný vlastní vektor), jehož složky udávají poměr složení ke kterému populace směřuje, tedy

$$\frac{32}{3} : 4 : 2 : 1.$$

Srozumitelnější je samozřejmě udávat výsledné složení v procentech. Nejprve se zbavíme zlomku – celý vektor vynásobíme trojkou $\Rightarrow 32 : 12 : 6 : 3$, poté vydělíme jejich součtem a vynásobíme stovkou (tj. krát $\frac{100}{53}$). Odtud po zaokrouklení získáme složení populace v procentech:

$$60 : 23 : 11 : 6.$$

Tedy na 60 vajíček připadá 23 mláďat v hnízdě, 11 mláďat letců a 6 dospělých.

## § 6.3 Příklady k procvičení

**Příklad 40.** *Najděte řešení následujících soustav lineárních rovnic pomocí Cramerova pravidla (je-li to možné):*

*(i)*

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 9, \\ x - y + z &= -2, \\ -x + 2y - 3z &= 6, \end{aligned}$$

*(ii)*

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= -1, \\ 2x + 7y + 6z &= 3, \\ x + 5y + 6z &= 13, \end{aligned}$$

*(iii)*

$$\begin{aligned} 2x - 3y - 6z &= -13, \\ x - y - 2z &= -5, \\ -x + 2y + 4z &= 8, \end{aligned}$$

*(iv)*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6, \\ x - y + z &= 2, \\ x - 2y - 2z &= -6. \end{aligned}$$

**Příklad 41.** *Vyřešte soustavu lineárních rovnic.*

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 2,\\ 2x + 2y - z &= -1,\\ 2x + 5y + 3z &= 8. \end{aligned}$$

**Příklad 42.** *Vyřešte soustavu lineárních rovnic.*

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 2,\\ 2x + 2y + 6z &= -1,\\ 2x + 5y + 3z &= 8. \end{aligned}$$

**Příklad 43.** *Vyřešte soustavu lineárních rovnic.*

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 2,\\ 2x + 2y + 6z &= 20,\\ 2x + 5y + 3z &= 8. \end{aligned}$$

**Příklad 44.** *Určete neznámou $x_2$ ze SLR.*

$$\begin{aligned} -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1,\\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 3,\\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 &= 0,\\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 &= 1. \end{aligned}$$

## § 6.4 Wolfram|Alpha

- Výpočet vlastních čísel matice.

```
eigenvalues{(0,0,0,16),(9/16,0,0,0),(0,3/4,0,0),(0,0,3/4,0)}
```

- Výpočet vlastních vektorů matice.

```
eigenvectors{(0,0,0,16),(9/16,0,0,0),(0,3/4,0,0),(0,0,3/4,0)}
```

Kapitola

# 7 Úvod k funkcím

## § 7.1 Definice a pojmy

**Definice 21.**

Nechť $D \neq \emptyset, D \subseteq \mathbb{R}$. Pravidlo $f$, které každému prvku $x \in D$ přiřadí právě jedno reálné číslo $y \in \mathbb{R}$, se nazývá *reálná funkce reálné proměnné*. Zapisujeme $y = f(x)$.

- Množina $D = D(f)$ se nazývá *definiční obor* funkce $f$.
- Množina všech $y \in \mathbb{R}$, pro která existuje $x \in D$ takové, že $f(x) = y$ se nazývá *obor hodnot* funkce $f$ a značíme jej $H(f)$.
- $x$ se nazývá *nezávisle proměnná* (argument) funkce $f$.
- $y$ se nazývá *závisle proměnná* funkce $f$.
- Číslo $f(x_0) \in \mathbb{R}$ se nazývá *funkční hodnota* funkce $f$ v bodě $x_0$.

*Poznámka.* Není-li definiční obor funkce zadán, jedná se o množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která má daná funkce smysl.

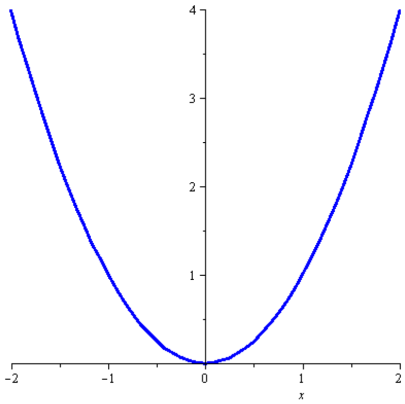
**Příklad 45.**

- *Definiční obor funkce* $f(x) = \frac{1}{x-1}$ *je* $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- *Definiční obor funkce* $g(x) = \sqrt{-x}$ *je* $D(g) = (-\infty, 0]$.

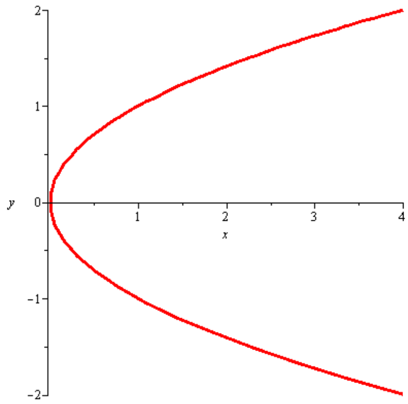
**Definice 22.**

Množina všech bodů roviny daných souřadnicemi $[x, f(x)]$ se nazývá *graf funkce* $f$.

**Příklad 46.** *Křivka na obr. 7.1 je grafem funkce, křivka na obr. 7.2 ne.*




Obr. 7.1: Funkce $f(x) = x^2$.



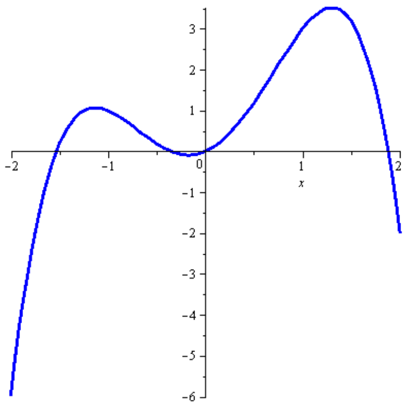

Obr. 7.2: Nejde o graf funkce.

**Definice 23** (Ohraničenost)**.**

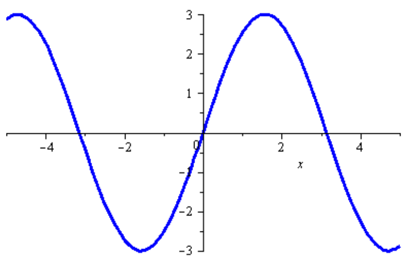
Buď $f$ funkce a $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že funkce $f$ je na množině $M$

- zdola ohraničená, jestliže existuje $d \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $f(x) \geq d$,
- shora ohraničená, jestliže existuje $h \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $f(x) \leq h$,
- ohraničená, jestliže existují $d, h \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $d \leq f(x) \leq h$.

**Příklad 47.** *Funkce na obr. 7.3 je ohraničená shora, na obr. 7.4 je ohraničené funkce.*




Obr. 7.3: Funkce ohraničená shora.




Obr. 7.4: Ohraničená funkce.

**Definice 24** (Parita)**.**

Buď $f$ taková funkce, že pro její definiční obor platí

$$x \in D(f) \quad \Rightarrow \quad -x \in D(f).$$

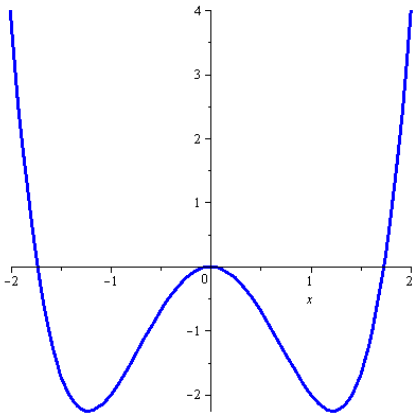
- Řekneme, že funkce $f$ je sudá, jestliže pro $\forall x \in D(f)$ platí, že

$$f(-x) = f(x).$$

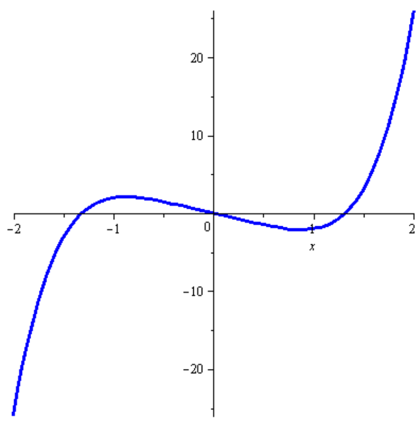
- Řekneme, že funkce $f$ je lichá, jestliže pro $\forall x \in D(f)$ platí, že

$$f(-x) = -f(x).$$

**Příklad 48.** *Funkce na obr. 7.5 je sudá, funkce na obr. 7.6 je lichá.*




Obr. 7.5: Graf sudé funkce je symetrický podle osy $y$.



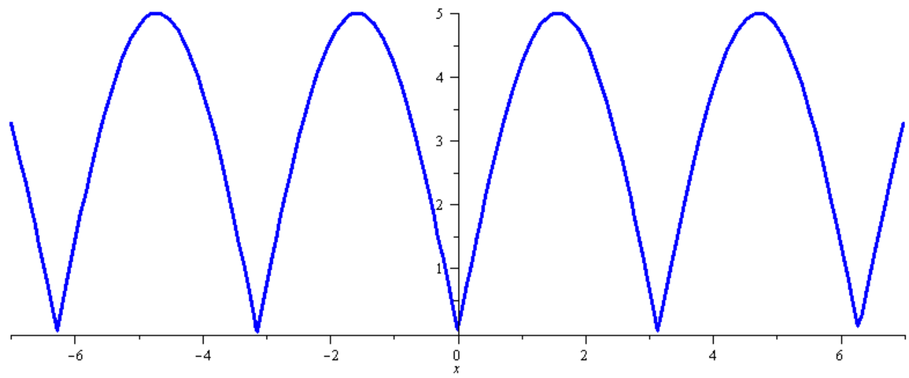

Obr. 7.6: Graf liché funkce je symetrický podle počátku.

**Definice 25** (Periodičnost)**.**

Nechť $p \in \mathbb{R}, p > 0$. Řekneme, že funkce $f$ je periodická s periodou $p$, jestliže pro $\forall x \in D(f)$ platí

$$x \pm p \in D(f), \qquad f(x \pm p) = f(x).$$

**Příklad 49.** *Funkce na obr. 7.7 je periodická s periodou $\pi$.*




Obr. 7.7: Periodická funkce.

**Definice 26.**

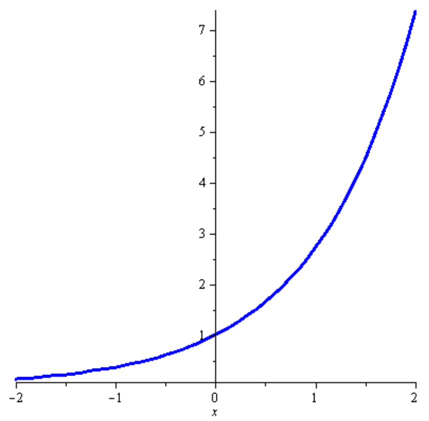
Buď $f$ funkce a $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že funkce $f$ je na množině $M$

- *rostoucí*, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2),$$
- *neklesající*, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2),$$
- *klesající*, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2),$$
- *nerostoucí*, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

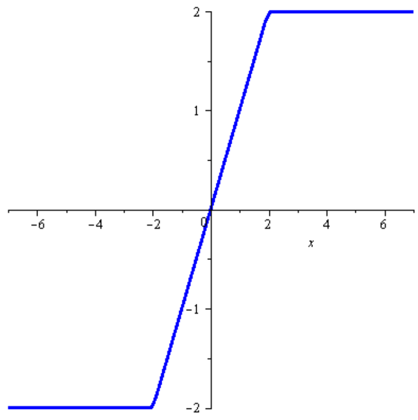
**Definice 27.**

Je-li funkce $f$ na množině $M$ neklesající, nebo nerostoucí, nazýváme ji *monotónní*. Je-li funkce $f$ na množině $M$ rostoucí, nebo klesající, nazýváme ji *ryze monotónní*.

**Příklad 50.** *Funkce na obr. 7.8 je rostoucí, funkce na obr. 7.9 je neklesající.*



Obr. 7.8: Rostoucí funkce.



Obr. 7.9: Neklesající funkce.

***Další pojmy***

Buď $f$ funkce a $M \subseteq D(f)$.

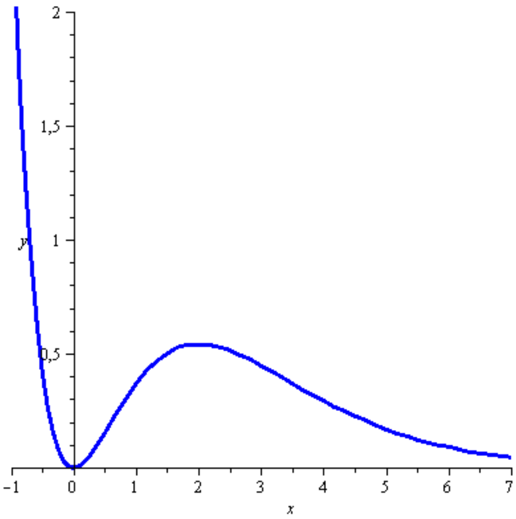
- Je-li $f(x) > 0$ pro $\forall x \in M$, řekneme, že $f$ je na množině $M$ *kladná*.
- Je-li $f(x) \geq 0$ pro $\forall x \in M$, řekneme, že $f$ je na množině $M$ *nezáporná*.
- Je-li $f(x) < 0$ pro $\forall x \in M$, řekneme, že $f$ je na množině $M$ *záporná*.
- Je-li $f(x) \leq 0$ pro $\forall x \in M$, řekneme, že $f$ je na množině $M$ *nekladná*.
- Bod $[0, f(0)]$ nazýváme *průsečík funkce $f$ s osou $y$*.
- Je-li $f(x_0) = 0$, pak nazýváme bod $[x_0, 0]$ *průsečík funkce $f$ s osou $x$*.

***Následující pojmy budou přesněji definovány později***

Buď $f$ funkce a $M \subseteq D(f)$.

- Je-li graf funkce $f$ pro $\forall x \in M$ nad tečnou sestrojenou v libovolném bodě $x_0 \in M$, řekneme, že $f$ je na množině $M$ *konvexní*.
- Je-li graf funkce $f$ pro $\forall x \in M$ pod tečnou sestrojenou v libovolném bodě $x_0 \in M$, řekneme, že $f$ je na množině $M$ *konkávní*.
- Přímku nazýváme *asymptotou* grafu funkce $f$, jestliže se její vzdálenost od grafu funkce s rostoucí souřadnicí neustále zmenšuje.

**Příklad 51.** *Popište zobrazenou funkci pomocí výše uvedených pojmů.*



Kapitola

# 8 Polynomy

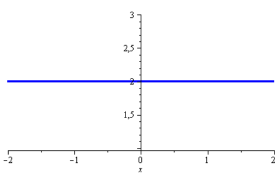
## § 8.1 Definice a operace s polynomy

**Definice 28** (Polynom)**.**

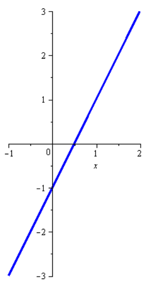
Funkci

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

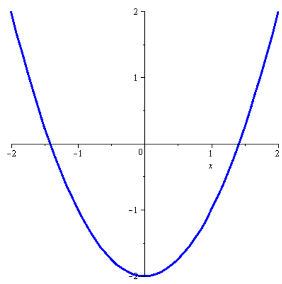
kde $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ nazýváme *polynom stupně $n$*. Čísla $a_0, \ldots, a_n$ nazýváme koeficienty polynomu $P$. Koeficient $a_n$ nazýváme vedoucí koeficient, koeficient $a_0$ nazýváme absolutní člen. Je-li $a_n = 1$ říkáme, že polynom $P$ je normovaný.



Obr. 8.1: $P(x) = 2$.



Obr. 8.2: $P(x) = 2x - 1$.



Obr. 8.3: $P(x) = x^2 - 2$.

Protože základní operace s polynomy jsou dobře známé ze střední školy, připomeňme si je jen na příkladech. (Pro vzorce týkající se násobení a dělení mocninných funkcí viz § B.1.)

**Příklad 52** (Sčítání a násobení konstantou)**.**

$$\begin{aligned}
&(3x^2 - 2x + 4) - 2(x^3 + x^2 + 2x - 1)\\
&= 3x^2 - 2x + 4 - 2x^3 - 2x^2 - 4x + 2\\
&= -2x^3 + x^2 - 6x + 6
\end{aligned}$$

**Příklad 53** (Násobení)**.**

$$\begin{aligned}&(2x^2-3)(x^3+2x+3)\\&=2x^2(x^3+2x+3)-3(x^3+2x+3)\\&=2x^5+4x^3+6x^2-3x^3-6x-9\\&=2x^5+x^3+6x^2-6x-9\end{aligned}$$

**Příklad 54** (Dělení)**.**

$$\begin{array}{l}\phantom{-}(4x^4-x^3+x^2-3x+7):(x^2+2)=4x^2-x-7+\frac{-x+21}{x^2+2}\\-\underline{(4x^4+8x^2)}\\\phantom{-}0-x^3-7x^2-3x+7\\-\underline{(-x^3-2x)}\\\phantom{-}0-7x^2-x+7\\-\underline{(-7x^2-14)}\\\phantom{-}0-x+21\end{array}$$

## § 8.2 Kořeny polynomu

**Definice 29** (Kořen polynomu)**.**

Číslo $x_0 \in \mathbb{C}$, pro které platí $P(x_0) = 0$ nazýváme kořen polynomu $P$.

**Věta 13.**

Je-li číslo $x_0 \in \mathbb{C}$ kořen polynomu $P$, pak existuje polynom $Q(x)$ takový, že

$$P(x) = (x - x_0)Q(x).$$

**Definice 30** (Kořenový činitel a násobný kořen)**.**

Je-li číslo $x_0 \in \mathbb{C}$ kořen polynomu $P$, nazýváme lineární polynom $x - x_0$ *kořenový činitel* příslušný ke kořenu $x_0$. Číslo $x_0$ je $k$-násobným kořenem polynomu $P$, jestliže existuje polynom $G(x)$ takový, že

$$P(x) = (x - x_0)^k G(x), \quad G(x_0) \neq 0.$$

**Věta 14** (Základní věta algebry)**.**

Polynom stupně $n$ má právě $n$ komplexních kořenů.

*Poznámka.*

- Je-li komplexní číslo $a+bi, a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ kořenem polynomu $P$, pak je jeho kořenem i číslo komplexně sdružené $a - bi$.
- Počet reálných kořenů polynomu stupně $n$ je buď $n$, nebo o sudý počet menší.
- Polynom lichého stupně má aspoň jeden reálný kořen.
- Polynomy jsou jediná kapitola, ve které budeme pracovat s komplexními čísly.

**Věta 15** (Rozklad na součin kořenových činitelů)**.**

Každý polynom je v reálném oboru možné zapsat jako součin vedoucího koeficientu, kořenových činitelů a kvadratických polynomů s komplexními kořeny .

**Věta 16** (Celočíselné kořeny)**.**

Nechť $P$ je polynom s celočíselnými koeficienty. Pak jsou všechny jeho celočíselné kořeny dělitelé jeho absolutního člene.

**Příklad 55.**

$$P(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18, \quad \textit{tedy } a_0 = -18.$$

*Všechny celočíselné kořeny jsou tedy mezi děliteli čísla* $-18$*:*

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18.$$

*Skutečně*

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)^2.$$

## § 8.3 Hornerovo schéma

Hornerovo schéma je algoritmus používaný při rozkladu polynomu na součin kořenových činitelů.

**Věta 17.**

Nechť jsou dány polynomy

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Jestliže existují $\alpha, b_{-1} \in \mathbb{R}$ takové, že

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x) + b_{-1},$$

pak

$$b_{n-1} = a_n, \qquad b_{k-1} = \alpha b_k + a_k, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

*Poznámka.* $P(\alpha) = b_{-1}$, tedy je-li $b_{-1} = 0$, pak je $\alpha$ kořenem polynomu $P$.

***Postup***

Koeficienty polynomu $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ spolu s číslem $\alpha$ sepíšeme do tabulky

| | $a_n$ | $a_{n-1}$ | $\cdots$ | $a_1$ | $a_0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $b_{n-1}$ | $b_{n-2}$ | $\cdots$ | $b_0$ | $b_{-1}$ |

A dopočítáme čísla $b_{n-1}, \ldots, b_{-1}$:

$$b_{n-1} = a_n, \qquad b_{k-1} = \alpha b_k + a_k, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Tím získáme polynom $Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$ a číslo $b_{-1}$ takové, že platí

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x) + b_{-1}.$$

**Příklad 56.** *Rozložte polynom $P(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18$ na součin kořenových činitelů. Celočíselné kořeny jsou mezi čísly $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$.*

| | 1 | -5 | 1 | 21 | -18 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -4 | -3 | 18 | ‖0 |
| 1 | 1 | -3 | -6 | 12 | – |
| -1 | 1 | -5 | 2 | 16 | – |
| 2 | 1 | -2 | -7 | 4 | – |
| -2 | 1 | -6 | 9 | ‖0 | – |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | – | – |

✓ Našli jsme kořeny $1, -2$.

✓ $Q(x) = x^2 - 6x + 9$

✓ $P(x) = (x-1)(x+2)Q(x)$

*Protože $Q(x)$ je kvadratický polynom, není nutné dál pokračovat v Hornerově schématu. Zbývající kořeny dopočítáme pomocí diskriminantu.*

$$Q(x) = x^2 - 6x + 9 \quad \Rightarrow \quad D = 36 - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3$$

*Tedy polynom $P$ má dva jednoduché kořeny $1, -2$ a jeden dvojnásobný kořen $3$. Odtud*

$$P(x) = (x-1)(x+2)(x-3)^2.$$

## § 8.4 Racionální lomená funkce

**Definice 31.**

Nechť je $P_n$ polynom stupně $n$ a $Q_m$ polynom stupně $m$. Funkci tvaru

$$R(x) = \frac{P_n}{Q_m}$$

nazýváme racionální lomená funkce. Navíc funkci $R(x)$ označujeme jako

- ryze lomenou, jestliže $n < m$,
- neryze lomenou, jestliže $n \geq m$.

**Věta 18.**

Každou neryze lomenou funkci je možné (pomocí dělení polynomů) vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

## § 8.5 Lineární a kvadratický polynom

***Lineární polynom*** $P(x) = ax + b$

- Grafem je přímka ($y = ax + b$).
- Pro zakreslení určíme dva body, které ji jednoznačně určují.
- Koeficient $a$ určuje rychlost růstu (sklon) přímky.
- Pokud je $a = 0$, jedná se o polynom stupně nula a grafem je vodorovná přímka (konstantní funkce).
- $a > 0$ znamená růst, $a < 0$ klesání.
- Koeficient $b$ určuje „odskok“ od počátku ($b > 0$ nahoru, $b < 0$ dolů).
- Předpisu $y = ax + b$ říkáme směrnicový ($a$ je směrnice).
- Převedením všeho na jednu stranu a případným přenásobením rovnice získáme obecný tvar $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$.
- Další možností zápisu je parametrický tvar $x = u_1 + v_1 p, y = u_2 + v_2 p$, kde $[u_1, u_2]$ je nějaký bod přímky, $(v_1, v_2)$ je vektor směru přímky a $p \in \mathbb{R}$ je parametr.

**Příklad 57.** *Jsou dány dva body* $[1, 2], [5, 3]$. *Najděte směrnicový, obecný a parametrický tvar přímky, která jimi prochází.*

Začneme směrnicovým tvarem $y = ax + b$. Dosadíme do něj oba body, což vede na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých $2 = a + b, 3 = 5a + b$. Neznámé $a, b$ vypočítáme libovolným způsobem a zjistíme, že $a = \frac{1}{4}, b = \frac{7}{4}$. Směrnicový tvar je tedy $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$.

Obecný tvar obdržíme přímo ze směrnicového jeho přenásobením číslem 4 ($4y = 1x + 7$) a úpravou na $x - 4y + 7 = 0$.

Pro parametrický tvar potřebujeme bod, použijme $[u_1, u_2] = [1, 2]$ a směrový vektor přímky. Ten získáme odečtením zadaných bodů

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Výsledný tvar je tedy

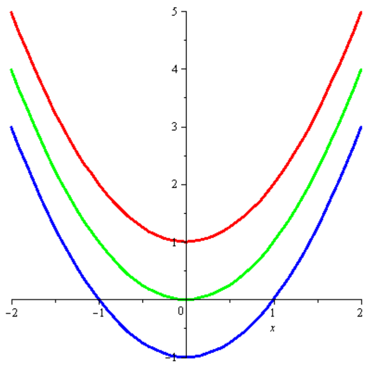
$$\begin{aligned} x &= 1 + 4p, \\ y &= 2 + 1p, p \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že pro $p = 0$ dostaneme bod $[1, 2]$ a pro $p = 1$ bod $[5, 3]$. Pokud tedy omezíme parametr $p$ jen na interval od 0 do 1, popisujeme tím úsečku mezi zadanými body.

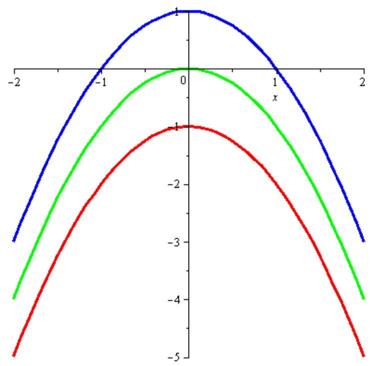
**Kvadratický polynom $P(x) = ax^2 + bx + c$**

- $D = b^2 - 4ac$,
- $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,
- $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

- $D > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \neq x_2, \quad x_{1,2} \in \mathbb{R}$,
- $D = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2, \quad x_{1,2} \in \mathbb{R}$,
- $D < 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \bar{x}_2, \quad x_{1,2} \in \mathbb{C}$.



Obr. 8.4: $P(x) = ax^2 + bx + c,\ a > 0$.



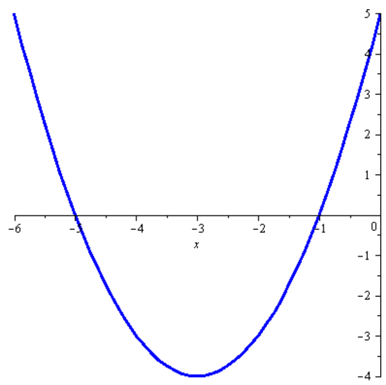
Obr. 8.5: $P(x) = ax^2 + bx + c,\ a < 0$.

**Doplnění na čtverec**

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}), \qquad x^2 + px + q = (x + \tfrac{p}{2})^2 - \tfrac{p^2}{4} + q.$$

**Příklad 58.** *Upravme kvadratický polynom $y = x^2 + 6x + 5$ doplněním na čtverec.*

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 6x + 5,\\ y &= (x+3)^2 - 9 + 5,\\ y &= (x+3)^2 - 4,\\ y &= (x+3)^2 - 4,\\ y + 4 &= (x+3)^2. \end{aligned}$$



*Tím jsme získali rovnici paraboly v tzv. vrcholovém tvaru, tedy ve tvaru $y - n = (x - m)^2$, kde bod $[m, n]$ je vrcholem dané paraboly. Naše parabola má tedy vrchol v bodě $[-3, -4]$ a protože koeficient u $x^2$ v základním tvaru je kladný, je otevřena směrem nahoru.*

## § 8.6 Příklady k procvičení

**Příklad 59.** *Jsou dány polynomy*

$$\begin{aligned} P_1(x) &= 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 12, \\ P_2(x) &= 3x^3 - 4x^2 + 5x - 2, \\ P_3(x) &= 2x^2 - 3x + 1, \\ P_4(x) &= -5x^2 + 4x - 4. \end{aligned}$$

*Spočtěte:*

*(i)* $P_1(x) + P_2(x)$,

*(ii)* $3P_1(x) - 2P_2(x)$,

*(iii)* $P_3(x) \cdot P_4(x)$,

*(iv)* $2P_1(x) \cdot (3P_4 - P_2(x)) + P_3(x)$.

**Příklad 60.** *Proveďte dělení polynomů*

*(i)* $(2x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 10x - 3) : (x^4 - x^3 - x + 1)$,

*(ii)* $(3x^7 + 2x^3 - x + 5) : (2x^3 - 1)$.

**Příklad 61.** *Najděte všechny celočíselné kořeny daného polynomu a) dosazováním, b) Hornerovým schématem a rozložte ho na součin kořenových činitelů.*

*(i)* $P(x) = x^5 - 8x^3 - 6x^2 + 7x + 6$,

*(ii)* $Q(x) = x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 2x$.

**Příklad 62.** *Pomocí Hornerova schématu rozhodněte, kolikanásobným kořenem polynomu*

*(i)* $P(x) = x^5 - 3x^4 - 9x^3 + 23x^2 + 24x - 36$ *je číslo* 3,

*(ii)* $G(x) = 3x^5 - 12x^4 + 13x^3 - 12x + 16$ *je číslo* 2.

**Příklad 63.** *Určete, zda je daná funkce ryze lomená. Pokud ano, zdůvodněte. Pokud ne, převeďte ji na součet polynomu a ryze lomené funkce.*

*(i)* $\frac{12x^6-3x^5-6x^2+x-2}{x^9+5x^2-4}$, *(ii)* $\frac{x^6+2x^5-2x^4+7x^2+2x}{x^3+1}$, *(iii)* $\frac{2x^9+12x^6-4x^2+5}{9x^9+2x^8-1}$.

**Příklad 64.** *Vyřešte kvadratickou rovnici a) v* $\mathbb{R}$, *b) v* $\mathbb{C}$.

*(i)* $2x^2 - x - 3 = 0$, *(ii)* $x^2 + 4x + 4 = 0$, *(iii)* $x^2 - 4x + 29 = 0$.

**Příklad 65.** *Určete, pro která* $x \in \mathbb{R}$ *je daný výraz a) kladný, b) nezáporný.*

*(i)* $2x^2 - x - 3$,

*(ii)* $x^2 + 4x + 4$,

*(iii)* $x^2 - 4x + 29$,

*(iv)* $\frac{1-x}{x+2}$,

*(v)* $\frac{1}{x}(x+1)^2(x-3)$,

*(vi)* $\frac{x^2+x-6}{2x^2+3x+1}$,

*(vii)* $\frac{x^2+x-6}{2x^2+3x-1}$.

**Příklad 66.** *Najděte průsečíky grafu funkce $f$ se souřadnými osami.*

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+5)}{x-1}.$$

**Příklad 67.** *Zjistěte, pro která $x$ je daná funkce nezáporná.*

$$f(x) = \frac{x^2-2x-3}{1-3x}.$$

**Příklad 68.** *Rozhodněte, zda je daná RLF ryze lomená, či nikoli. Pokud není, převeďte ji na součet polynomu a ryze lomené RLF.*

$$R(x) = \frac{2x^4+3x^3-4x^2+x-5}{3x^3-2x+1}.$$

**Příklad 69.** *Je dána přímka $2x+3y-5=0$. Určete směrnicový tvar, zjistěte souřadnice bodů přímky pro $x=0$ a $x=1$. Poté přímku načrtněte.*

**Příklad 70.** *Najděte směrnicový tvar přímky procházející body $[-1,2],[2,-1]$.*

**Příklad 71.** *Jistý lék je dávkován tak, že základní dávka činí 2 gramy a za každých započatých 5 kg hmotnosti je nutno přidat další desetinu gramu. Zapište rovnici přímky, která dávkování popisuje. Následně určete dávku vhodnou pro hmotnost 56 kg.*

## § 8.7 Wolfram|Alpha

- Lineární kombinace polynomů.

```
4(2x^3-x^2+5x+7)-5(x^4+3x^3-6x^2-x+15)
```

- Násobení polynomů.

```
expand (x-3)(x+2)^2(x^2-x+1)
```

- Dělení polynomů.

```
quotient and remainder of (x^5+3x^4-2x^3-5x^2+4x-1)/(2x^2+x-3)
```

- Rozklad na součin.

```
factor x^5-8x^3-3x^2+4x-12
```

- Dosazení do polynomu.

```
{x^4+3x^3-6x^2-x+15, x=2}
```

- Kořeny polynomu.

```
roots of x^5+4x^4+x^3-2x^2-12x-72

solve x^5+4x^4+x^3-2x^2-12x-72=0
```

- Rovnice.

```
solve x^4-3x^4+2(x^3-x+1)=5(x-4)(x^2-2)
```

- Nerovnice.

```
solve (x^2+2x-3)/(x+1)>=0
```

Kapitola

# 9 Funkce

## § 9.1 Elementárních funkce

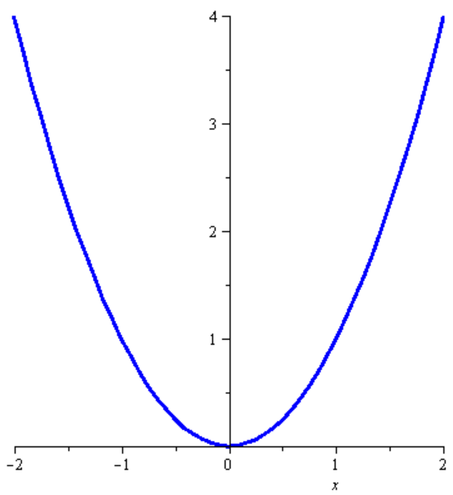
**Definice 32** (Základní elementární funkce)**.**

Obecná mocnina, mnohočleny, goniometrické, cyklometrické, exponenciální a logaritmické (a hyperbolické a hyperbolometrické) funkce se nazývají *základní elementární funkce*.

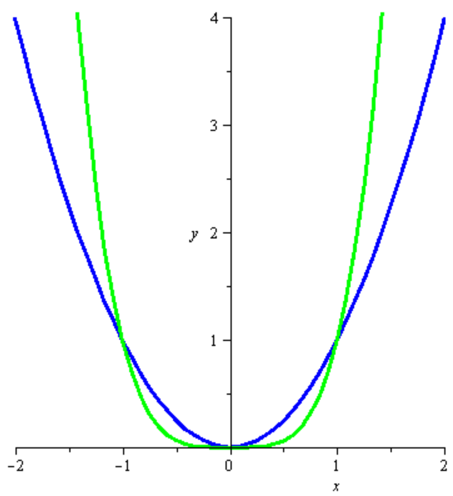
**Definice 33** (Elementární funkce)**.**

Funkce, které lze získat konečným počtem sečtení, odečtení, vynásobení, podělení a složení základních elementárních funkcí se nazývají *elementární funkce*.

Grafem funkce $y = x^2$ je *parabola* (viz obr. 9.1), $\mathrm{D}(x^2) = \mathbb{R}$, $\mathrm{H}(x^2) = \mathbb{R}_0^+$, jde o sudou funkci. Jak se mění tvar grafu při zvyšující se mocnině je znázorněno na obr. 9.2.

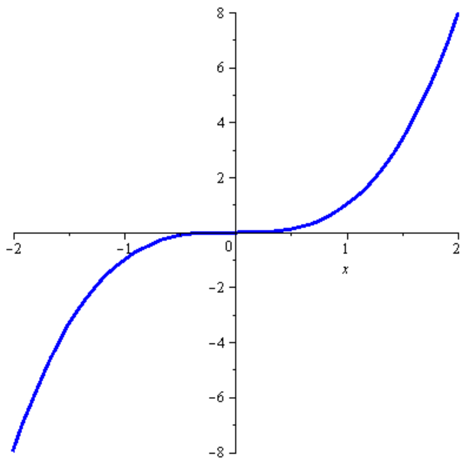



Obr. 9.1: $x^2$

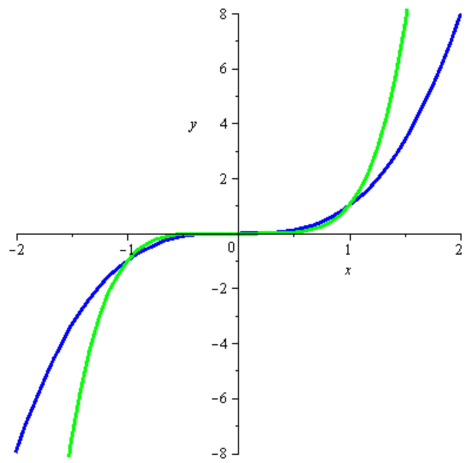



Obr. 9.2: $x^2$, $x^4$

Podobně jsou na obr. 9.3 a 9.4 znázorněny liché mocniny, které jsou typickými zástupci lichých funkcí. Dále je vidět, že $\mathrm{D}(x^3) = \mathbb{R}$ a $\mathrm{H}(x^3) = \mathbb{R}$.

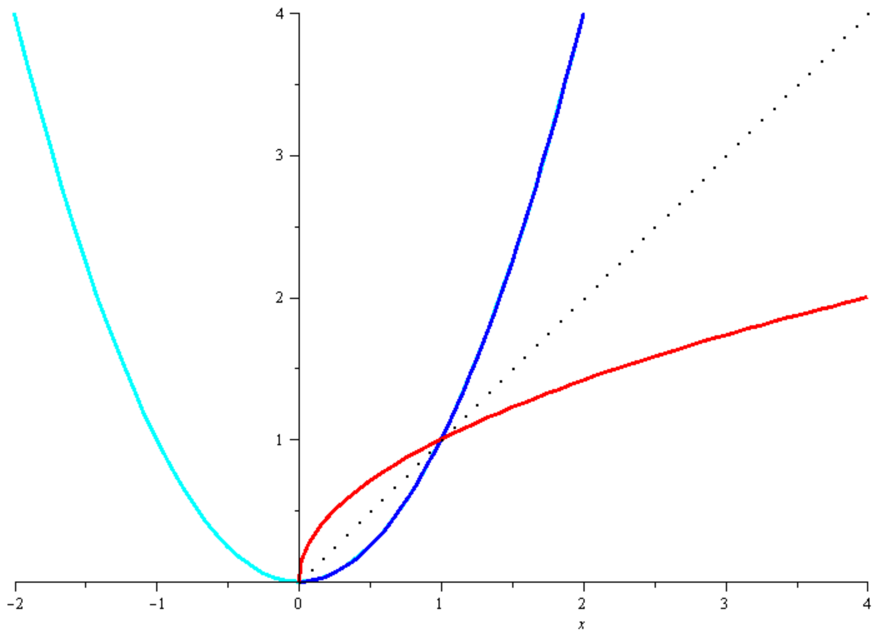



Obr. 9.3: $x^3$



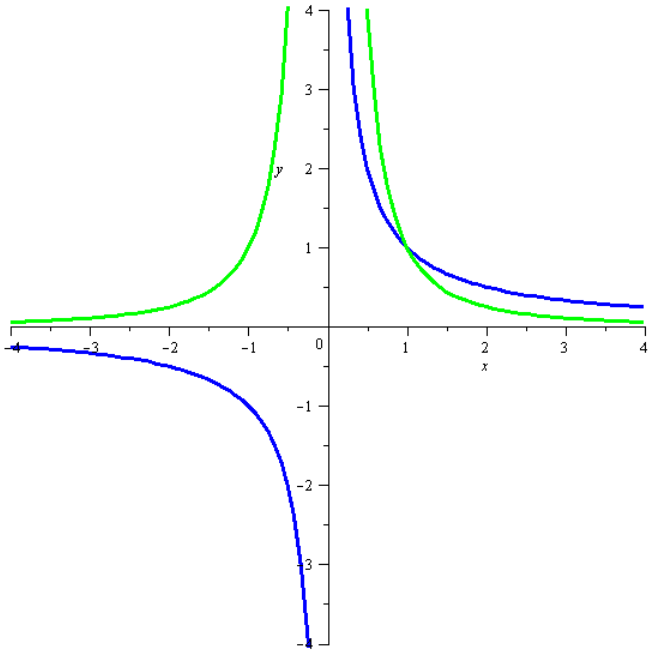

Obr. 9.4: $x^3$, $x^5$

Vznik odmocniny z prosté části grafu mocniny, jakožto její inverze, je zobrazen na obr. 9.5, kde je také vidět, že $\mathrm{D}(\sqrt{x}) = \mathrm{H}(\sqrt{x}) = \mathbb{R}_0^+$.



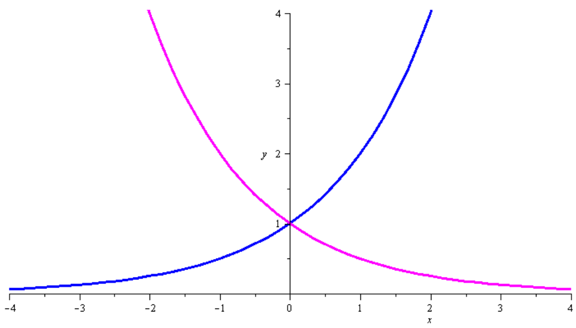

Obr. 9.5: $x^2$, $\sqrt{x}$

Grafem funkce $y = x^{-1}$ je *hyperbola*, je to funkce lichá, $\mathrm{D}(x^{-1}) = \mathrm{H}(x^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Oproti tomu je funkce $y = x^{-2}$ sudá, $\mathrm{D}(x^{-2}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $\mathrm{H}(x^{-2}) = \mathbb{R}^+$ (viz obr. 9.6). Podobně pro vyšší mocniny.

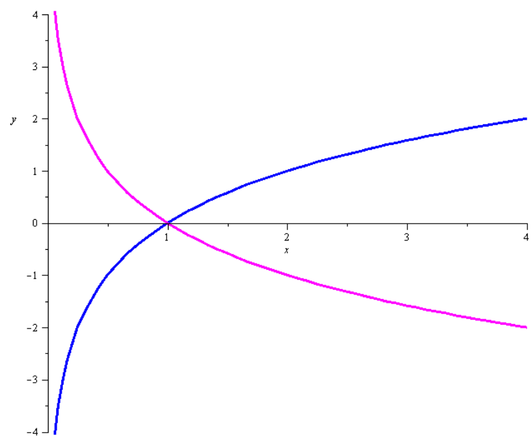



Obr. 9.6: $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$

Grafem exponenciální funkce $y = a^x, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ (pro $a = 1$ funkce degeneruje na konstantní funkci) je *exponenciála*, $\mathrm{D}(a^x) = \mathbb{R}$ a $\mathrm{H}(a^x) = \mathbb{R}^+$. Funkce je na celém svém definičním oboru rostoucí jestliže $a > 1$ a klesající jestliže $a < 1$ (viz obr. 9.7).

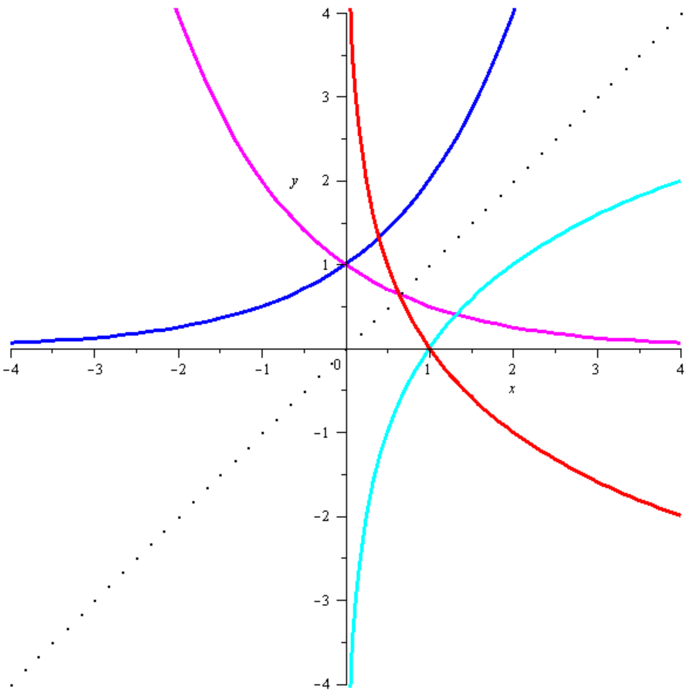



Obr. 9.7: $2^x$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$



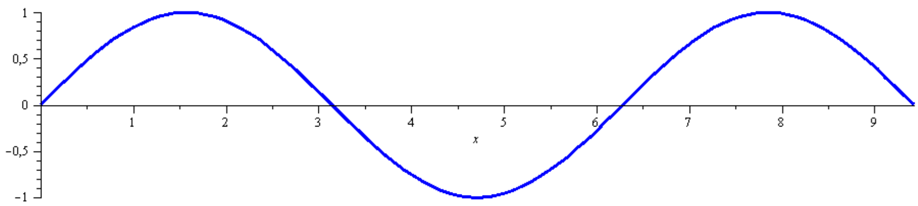

Obr. 9.8: $\log_2 x$, $\log_{\frac{1}{2}} x$

Inverzní funkcí k funkci exponenciální je logaritmus $y = \log_a x, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, jehož grafem je *logaritmická křivka*, $\mathrm{D}(\log_a x) = \mathbb{R}^+$ a $\mathrm{H}(\log_a x) = \mathbb{R}$. Logaritmus je, stejně jako exponenciála, rostoucí, jestliže je jeho základ $a > 1$ a klesající jestliže $a < 1$. (Viz obr. 9.8 a 9.9). Připomeňme, že logaritmus o základu e (Eulerovo číslo) se nazývá přirozený logaritmus (logaritmus naturalis) a značí se $\ln x$.

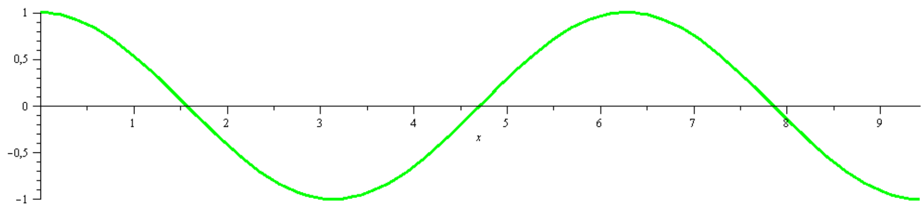



Obr. 9.9: $2^x$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $\log_2 x$, $\log_{\frac{1}{2}} x$

Mezi goniometrické funkce patří sinus, kosinus, tangens a kotangens. Všechny tyto funkce jsou periodické, přičemž sinus a kosinus s periodou $2\pi$, tangens a kotangens s periodou $\pi$. Sinus, tangens a kotangens jsou funkce liché, kosinus je funkce sudá. Na obr. 9.10 a 9.11 vidíme,že $\mathrm{D}(\sin x) = \mathrm{D}(\cos x) = \mathbb{R}$ a $\mathrm{H}(\sin x) = \mathrm{H}(\cos x) = [-1, 1]$.

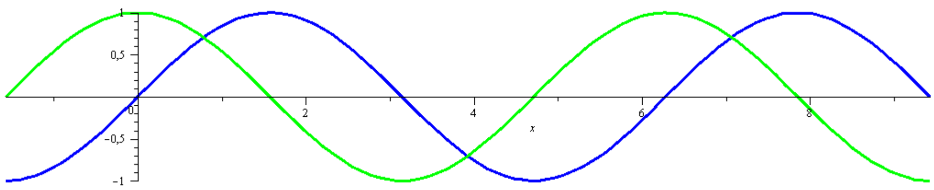



Obr. 9.10: $\sin x$



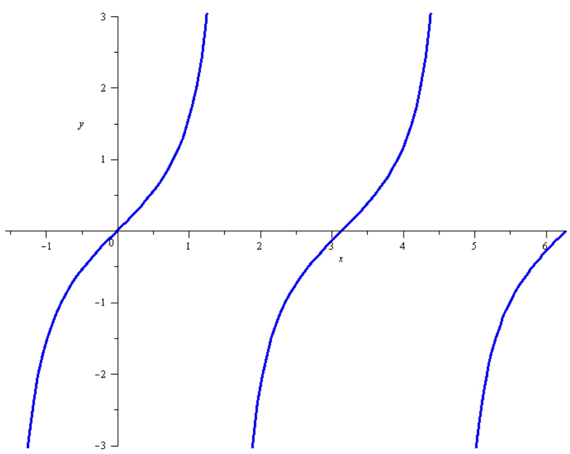

Obr. 9.11: $\cos x$

Dále na obr. 9.12 je vidět, že grafy sinu a kosinu jsou až na posunutí $\pi/2$ totožné.

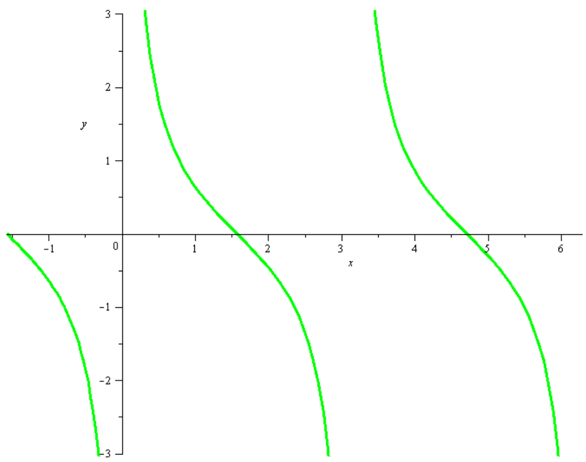



Obr. 9.12: $\sin x$, $\cos x$

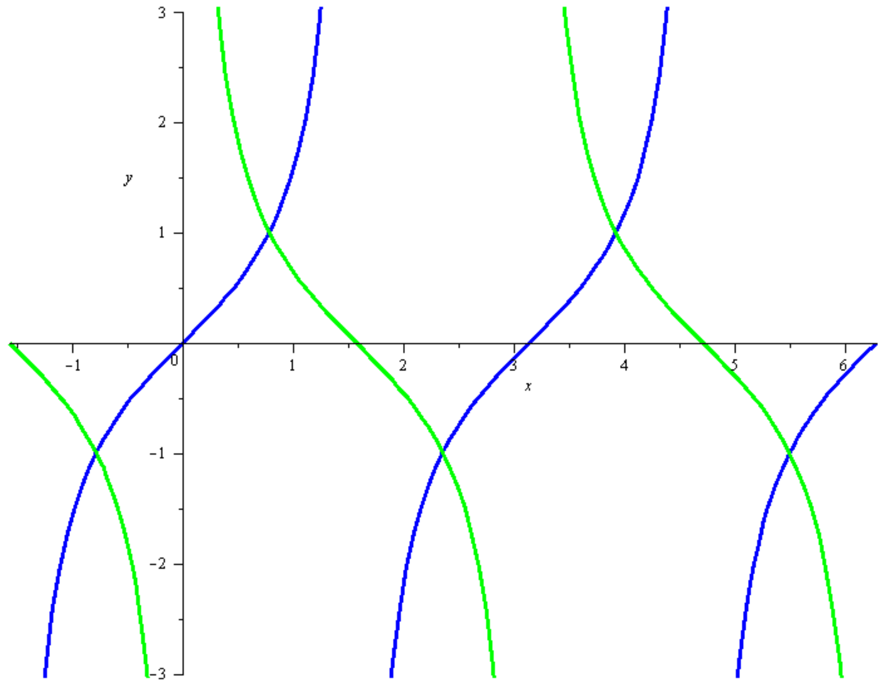
Funkce tangens a kotangens jsou zobrazeny na obr. 9.13 a 9.14 a podobnost jejich grafů je dobře patrná z obr. 9.15 (až na posunutí o $\pi/2$ a zrcadlení jsou totožné). Dále je vidět, že $\mathrm{D}(\operatorname{tg} x) = \mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ (všechna reálná čísla bez lichých násobků $\pi/2$), $\mathrm{D}(\operatorname{cotg} x) = \mathbb{R}\setminus\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ (všechna reálná čísla bez celočíselných násobků $\pi$) a $\mathrm{H}(\operatorname{tg} x) = \mathrm{H}(\operatorname{cotg} x) = \mathbb{R}$.




Obr. 9.13: $\operatorname{tg} x$

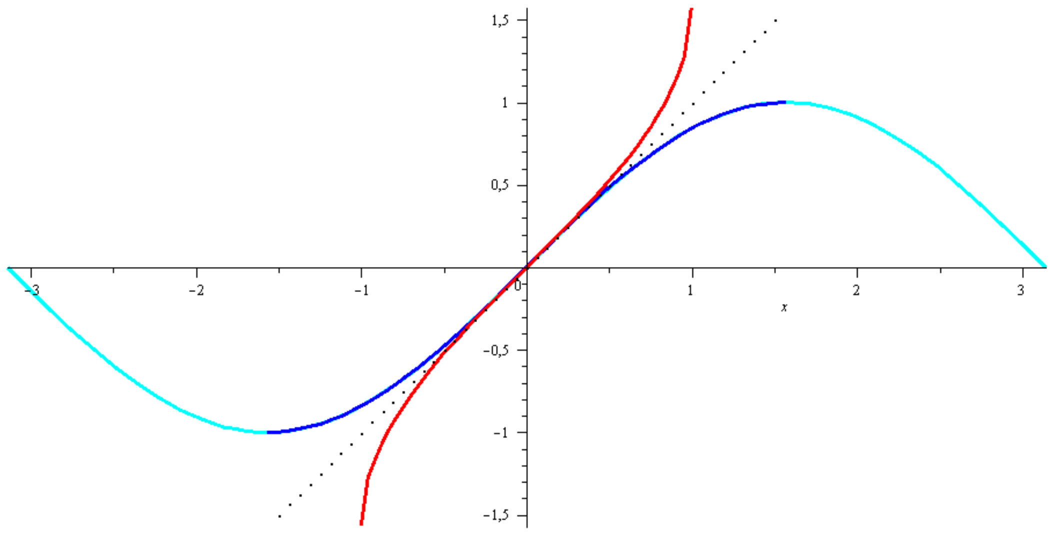



Obr. 9.14: $\operatorname{cotg} x$



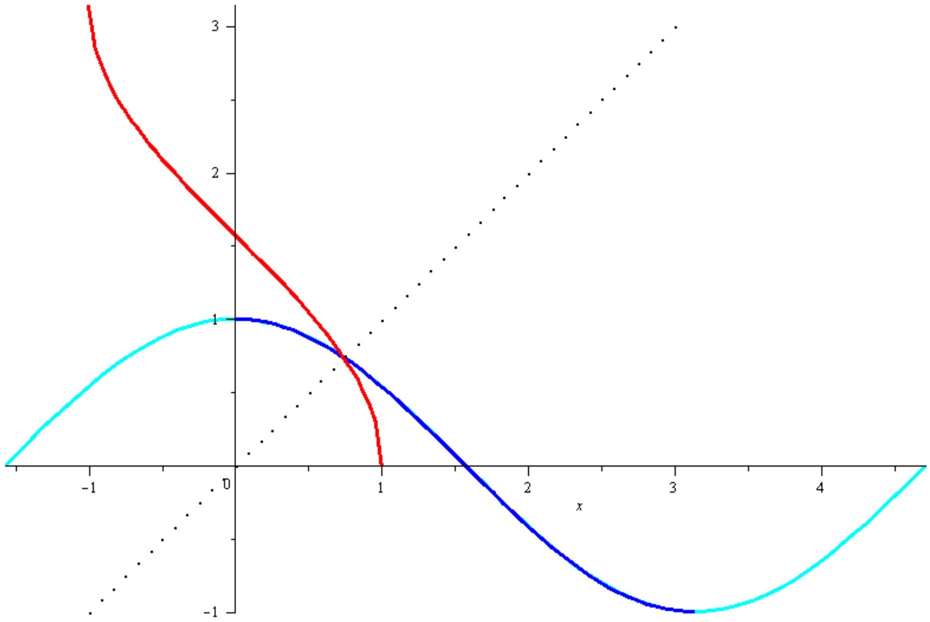

Obr. 9.15: tg $x$, cotg $x$

Inverzní funkce k funkcím goniometrickým se nazývají cyklometrické a patří sem arkussinus, arkuskosinus, arkustangens a arkuskotangens. Jejich graf a vznik z příslušné prosté části grafu goniometrické funkce je zobrazen na obr. 9.16, 9.17, 9.18 a 9.19. Zdůrazněme, že funkce arkussinus je lichá, rostoucí a $\mathrm{D}(\arcsin x) = [-1, 1], \mathrm{H}(\arcsin x) = [-\pi/2, \pi/2]$.



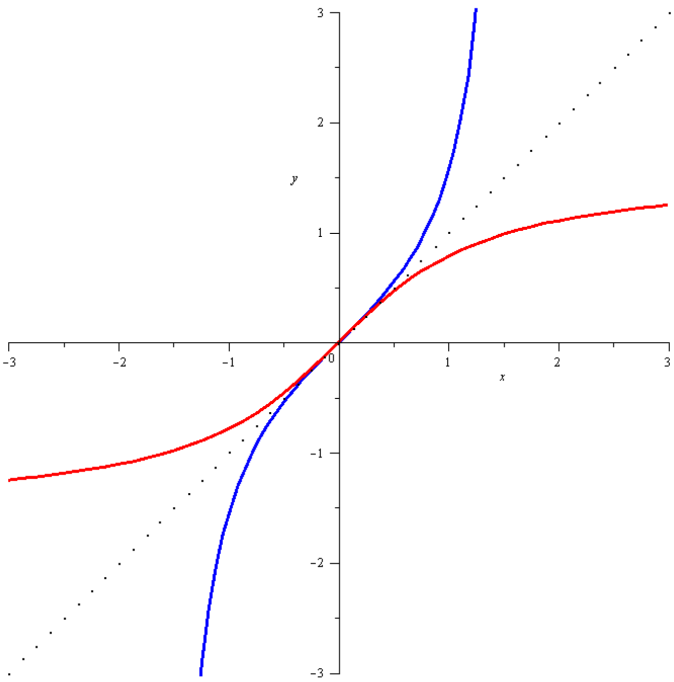

Obr. 9.16: $\sin x$, $\arcsin x$

Funkce arkuskosinus není ani lichá, ani sudá, je klesající a $\mathrm{D}(\arccos x) = [-1, 1], \mathrm{H}(\arccos x) = [0, \pi]$.



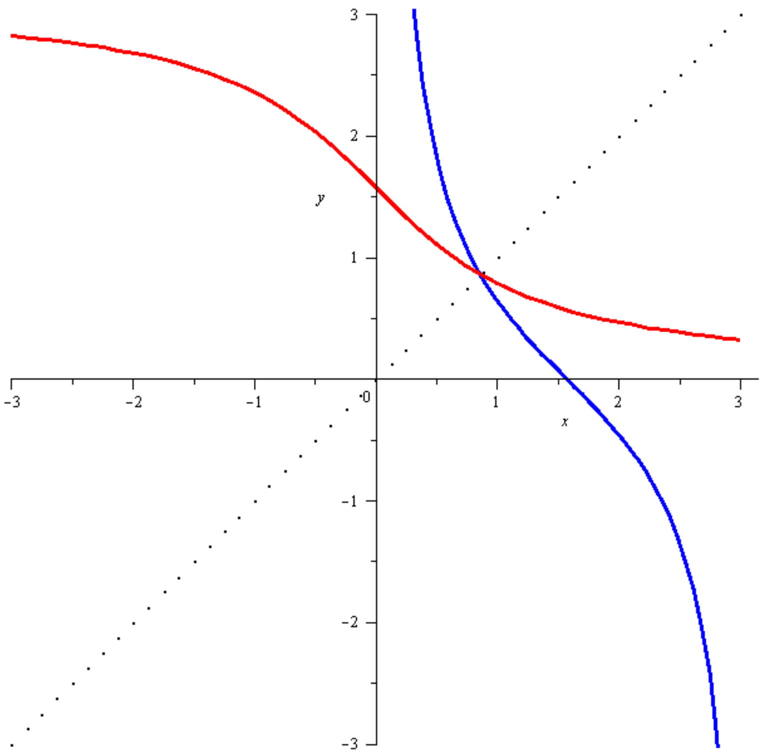

Obr. 9.17: $\cos x$, $\arccos x$

Funkce arkustangens je lichá, rostoucí a $\mathrm{D}(\operatorname{arctg} x) = \mathbb{R}, \mathrm{H}(\operatorname{arctg} x) = [-\pi/2, \pi/2]$.




Obr. 9.18: $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg} x$

Funkce arkuskotangens není ani lichá, ani sudá, je klesající a $D(\operatorname{arccotg} x) = \mathbb{R}, H(\operatorname{arccotg} x) = [0, \pi]$.




Obr. 9.19: $\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{arccotg} x$

## § 9.2 Operace s funkcemi

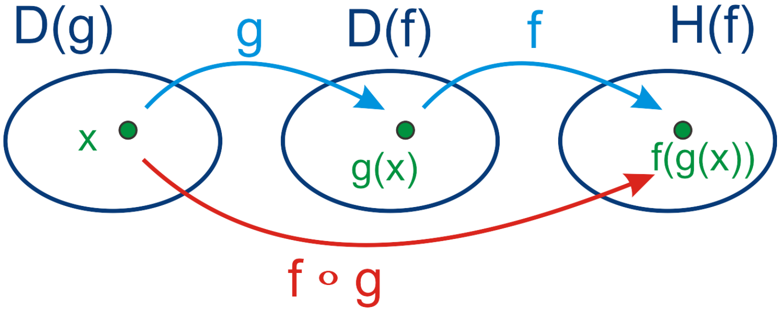
***Operace s funkcemi***

- Platí
$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x),$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$
Definiční obor těchto funkcí je průnikem definičních oborů původních funkcí, tj. $D(f \pm g) = D(f) \cap D(g) = D(f \cdot g)$.
- Platí
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$
Definiční obor nové funkce je průnikem definičních oborů funkcí $f$ a $g$ zmenšený o body, v nichž je $g(x) = 0$, tj.
$$D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap D(g) \setminus \{x : g(x) = 0\}.$$

Další operací je skládání funkcí.

**Definice 34** (Složená funkce)**.**

Nechť $u = g(x)$ je funkce s definičním oborem $D(g)$ a oborem hodnot $H(g)$. Nechť $y = f(u)$ je funkce s definičním oborem $D(f) \supseteq H(g)$.
*Složenou funkcí* $(f \circ g)(x)$ rozumíme přiřazení, které $\forall x \in D(g)$ přiřadí $y = f(u) = f\big(g(x)\big)$. Funkci $g$ nazýváme vnitřní složkou a funkci $f$ vnější složkou složené funkce.




Obr. 9.20: Složená funkce.

**Příklad 72.** • *Funkce*

$$F(x) = \sin x^2$$

*je složena z funkcí* $f(x) = \sin x$ *a* $g(x) = x^2$ *tak, že*

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big).$$

• *Funkce*

$$G(x) = \sqrt[3]{\mathrm{e}^{2x-4}}$$

*je složena z funkcí* $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = \mathrm{e}^x$, $h(x) = 2x - 4$ *tak, že*

$$G(x) = (f \circ g \circ h)(x) = f\Big(g\big(h(x)\big)\Big).$$

*Poznámka.* Při určování definičních oborů složených funkcí je vhodné postupovat zevnitř. Každý definiční obor je průnikem všech získaných podmínek. Např. je-li $F(x) = \sqrt{f(x)}$, najdeme nejprve $D(f)$, poté zjistíme, ve kterých bodech je $f(x) < 0$ a ty odstraníme, tj.

$$D(F) = D(f) \setminus \{x : f(x) < 0\}.$$

Tedy mimo definiční obory základních funkcí musíme brát v úvahu např. u funkce

- $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, že $g(x) \neq 0$,
- $F(x) = \sqrt{f(x)}$, že $f(x) \geq 0$,
- $F(x) = \log_a f(x)$, že $f(x) > 0$,
- $F(x) = \operatorname{tg} f(x)$, že $f(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$,
- $F(x) = \operatorname{cotg} f(x)$, že $f(x) \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
- $F(x) = \arcsin f(x)$, že $f(x) \in [-1, 1]$,
- $F(x) = \arccos f(x)$, že $f(x) \in [-1, 1]$.

## § 9.3 Inverzní funkce

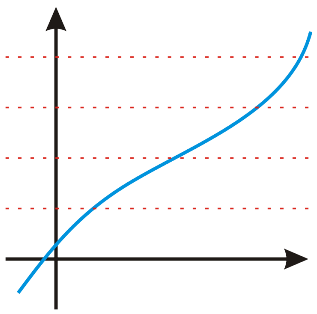
**Definice 35** (Prostá funkce)**.**

Nechť $f$ je funkce a $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že funkce $f$ je na množině $M$ *prostá*, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in M$ platí

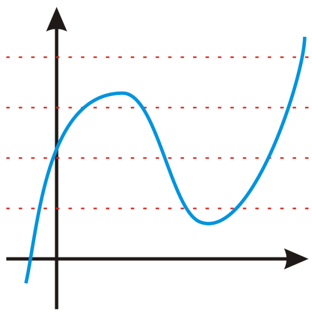
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

*Poznámka.* Platí následující tvrzení.

- Graf prosté funkce protíná všechny vodorovné přímky nejvýše jednou.



Obr. 9.21: Zobrazená funkce je prostá.

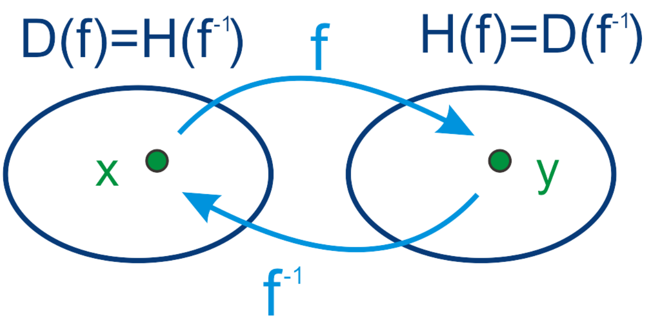


Obr. 9.22: Zobrazená funkce není prostá.

- Je-li funkce na množině $M$ ryze monotónní, pak je na ní prostá.

**Definice 36** (Inverzní funkce)**.**

Nechť $f$ je prostá funkce. Funkci $f^{-1}$, která každému $y \in H(f)$ přiřazuje právě to $x$, pro které platí $y = f(x)$, se nazývá inverzní funkcí k funkci $f$. Píšeme $x = f^{-1}(y)$.

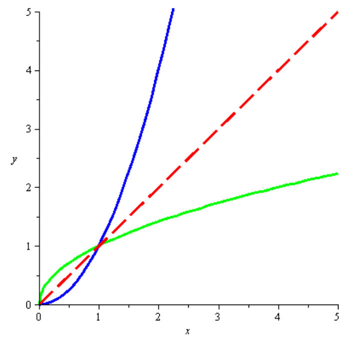



Obr. 9.23: Inverzní funkce.

***Platí***

Nechť funkce $f$ je prostá, potom platí (resp. platí pro prostou část funkce $f$):

- $D(f^{-1}) = H(f)$, $H(f^{-1}) = D(f)$,
- $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
- Grafy funkcí $f$ a $f^{-1}$ jsou symetrické podle osy I. a III. kvadrantu (přímky $y = x$).
- Je-li funkce $f$ rostoucí/klesající, je také funkce $f^{-1}$ rostoucí/klesající.




Obr. 9.24: Graf inverzní funkce.

**_Výpočet inverzní funkce_**

Iverzní funkci k funkci $f$ určíme tak, že v předpisu $y = f(x)$ zaměníme proměnné $x$ a $y$, tím dostaneme $x = f(y)$. Z této rovnice pak vyjádříme, je-li to možné, proměnnou $y$.

K elementární funkci je inverzní funkcí jiná elementární funkce:

| $f(x)$ | $f^{-1}(x)$ |
|---|---|
| $x^2 \quad (x \geq 0)$ | $\sqrt{x}$ |
| $x^2 \quad (x \leq 0)$ | $-\sqrt{x}$ |
| $x^3$ | $\sqrt[3]{x}$ |
| $\mathrm{e}^x$ | $\ln x$ |
| $a^x \quad (a \neq 1)$ | $\log_a x$ |
| $\sin x \quad (x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ | $\arcsin x$ |
| $\cos x \quad (x \in [0, \pi])$ | $\arccos x$ |
| $\mathrm{tg}\, x \quad (x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$ | $\mathrm{arctg}\, x$ |
| $\mathrm{cotg}\, x \quad (x \in (0, \pi))$ | $\mathrm{arccotg}\, x$ |

*Poznámka.* Pro všechna $x$, pro která má zápis smysl, platí

$$(f \circ f^{-1})(x) = x = (f^{-1} \circ f)(x).$$

**Příklad 73.** *Určete inverzní funkci k funkci $f$ a určete $D(f)$, $H(f)$, $D(f^{-1})$ a $H(f^{-1})$.*

a) $f(x) = \frac{3x-4}{2}$, b) $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$.

a) $f(x) = \frac{3x-4}{2}$

$$y = \frac{3x-4}{2} \quad \rightsquigarrow \quad x = \frac{3y-4}{2}$$
$$2x = 3y - 4$$
$$3y = 2x + 4$$
$$y = \frac{2x+4}{3} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{2x+4}{3}.$$

$D(f) = H(f) = D(f^{-1}) = H(f^{-1}) = \mathbb{R}.$

b) $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$

$$y = \mathrm{e}^{\sin x} \quad \rightsquigarrow \quad x = \mathrm{e}^{\sin y} \quad / \ln(\cdot)$$
$$\ln x = \sin y \quad / \arcsin(\cdot)$$
$$\arcsin \ln x = y \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \arcsin \ln x.$$

$D(f) = \mathbb{R}$, funkce $f$ je prostá pro $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = H(f^{-1})$
$D(f^{-1})$ :

- $\triangleright$ $\ln x \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x \in (0, \infty)$
- $\triangleright$ $\arcsin \ln x \quad \Rightarrow \quad \ln x \in [-1, 1]$

$$-1 \leq \ln x \leq 1 \quad / \, \mathrm{e}^{(\cdot)} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-1} \leq x \leq \mathrm{e} \quad \Rightarrow \quad x \in \left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right]$$

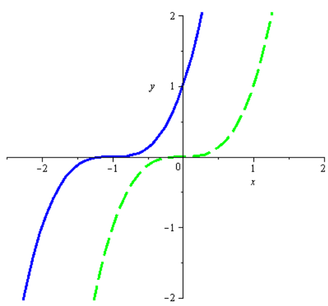
$D(f^{-1}) = (0, \infty) \cap \left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right] = \left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right]$.
Celkem tedy $H(f) = D(f^{-1}) = \left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right]$.

## § 9.4 Transformace grafu funkce

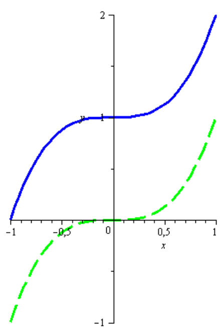
***Transformace grafu funkce***

Nechť je dána funkce $y = f(x)$ a nenulová reálná čísla $a, b$.

- Uvažujme funkci $\tilde{y} = f(x + a)$. Tato funkce má vůči původní funkci graf posunutý buď doleva (je-li $a > 0$), nebo doprava (pro $a < 0$), a to o velikost čísla $a$.
- Uvažujme funkci $\hat{y} = f(x) + b$. Tato funkce má vůči původní funkci graf posunutý buď nahoru (je-li $b > 0$), nebo dolů (pro $b < 0$), a to o velikost čísla $b$.



Obr. 9.25: $f(x) = (x + 1)^3$



Obr. 9.26: $f(x) = x^3 + 1$

## § 9.5 Příklady k procvičení

**Příklad 74.** *Načrtněte graf funkce.*

*(i)* $y = x^2$,

*(ii)* $y = -x^2$,

*(iii)* $y = (-x)^2$,

*(iv)* $y = (x+1)^2$,

*(v)* $y = x^2 + 1$,

*(vi)* $y = (1-x)^3$.

**Příklad 75.** *Načrtněte graf funkce.*

*(i)* $y = 2 - \sqrt{x}$,

*(ii)* $y = \frac{1}{3-x} - 1$,

*(iii)* $y = \ln(x-3)$,

*(iv)* $y = 2 + \mathrm{e}^{1-\mathrm{x}}$.

**Příklad 76.** *Načrtněte graf funkce.*

*(i)* $y = \sin x$,

‡*(ii)* $y = \sin(3x)$,

‡*(iii)* $y = \sin \frac{x}{5}$,

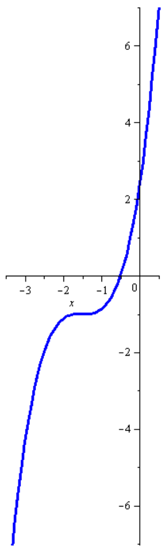
‡*(iv)* $y = 2\sin x$,

*(v)* $y = \sin(x-1)$,

*(vi)* $y = 3 + \sin x$,

‡*(vii)* $y = \operatorname{tg}(3x)$.

**Příklad 77.** *K danému grafu vyberte správný funkční předpis.*




a) $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2}) - 1$,

b) $(x + 1,5)^3 - 1$,

c) $\frac{1}{x+1,5} - 1$,

d) $-\operatorname{cotg}(x + \frac{\pi}{2}) + 1$,

e) $(x - 1,5)^3 + 1$.

**Příklad 78.** *Určete definiční obor funkce.*

*(i)* $f(x) = \frac{1}{x+2}$,

*(ii)* $f(x) = \sqrt{3-x}$,

*(iii)* $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}}$,

*(iv)* $f(x) = \frac{3}{\mathrm{e}^{1-x}}$,

*(v)* $f(x) = \frac{\ln x}{2x^2+3x-2}$,

*(vi)* $f(x) = \frac{1}{\sin x}$,

*(vii)* $f(x) = \operatorname{tg}(x-1)$,

*(viii)* $f(x) = \frac{3x}{2x-8} + \sqrt{10-x} - \ln(x+2)$.

**Příklad 79.** *Jsou dány funkce* $f(x) = x^2, g(x) = \frac{2x}{1-x}$ *a* $h(x) = \ln x$. *Určete složené funkce*

*(i)* $f \circ g$, *(ii)* $g \circ f$, *(iii)* $f \circ g \circ h$, *(iv)* $f \circ h \circ f$.

**Příklad 80.** *Určete složky dané funkce.*

*(i)* $y = \operatorname{cotg}^5 x$,

*(ii)* $y = \sqrt[3]{\sin(x^3+3)}$,

*(iii)* $y = \cos x^7$,

*(iv)* $y = \log_2 \sqrt{\operatorname{tg}(2+x)}$.

**Příklad 81.** *Funkci* $y = \sin \frac{1}{5^x}$ *lze považovat za složeninu dvou, nebo tří základních funkcí. Kterých? (Popište obě možnosti.)*

**Příklad 82.** *K dané funkci* $f$ *určete funkci inverzní a načrtněte grafy obou funkcí.*

*(i)* $f(x) = 2x + 1$,

*(ii)* $f(x) = \frac{2x^2-1}{3}$,

*(iii)* $f(x) = \log_3(x-2)$,

*(iv)* $f(x) = \frac{1}{5^x}$.

**Příklad 83.** *Popište vlastnosti cyklometrických funkcí (*$\arcsin, \arccos, \operatorname{arctg}$ *a* $\operatorname{arccotg}$*) a jejich vznik jakožto inverzí.*

**Příklad 84.** *Určete a nakreslete funkci inverzní k funkci* $f:\ y = 2x^3 - 1$.

**Příklad 85.** *Určete definiční obor dané funkce.*

*(i)* $f(x) = \ln(x^2+4x-5) + \frac{2x^2}{\sqrt{2x+6}}$,

*(ii)* $g(x) = \arcsin \frac{x+3}{2} + \sqrt{\frac{x+4}{x-2}}$.

**Příklad 86.** *Určete definiční obor funkce*

$$f:\ y = \operatorname{arccotg} \frac{x-1}{\sqrt{1-x}} + \log_{\frac{1}{3}}^{-2}(2x+21).$$

**Příklad 87.** *Načrtněte graf funkce*

$$f(x) = 2 - \arcsin(x+1).$$

**Příklad 88.** *Určete definiční obor funkce*

$$f(x) = \ln \frac{x-1}{2+x} - \arcsin \frac{x}{4}.$$

**Příklad 89.** *Určete definiční obor dané funkce.*

$$f(x) = \sqrt{1-x} + \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \ln x.$$

**Příklad 90.** *Rozhodněte, zda je daná funkce sudá, nebo lichá.*

$$f(x) = \frac{3x^2-2}{x^3}, \quad g(x) = \cos x - \sin x^2 - 2\sin^2 x,$$

$$h_1(x) = x^3 + 2x^2 - x + 4, \quad h_2(x) = \ln(x-3).$$

## § 9.6 Wolfram|Alpha

- Definiční obor funkce.

```
domain of sqrt(x+2)/(x-1)
```

- Obor hodnot funkce.

```
range of x^2-5x+3
```

- Graf funkce.

```
plot y=x^3-1 for x from -2 to 2.5

plot y=tan(x) for x from -pi to 2pi and y from -10 to 10
```

- Inverzní funkce.

```
inverse of x^5
```

- Průsečíky grafů funkcí.

```
intersections of y=3x^2+x-4 and y=2x+6
```

Kapitola

# 10 Limita funkce

## § 10.1 Okolí bodu

**Definice 37** (Okolí bodu)**.**

Libovolný otevřený interval $I \in \mathbb{R}$ obsahující bod $x_0 \in \mathbb{R}$ nazýváme *okolí bodu* $x_0$ označíme jej $\mathcal{O}(x_0)$.

***Speciální typy okolí bodu***

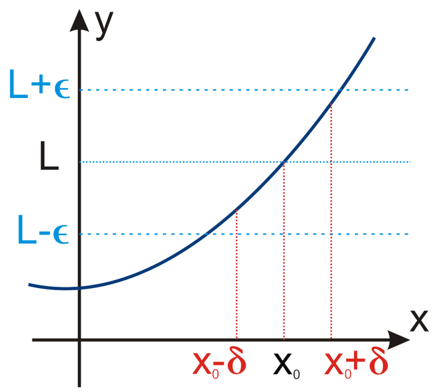
- $\delta$-okolí bodu $x_0$
$$\mathcal{O}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$
- Prstencové (ryzí) $\delta$-okolí bodu $x_0$
$$\widehat{\mathcal{O}}_\delta(x_0) = \mathcal{O}_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta).$$
- Levé a pravé $\delta$-okolí bodu $x_0$
$$\mathcal{O}_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0], \qquad \mathcal{O}_\delta^+(x_0) = [x_0, x_0 + \delta).$$
- Levé a pravé prstencové $\delta$-okolí bodu $x_0$
$$\widehat{\mathcal{O}}_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0), \qquad \widehat{\mathcal{O}}_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta).$$

## § 10.2 Limita funkce

**Definice 38** (Limita funkce)**.**

Řekneme, že funkce $f$ má v bodě $x_0$ *limitu* rovnu číslu $L$, jestliže pro $\forall \varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $\forall x \in \widehat{\mathcal{O}}_\delta(x_0)$ platí $f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L)$. Píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \quad \text{popř.} \quad f(x) \xrightarrow{x \to x_0} L.$$




Obr. 10.1: Limita funkce.

Nepřesně, ale ilustrativně:

*"Je-li $x$ blízko $x_0$, pak je $f(x)$ blízko $L$."*

**Definice 39** (Jednostranné limity)**.**

Použijeme-li v definici limity $\widehat{\mathcal{O}}^+_\delta(x_0)$ místo $\widehat{\mathcal{O}}_\delta(x_0)$, získáme definici *limity zprava*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

Podobně, použijeme-li v definici limity $\widehat{\mathcal{O}}^-_\delta(x_0)$ místo $\widehat{\mathcal{O}}_\delta(x_0)$, získáme definici *limity zleva*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$

**Věta 19** (Jednoznačnost)**.**

Funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu / limitu zprava / limitu zleva.

**Definice 40** (Rozšířená množina reálných čísel).

*Rozšířenou množinou reálných čísel* $\mathbb{R}^*$ rozumíme množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ rozšířenou o body $-\infty$ a $+\infty$, tj

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Body $\pm\infty$ nazýváme nevlastní body, zatímco body množiny $\mathbb{R}$ nazýváme vlastní body.

Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

- $a + \infty = \infty$,
- $a - \infty = -\infty$,
- $\infty + \infty = \infty$,
- $-\infty - \infty = -\infty$,
- $\infty \cdot \infty = \infty$,
- $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$,
- $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$,
- $|\pm\infty| = \infty$,
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$.

- Je-li $a > 0$, pak $a \cdot \infty = \infty, a \cdot (-\infty) = -\infty$.
- Je-li $a < 0$, pak $a \cdot \infty = -\infty, a \cdot (-\infty) = \infty$.

*Poznámka.* Nejsou definovány výrazy

$$\infty - \infty, \quad \pm\infty \cdot 0, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Tyto výrazy nazýváme *neurčité výrazy*.
Samozřejmě není definováno dělení nulou.

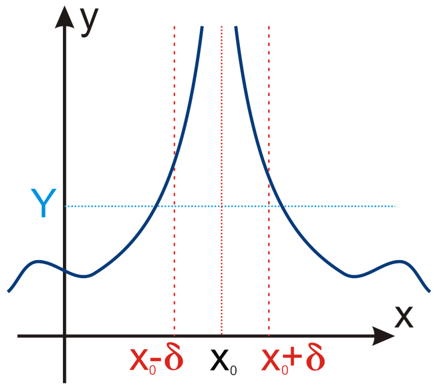
**Definice 41** (Okolí nevlastního bodu).

Okolím $\mathcal{O}(\infty)$ bodu $\infty$ rozumíme libovolný interval tvaru $(a, \infty), a \in \mathbb{R}$, a podobně okolím bodu $-\infty$ interval tvaru $(-\infty, a)$. Ryzím okolím nevlastních bodů rozumíme totéž, co okolím těchto bodů.

Použitím okolí nevlastních bodů v definici limity získáme definici tzv. *nevlastní* limity a limity *v nevlastním bodě*. Definice limity se pak pro tyto speciální případy zjednoduší.

**Definice 42** (Nevlastní limita).

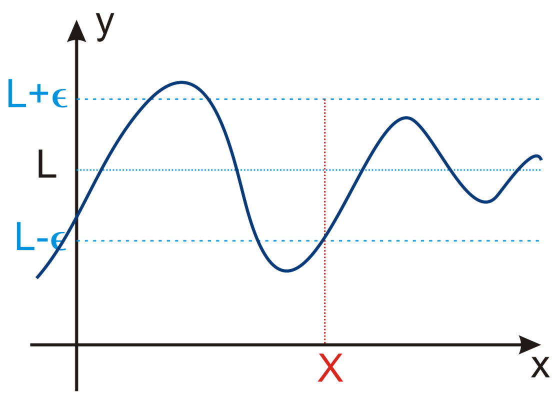
Řekneme, že funkce $f$ má v bodě $x_0$ *nevlastní limitu* $+\infty \quad (-\infty)$, jestliže pro $\forall Y > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $\forall x \in \widehat{\mathcal{O}}_\delta(x_0)$ platí $f(x) > Y \quad (f(x) < -Y)$.




Obr. 10.2: Nevlastní limita.

**Definice 43** (Limita v nevlastním bodě)**.**

Řekneme, že funkce $f$ má limitu $L$ v nevlastním bodě $+\infty \quad (-\infty)$, jestliže pro $\forall \varepsilon > 0$ existuje $X > 0$ takové, že pro $\forall x > X \quad (\forall x < -X)$ platí $f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L)$.




Obr. 10.3: Limita v nevlastním bodě.

***Použité pojmy***

Limitu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

nazýváme

- *vlastní limita ve vlastním bodě*, jestliže $x_0, L \in \mathbb{R}$,
- *nevlastní limita ve vlastním bodě*, jestliže $x_0 \in \mathbb{R}, L \in \{\pm\infty\}$,
- *vlastní limita v nevlastním bodě*, jestliže $x_0 \in \{\pm\infty\}, L \in \mathbb{R}$,
- *nevlastní limita v nevlastním bodě*, jestliže $x_0, L \in \{\pm\infty\}$.

**Věta 20** (Existence limity)**.**

Funkce $f$ má ve vlastním bodě $x_0$ limitu právě tehdy, když má v tomto bodě obě jednostranné limity a ty si jsou rovny, tj.

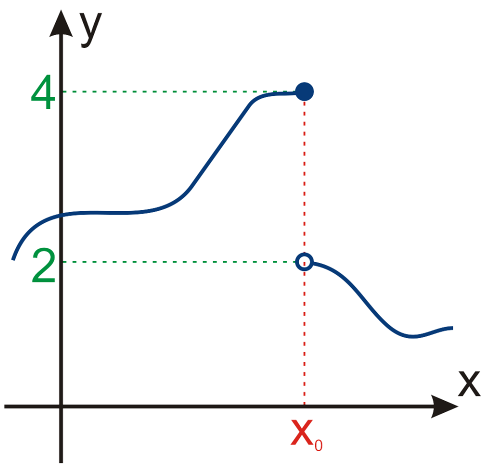
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

*Poznámka.* Limita neexistuje, jestliže

▷ neexistuje některá (nebo obě) jednostranné limity,

▷ jednostranné limity jsou různé.

Toho lze výhodně využít při důkazu neexistence limity.

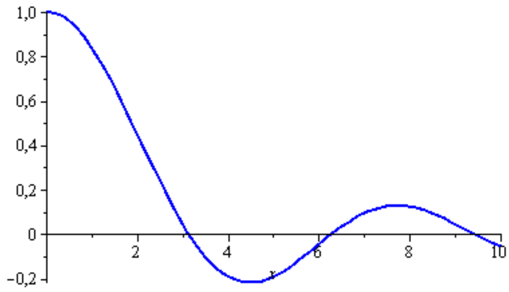



Obr. 10.4: Limita v $x_0$ neexistuje.

Není-li možné číslo do funkce dosadit jinak než “limitně”, můžeme představu o limitním chování funkce získat i empiricky a to dosazováním blízkých čísel. Podívejme se na chování funkce $\frac{\sin x}{x}$ pro $x \to 0^+$.

| $x$ | $1$ | $0,1$ | $0,01$ | $0,001$ | $0,0001$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\sin x}{x}$ | $0,841470985$ | $0,998334167$ | $0,999983333$ | $0,999999833$ | $0,999999998$ |

Z tabulky vidíme, že hodnoty se blíží jedničce. A skutečně $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

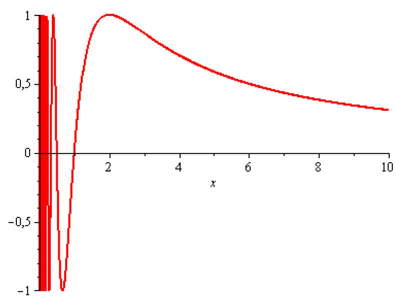



Obr. 10.5: Graf funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

**POZOR** – nejde o neprůstřelnou metodu:

| $x$ | $1$ | $0,1$ | $0,01$ | $0,001$ | $0,0001$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\frac{\pi}{x}$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\cdots$ |

Přitom $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\frac{\pi}{x}$ neexistuje.




Obr. 10.6: Graf funkce $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$.

(Zkuste dosazovat *náhodná* čísla blížící se k nule zprava.
Např. $\sin\frac{\pi}{0{,}003} \doteq -0,8660253055$.)

## § 10.3 Spojitost funkce

**Definice 44** (Spojitost).

- Řekneme, že funkce $f$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže
$$x_0 \in D(f) \quad \text{a} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$
- Řekneme, že funkce $f$ je spojitá zleva v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže
$$x_0 \in D(f) \quad \text{a} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$
- Řekneme, že funkce $f$ je spojitá zprava v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže
$$x_0 \in D(f) \quad \text{a} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

**Definice 45** (Spojitost na intervalu).

Řekneme, že funkce je spojitá na intervalu $I$, je-li spojitá v každém jeho vnitřním bodě a v krajních bodech (pokud patří do $I$) je spojitá zleva, resp. zprava.

**Definice 46** (Body nespojitosti).

Body, ve kterých není funkce $f$ spojitá, nazýváme *body nespojistosti*.

*Poznámka.* Elementární funkce jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

**Věta 21** (Weierstrassova věta).

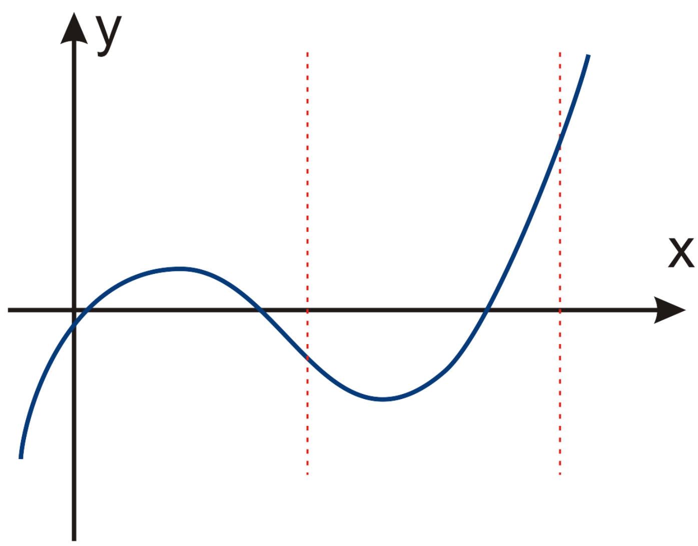
Nechť je funkce $f$ spojitá na uzavřeném intervalu $I$. Pak je $f$ na $I$ ohraničená a nabývá zde své největší a nejmenší hodnoty.

**Věta 22** (První Bolzanova věta)**.**

Nechť je funkce $f$ spojitá na uzavřeném intervalu $I = [a, b]$ a nechť platí $f(a) \cdot f(b) < 0$. Pak existuje alespoň jedno číslo $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.

**Věta 23** (Druhá Bolzanova věta)**.**

Nechť je funkce $f$ spojitá na uzavřeném intervalu $I$. Pak $f$ nabývá všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.




Obr. 10.7: Funkce spojitá na uzavřeném intervalu.

**Věta 24** (Pravidla pro počítání s limitami)**.**

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $k \in \mathbb{R}$ a nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jestliže mají funkce $f$ a $g$ v bodě $a$ limitu, pak platí

- $\lim\limits_{x\to a} k = k$,
- $\lim\limits_{x\to a} \big[f(x) \pm g(x)\big] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$,
- $\lim\limits_{x\to a} \big[f(x) \cdot g(x)\big] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$,
- $\lim\limits_{x\to a} \big[k \cdot f(x)\big] = k \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$,
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, pro $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

**Příklad 91.**

- $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 + 3x) = 4 + 3 \cdot 2 = 10$,
- $\lim\limits_{x\to\infty} (\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$,
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} \cos x = -\infty \cdot 1 = -\infty$,
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x\cdot \mathrm{e}^x} = \frac{1}{\infty\cdot\infty} = 0$,
- $\lim\limits_{x\to 0^+} (\frac{1}{x} + \ln x) = \infty - \infty =$ *neurčitý výraz.*

**Věta 25** (Limita složené funkce)**.**

Je-li funkce $f$ spojitá, pak platí

$$\lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = f\big(\lim_{x\to x_0} g(x)\big).$$

*Poznámka.* Při výpočtech limit vždy nejprve dosadíme $x = x_0$.

**Příklad 92.**

- $\lim_{x\to 0^+} \ln \frac{1}{x} = \big\|\ln \infty\big\| = \infty$,
- $\lim_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} \mathrm{e}^{-x} = \big\|\operatorname{arctg} \mathrm{e}^{+\infty} = \operatorname{arctg} \infty\big\| = \frac{\pi}{2}$,
- $\lim_{x\to 0^+} \ln \sin x = \big\|\ln 0^+\big\| = -\infty$,
- $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sin x} = \big\|\frac{1}{\sin 0^-} = \frac{1}{0^-}\big\| = -\infty$,
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x} = \big\|\frac{1}{\sin 0^+} = \frac{1}{0^+}\big\| = \infty$.

## § 10.4 Výpočet limit

**Věta 26.**

Jestliže pro všechna $x \in \widehat{O}_\delta(x_0)$ platí $f(x) = g(x)$ a existuje limita $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$, pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L.$$

Odtud plyne, že funkci lze při výpočtu limity vhodně upravovat.

**Příklad 93.**

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \left\| \tfrac{0}{0} \right\| = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+1) = 3.$$

Následující věta již byla použita v některých příkladech.

**Věta 27.**

Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = k \neq 0$ a $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Existuje-li prstencové okolí bodu $x_0$, takové, že pro každé $x$ z tohoto okolí platí

- $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, pak $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$,
- $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, pak $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

→ Věta platí i pro jednostranné okolí a limity.

→ Při výpočtu limity typu $\left\| \frac{k}{0} \right\|$, kde $k \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$ je potřeba určit obě jednostranné limity a zjisit, zda jsou si rovny. Pokud ne, limita neexistuje.[1]

**Příklad 94.**

- *Limita*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} = \left\| \tfrac{1}{0} \right\|$$

*neexistuje, neboť*

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1} = \left\| \tfrac{1}{0^+} \right\| = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1} = \left\| \tfrac{1}{0^-} \right\| = -\infty.$$

- *Limita*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{(x-1)^2} = \left\| \tfrac{1}{0} \right\| = +\infty,$$

*neboť*

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{(x-1)^2} = \left\| \tfrac{1}{0^+} \right\| = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{(x-1)^2} = \left\| \tfrac{1}{0^+} \right\| = +\infty.$$

[1] Matematika učí: nepřehlížejte nuly. (Gabriel Laub)

*Poznámka.* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\| \frac{k}{\pm\infty}, k \in \mathbb{R} \right\| = 0.$

**Věta 28** (Limita polynomu a rac. lom. funkce v $\pm\infty$)**.**

Platí

- $$\lim_{x\to\pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n,$$
- $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

**Příklad 95.**

- $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x^5 + 3x^4 - 2x + 8) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-2x^5)$
$= \left\| -2 \cdot (-\infty) \right\| = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2-1}{x^4-2x+2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x^4} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x} = \left\| \frac{2}{\infty} \right\| = 0$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2x-1}{-x^2-8x+5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{-x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} (-3) = -3$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4+3x^2+2x-1}{-4x^2+3x+5} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4}{-4x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{-4} = \frac{1}{-4} \cdot \lim\limits_{x\to\infty} x^2 = -\infty.$

*Poznámka.* Neurčité výrazy typu $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ lze řešit pomocí derivací, použitím tzv. L'Hospitalova pravidla.

## § 10.5 Příklady k procvičení

**Příklad 96.** *Určete limitu z grafu funkce.*

*(i)* $\lim\limits_{x\to 5} 3x + 1,$

*(ii)* $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x,$

*(iii)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2},$

*(iv)* $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x},$

*(v)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x},$

*(vi)* $\lim\limits_{x\to -3^+} \ln(x+3).$

**Příklad 97.** *Určete limitu.*

*(i)* $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sin x}{x}$,

*(ii)* $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sin x}{x}$,

*(iii)* $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3-2x^2+3+\log_3(1-x)}{x-\sin\frac{\pi x}{4}+2}$,

*(iv)* $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x^2-5x+5}{x^2-x-2}$,

*(v)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x-3}{\sin x}$,

*(vi)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-1}{\cos x-1}$.

**Příklad 98.** *Určete limitu.*

*(i)* $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^3-3x^2+2}{2x^3-3x-4}$,

*(ii)* $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2^x+x^4+1}{3\cdot 2^x+x^2-1}$,

*(iii)* $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^3+2x-2}{4x^3+4x^2+x+3}$,

*(iv)* $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{7x^2-2x+12}{x^3-4x^2+2}$,

*(v)* $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{-2x^7-x+1}{x^2+1}$,

‡*(vi)* $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2\log_6 x-3^{x+1}+15x^6}{3\log_6 x+3^x-5x^6}$.

**Příklad 99.** *Z grafů základních funkcí a nebo výpočtem určete limitu.*

*(i)* $\lim\limits_{x\to \infty} (5^{\frac{1}{x}}+2)$,

*(ii)* $\lim\limits_{x\to 2\pi^-} \mathrm{e}^{\operatorname{cotg} x}$.

## § 10.6 Wolfram|Alpha

- Výpočet limity.

```
limit (x+3)/(2-x^2) as x->1

limit 3^(1/x)-7 as x->-infinity
```

- Jednostranná limita.

```
limit e^(cot(x)) as x->2pi from left

lim_(x->(2 pi)^-) e^(cot(x))
```

Kapitola

# 11 Derivace

## § 11.1 Definice a geometrický význam derivace

**Definice 47** (Derivace v bodě)**.**

Buď $f$ funkce a $x_0 \in D(f)$. Existuje-li

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad \left(= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$$

nazýváme tuto limitu *derivace* funkce $f$ v bodě $x_0$ a značíme ji $f'(x_0)$. Je-li tato limita vlastní, nazýváme ji *vlastní derivace*, je-li nevlastní, nazýváme ji *nevlastní derivace*. Jestliže tato limita neexistuje řekneme, že funkce $f$ v bodě $x_0$ derivaci nemá.

***Geometrický význam derivace***

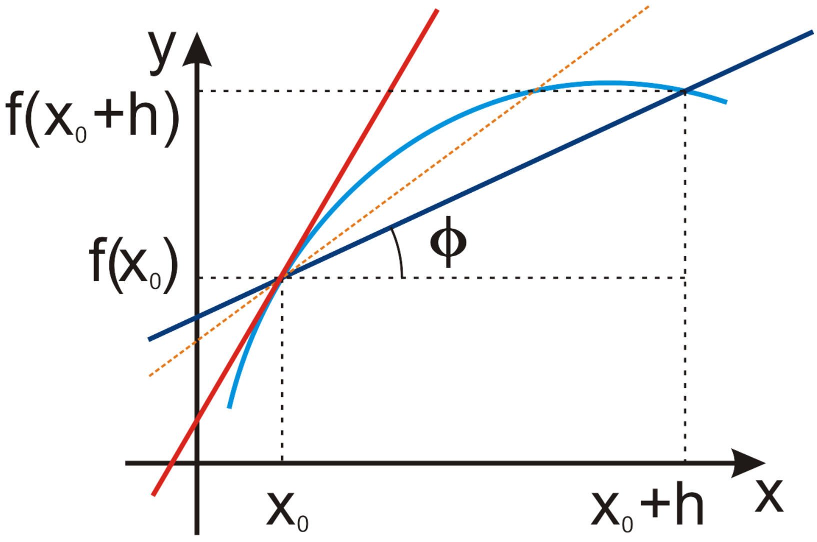
Sečna grafu funkce $f$ procházející body $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_0+h, f(x_0+h)]$ má směrnici

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Jestliže se s bodem $x_0+h$ blížíme k bodu $x_0$ (tj. provádíme limitní přechod $h \to 0$), přejde tato sečna v tečnu v bodě $[x_0, f(x_0)]$. Směrnice tečny ke grafu funkce $f$ v bodě $x_0$ je tedy

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

což je přesně derivace funkce $f$ v bodě $x_0$.

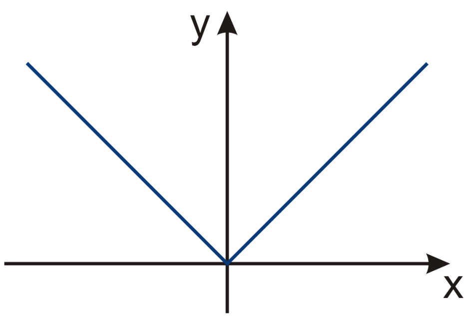



Obr. 11.1: Geometrický význam derivace.

**Věta 29.**

Má-li funkce $f$ v bodě $x_0$ derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.

*Poznámka.* Obrácená věta neplatí. Např. funkce $f(x) = |x|$ je spojitá na celém $\mathbb{R}$, ale v $x_0 = 0$ nemá derivaci.




Obr. 11.2: Graf funkce $f(x) = |x|$.

**Definice 48** (Derivace na intervalu)**.**

Nechť má funkce $f$ derivaci v každém bodě otevřeného intervalu $I$. Předpisem, který každému bodu $x$ z intervalu $I$ přiřadí derivaci funkce $f$ v bodě $x$, je definována funkce, kterou nazýváme *derivace* funkce $f$ na intervalu $I$ a označujeme ji $f'$.

*Poznámka.*

- Derivaci funkce $y = f(x)$ se mimo $f'$ také značívá $y'$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
- Výraz $\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x$ nazýváme diferenciál funkce $f$ v bodě $x$.
- Funkce $f$ má v bodě $x_0$ diferenciál (je diferencovatelná v bodě $x_0$) $\Leftrightarrow$ existuje vlastní derivace $f'(x_0)$.

## § 11.2 Pravidla a vzorce[1]

***Pravidla***

Nechť $f$ a $g$ jsou funkce, $c \in \mathbb{R}$.

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
- $(c \cdot f)' = c \cdot f'$,
- $(f \cdot g)' = f'g + fg'$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

***Vzorce***

Nechť $a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $\alpha \neq 0$, $b \neq 1$.

- $(c)' = 0$,
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$,
- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$,
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$,
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,
- $(\log_b x)' = \frac{1}{x \cdot \ln b}$,
- $(\sin x)' = \cos x$,
- $(\cos x)' = -\sin x$.
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$,
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

[1] Pro derivování je potřeba jen slabá mysl a silná pravačka. (Ron Getoor)

**Věta 30.**

Pro složenou funkci platí

$$(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

kde existence derivace vlevo (a uprostřed) plyne z existence derivací vpravo.

*Poznámka.*

- Výraz $f'(g(x))$ znamená derivaci funkce $f$ vypočtenou v bodě $g(x)$.
- Při derivování složené funkce je vhodné začít od vnější složky a pokračovat dovnitř (jako loupání cibule), tj.

$$(f \circ g \circ h)'(x) = [f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

**Definice 49** (Derivace vyšších řádů)**.**

Nechť $f$ je funkce a $f'$ její derivace. Existuje-li derivace $(f')'$ funkce $f'$, nazýváme ji *druhá derivace* funkce $f$ a značíme ji $f''$.
Obecně $n$-tou derivací, $n \in \mathbb{N}$, funkce $f$ rozumíme funkci $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

*Poznámka.*

- Pro derivace vyšších řádů budeme používat značení

$$f', f'', f''', f^{(4)}, f^{(5)}, \ldots, f^{(n)}.$$

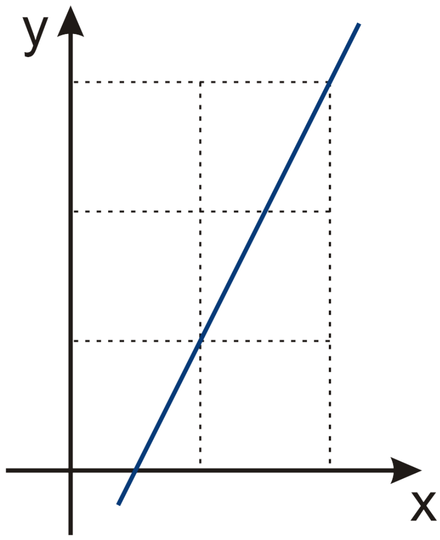
- V ostatních typech značení se $n$-tá derivace píše jako

$$y^{(n)}, \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}.$$

## § 11.3 Fyzikální význam

***Fyzikální význam derivace***

- Derivace $f'(x_0)$ vyjadřuje okamžitou rychlost změny funkční hodnoty funkce $f$ v bodě $x_0$. Tj. je-li $f'(x_0) = c \in \mathbb{R}$, potom na jednu jednotku změny hodnoty nezávisle proměnné $x$ připadá $c$ jednotek změny závisle proměnné $y$.
- Zejména z toho plyne, že je-li $c > 0$, pak s rostoucím $x$ roste i $y$, a je-li $c < 0$, pak s rostoucím $x$ $y$ klesá.




Obr. 11.3: Rychlost změny.

Snadno můžeme pomocí derivací odvodit zákony klasické mechaniky:

- Rychlost je změna polohy v čase $v = \frac{s}{t}$. Potom okamžitá rychlost v čase $t$ je
$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$
- Zrychlení je změna rychlosti v čase, tedy podobně obdržíme
$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}.$$
- Hybnost $p$ je rovna rychlosti na jednotku hmotnosti, tedy $p = mv$.
- Síla je derivací hybnosti dle času
$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} v + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = ma.$$

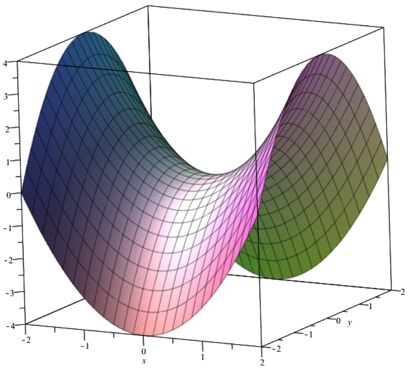
Tím jsme odvodili 2. Newtonův pohybový zákon ($a = \frac{F}{m}$):

***Zákon síly***

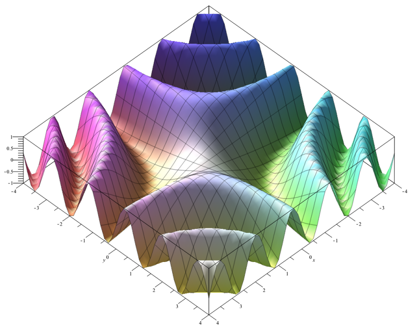
*Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundam lineam rectam qua vis illa imprimitur.*
*(= Jestliže na těleso působí síla, pak se těleso pohybuje se zrychlením, které je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa.)*

## § 11.4 Parciální derivace - stručný návod

Uvažujeme-li funkce více proměnných, tedy $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, je nutné zvolit ve kterém směru nás zajímá rychlost růstu. Např. funkce dvou proměnných $f(x, y) = z$ má dva vstupy (dvojice argumentů $x, y$) a jeden výstup (funkční hodnota $z$). Jejím definičním oborem je tedy část roviny a graf je „plachta“ vznášející se nad ním (podobně jako u funkce jedné proměnné je definiční obor část přímky a graf funkce je křivka vznášející se nad ním).



Obr. 11.4: Funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$.



Obr. 11.5: Funkce $f(x, y) = \sin(xy)$.

Derivaci ve směru libovolné souřadné osy získáme jednoduše derivováním předpisu funkce s tím, že všechny ostatní proměnné považujeme za konstanty. Mluvíme potom *parciální derivaci* a značíme např. pro funkci dvou proměnných $f(x, y)$ její derivaci podle $x$ jako

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f'_x(x, y) = f_x(x, y).$$

Geometricky se jedná o směrnici tečny pritisknuté na graf dané funkce v bodě $[x, y]$ tak, že její projekce do roviny $xy$ je rovnoběžná s osou $x$ (rychlost růstu ve směru osy $x$).

Např. pro $f(x, y) = x^2 - y^2$ je $f_x = 2x, f_y = -2y$.

*Poznámka.* Derivace vyšších řádů zavádíme tak, že uvažujeme o parciální derivaci jako o funkci, kterou derivujeme. (Samozřejmě tato funkce musí existovat.)

U funkce dvou proměnných $f(x, y)$ pak mluvíme např. o parciálních derivacích druhého řádu podle $x$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f_x)_x = f_{xx},$$

nebo o smíšených derivacích $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = (f_x)_y$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} = (f_y)_x$.

*Poznámka.* Pokud jsou smíšené parciální derivace spojité, pak platí tzv. Schwarzova věta, která říká, že je jedno v jakém pořadí derivujeme, záleží pouze na počtu derivací dle příslušných proměnných. Tedy např. pro $f(x, y)$ je

$$f_{xy} = f_{yx}, \qquad f_{xyxyx} = f_{xxxyy}.$$

*Poznámka.*

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = f_x(x,y) = f'_x(x,y)$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = f_y(x,y) = f'_y(x,y)$

**Příklad 100.**

$$f(x,y) = \mathrm{e}^x \cdot y^2 \cdot \sin(xy)$$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y^2(\mathrm{e}^x \sin xy + \mathrm{e}^x \cos xy \cdot y) = y^2\,\mathrm{e}^x(\sin xy + y\cos xy)$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \mathrm{e}^x(2y \cdot \sin xy + y^2 \cdot \cos xy \cdot x) = \mathrm{e}^x\, y(2\sin xy + xy\cos xy)$

*Poznámka* (Geometrický význam parciální derivace). Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ je směrnice křivky, která vznikne řezem grafu funkce rovinou $y = y^*$. V $n$-rozměrném prostoru „řežeme“ nadrovinou.

*Poznámka.* Pro funkce jedné proměnné plyne z existence derivace řada pěkných vlastností, např. spojitost, diferencovatelnost (lze sestrojit tečnu). Pro funkce více proměnných z existence parciálních derivací téměř nic pěkného neplyne, zejména z existence parciální derivace neplyne spojitost.

## § 11.5 Příklady k procvičení

**Příklad 101.** *Určete derivaci následujících funkcí.*

*(i)* $f(x) = 0$,

*(ii)* $f(x) = -18$,

*(iii)* $f(x) = -2x^3 + x^2 - 4x + 3$,

*(iv)* $f(x) = \sqrt{x} - \frac{2}{5x^2} + 6\sqrt[5]{x^3}$,

*(v)* $f(x) = \frac{5\sqrt{x}+7x^2-3}{2x}$,

*(vi)* $f(x) = \frac{x+8}{3x^2-1}$,

*(vii)* $f(x) = 2\sin x + \operatorname{cotg} x$,

*(viii)* $f(x) = x\operatorname{tg} x$.

**Příklad 102.** *Určete derivaci funkce $f$ v bodě $x_0$.*

*(i)* $f(x) = 3x^2 + 2x - 8,\ x_0 = -1$,

*(ii)* $f(x) = \ln(\operatorname{tg} x),\ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

**Příklad 103.** *Určete funkční hodnotu a hodnotu první a druhé derivaci funkce $f$ v bodě $x_0$.*

*(i)* $f(x) = \sqrt{3x^4+1},\ x_0 = -1$,

*(ii)* $f(x) = x\sin(2x),\ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

**Příklad 104.** *Zderivujte a upravte.*

*(i)* $f(x) = x^2 e^x \sin x$,

*(ii)* $f(x) = x^3 6^x$,

*(iii)* $f(x) = \sqrt{x^2-1}$,

*(iv)* $f(x) = \frac{1}{\ln x}$,

*(v)* $f(x) = \frac{1-x}{x^2+1}$,

*(vi)* $f(x) = \operatorname{arccotg}(2x)$.

**Příklad 105.** *Zderivujte a upravte.*

*(i)* $f(x) = 3x^2e^x(\sin x - 3\ln x)$,

*(ii)* $f(x) = (2x+6)4^x$,

*(iii)* $f(x) = \sqrt{3x^3 - 2x^2 + 5x - 1}$,

*(iv)* $f(x) = \frac{7}{\ln(x^2+1)}$,

*(v)* $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x^2+1}}$,

*(vi)* $f(x) = \cos^2 x^3$,

*(vii)* $f(x) = x\sin^2(2x)$,

*(viii)* $f(x) = \frac{-2}{\ln\cos x}$,

*(ix)* $f(x) = 7^{2x^3+x-9}$,

*(x)* $f(x) = \operatorname{arccotg}\frac{2x}{x^2-1}$.

**Příklad 106.** *Zderivujte a upravte.*

*(i)* $f(x) = x^5 + 5^x$,

‡*(ii)* $f(x) = x^x$,

‡*(iii)* $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$,

‡*(iv)* $f(x) = (\ln x)^{\operatorname{tg} x}$.

**Příklad 107.** *Zderivujte a upravte. (Nenechte se odradit tím, jak hrozně vypadá zadání. Derivování je čistě mechanická záležitost a stačí se v tom "jen" neztratit.)*

*(i)* $f(x) = 5x^5\sqrt[5]{5^x}$,

*(ii)* $f(x) = \ln^2\cos^3 x^5$,

*(iii)* $f(x) = \arccos\log_{\frac{2}{3}} x^2$,

*(iv)* $f(x) = \ln\ln(x-3) + \arcsin\frac{x-5}{2}$,

*(v)* $f(x) = \frac{1}{\ln(\sin^2 x)}$,

*(vi)* $f(x) = \sin x^2 \sin^2 x$.

**Příklad 108.** *Zderivujte:*

$$f(x) = 5x^3 - 2\cos x + \frac{3}{4x^2}, \quad g(x) = \frac{x^4}{\ln x}, \quad h(x) = \sqrt[3]{\sin(2x)}.$$

**Příklad 109.** *Určete hodnotu 3. derivace funkce* $f(x) = 5x^5 + 4x^3 - x^2 + 1$ *v bodě* $x_0 = -2$.

**Příklad 110.** *Najděte všechny první a druhé parciální derivace funkce*

$$f(x) = 3xy^4 - 5x^6 + y^2 - 18.$$

**Příklad 111.** *Najděte obě první parciální derivace funkce*

$$f(x) = \sin\frac{2x}{y^3}.$$

## § 11.6 Wolfram|Alpha

- Výpočet derivace.

```
derivative of cos(2x^3)(5x-1)
```

- Derivace vyššího řádu.

```
second derivative of sqrt(ln(x))
```

```
third derivative of ln(x^(1/3))
```

```
4th derivative of ln(x^(1/3))
```

```
5th derivative of sin(2x)
```

```
d^5/dx^5(sin(2 x))
```

- Hodnota derivace v daném bodě.

```
7th derivative of sqrt(x) where x=1
```

Kapitola

# 12 Použití derivací

## § 12.1 L'Hospitalovo pravidlo

**Věta 31** (L'Hospitalovo pravidlo)**.**

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^*$ a nechť funkce $f$ a $g$ jsou definované v nějakém ryzím okolí bodu $\alpha$, mají zde derivaci a $g'(x) \neq 0$. Nechť dále platí buď

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0,$$

nebo

$$\lim_{x\to\alpha} |g(x)| = \infty.$$

Pak platí

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pokud limita na pravé straně existuje. Stejné tvrzení platí i pro obě jednostranné limity.

*Poznámka.*

- L'Hospitalovo pravidlo můžeme použít opakovaně.
- Lze ho použít přímo na limity typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$.
- Vhodnou úpravou lze převést neurčité výrazy typu $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $1^\infty$, $0^\infty$ a $\infty^0$ na jeden z typů $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

***Pozor!***

Při použití L'Hospitalova pravidla nederivujeme výraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ jako podíl, ale derivujeme zvlášť funkci v čitateli a zvlášť funkci ve jmenovateli.

## § 12.2 Tečna a normála ke grafu funkce

**Definice 50.**

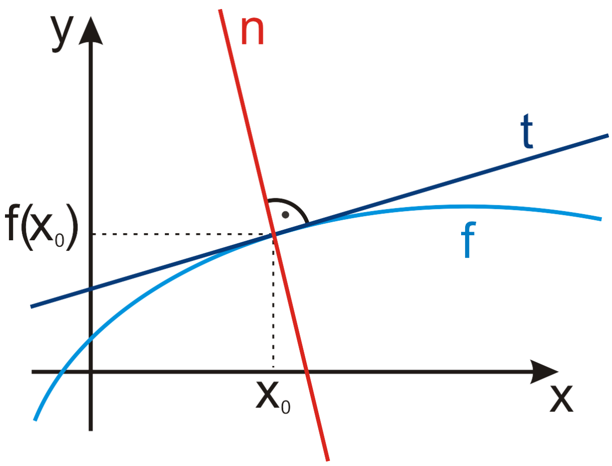
Nechť je $f(x)$ funkce spojitá a má derivaci v bodě $x_0 \in D(f)$. Potom přímku

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

nazýváme *tečna* ke grafu funkce $f$ v bodě $x_0$ a přímku

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

nazýváme *normála* ke grafu funkce $f$ v bodě $x_0$ (v případě, že $f'(x_0) \neq 0$).




Obr. 12.1: Tečna a normála.

## § 12.3 Příklady k procvičení

**Příklad 112.** *Určete limity.*

*(i)* $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+x^2+4}{x^4+3x^3+8}$,

*(ii)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$,

*(iii)* $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x}{\ln^2 x}$,

*(iv)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 3x}$,

*(v)* $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$,

*(vi)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x \arccos x}$.

**Příklad 113.** *Určete limity.*

‡*(i)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\operatorname{tg} x,$

‡*(ii)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \operatorname{tg} 2x \ln(\operatorname{tg} x),$

‡*(iii)* $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}},$

‡*(iv)* $\lim\limits_{x\to 0^-} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$

**Příklad 114.** *Určete rovnici tečny funkce $f$ v bodě $x_0$.*

*(i)* $f(x) = \frac{1-x}{x^2-3}, \quad x_0 = -2,$

*(ii)* $f(x) = 2x + \sin x, \quad x_0 = \pi.$

**Příklad 115.** *Určete rovnici normály funkce $f$ v bodě $x_0$.*

*(i)* $f(x) = x^2 + \ln x, \quad x_0 = 1,$

*(ii)* $f(x) = \sqrt[3]{1-x}, \quad x_0 = 9.$

## § 12.4 Wolfram|Alpha

- Tečna.

```
tangent to y=x^2 at 2
```

- Normála.

```
normal to y=x^(2/3) at 8
```

- Limita.

```
limit (ln^5(x))/(x-3) as x->infinity
```

Kapitola

# 13 Průběh funkce

## § 13.1 Monotonie a lokální extrémy

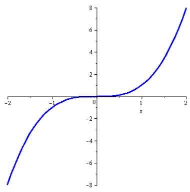
**Věta 32.**

Nechť je funkce $f$ spojitá na intervalu $[a, b]$ a má derivaci na intervalu $(a, b)$. Pak platí

- Funkce $f$ je v $[a, b]$ *konstantní* právě tehdy, když $\forall x \in (a, b) : f'(x) = 0$.
- Je-li $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, pak je funkce $f$ na intervalu $[a, b]$ *rostoucí*.
- Je-li $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$, pak je funkce $f$ na intervalu $[a, b]$ *klesající*.

***Pozor!***

Obrácené tvrzení neplatí. Např. funkce $f(x) = x^3$ je na celém $\mathbb{R}$ rostoucí, ale v bodě $x = 0$ má nulovou derivaci.



**Definice 51.**

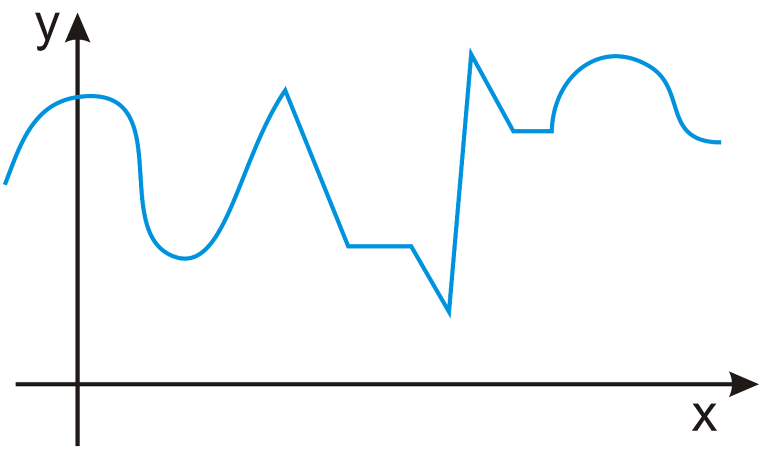
Řekneme, že funkce $f$ má v bodě $x_0$ *lokální maximum (minimum)*, jestliže pro každé $x$ v nějakém okolí bodu $x_0$ platí

$$f(x) \leq f(x_0), \qquad \big(f(x) \geq f(x_0)\big).$$

Pokud pro $x \neq x_0$ platí předchozí nerovnosti ostře, mluvíme o ostrém lokálním maximu (minimu). Souhrnně nazýváme (ostré) lokální maximum a minimum *(ostré) lokální extrémy*.

**Věta 33.**

Má-li funkce $f$ v bodě $x_0$ lokální extrém, pak $f'(x_0) = 0$, nebo $f'(x_0)$ neexistuje.




Obr. 13.1: Najděte všechny extrémy zobrazené funkce a rozhodněte, které z nich jsou ostré.

**Definice 52.**

Je-li $f'(x_0) = 0$, pak bod $x_0$ nazýváme *stacionární bod* funkce $f$.

**Věta 34.**

Nechť je funkce $f$ spojitá v bodě $x_0$ a nechť existuje její derivace v nějakém prstencovém okolí tohoto bodu. Označme $L$ levé prstencové okolí bodu $x_0$ a $R$ pravé prstencové okolí bodu $x_0$.

- Jestliže platí
$$f'(x) > 0 \text{ pro } x \in L \text{ a } f'(x) < 0 \text{ pro } x \in R,$$
pak má funkce $f$ v bodě $x_0$ ostré lokální maximum.
- Jestliže platí
$$f'(x) < 0 \text{ pro } x \in L \text{ a } f'(x) > 0 \text{ pro } x \in R,$$
pak má funkce $f$ v bodě $x_0$ ostré lokální minimum.

**Věta 35.**

Nechť $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) \neq 0$. Pak má funkce $f$ v bodě $x_0$ lokální extrém a to

- lokální maximum, jestliže $f''(x_0) < 0$,
- lokální minimum, jestliže $f''(x_0) > 0$.

**Příklad 116.** *Najděte lokální extrémy funkce* $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Řešení:

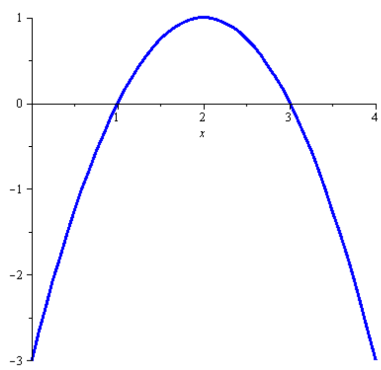
(i) $f'(x) = -2x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$

| $x$ | $(-\infty, 2)$ | $(2, \infty)$ |
|---|---|---|
| $\operatorname{sgn} f'$ | $+$ | $-$ |
| $f$ | $\nearrow$ | $\searrow$ |

Funkce $f$ má tedy v $x = 2$ lokální maximum s hodnotou $f(2) = 1$.

(ii) $f'(x) = -2x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$
$f''(x) = -2 \quad \Rightarrow f''(2) = -2 < 0.$

Funkce $f$ má tedy v $x = 2$ lokální maximum s hodnotou $f(2) = 1$.




Obr. 13.2: Graf funkce $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

## § 13.2 Konvexnost, konkávnost a inflexní body

**Definice 53.**

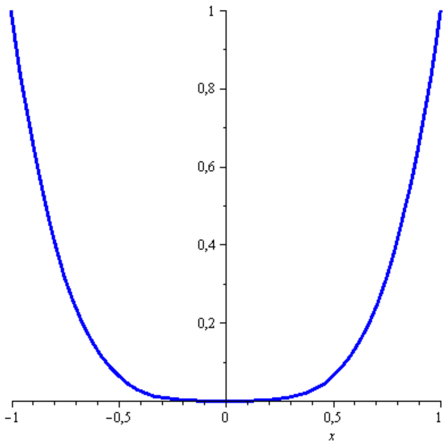
Funkci nazveme *konvexní (konkávní)* v bodě $x_0$, jestliže její graf leží v prstencovém okolí bodu $x_0$ nad (pod) tečnou v tomto bodě.
Funkci nazveme konvexní (konkávní) na intervalu $I$, jestliže je konvexní (konkávní) v každém bodě tohoto intervalu.

**Věta 36.**

Nechť funkce $f(x)$ má derivaci na intervalu $(a, b)$. Pak platí

- jestliže $\forall x \in (a, b)$ platí $f''(x) > 0$, pak je funkce $f$ konvexní na intervalu $(a, b)$,
- jestliže $\forall x \in (a, b)$ platí $f''(x) < 0$, pak je funkce $f$ konkávní na intervalu $(a, b)$.

*Poznámka.* Opačné tvrzení neplatí. Např. funkce $f(x) = x^4$ je konvexní na $\mathbb{R}$, ale $f''(0) = 0$.



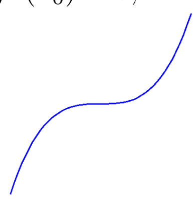

Obr. 13.3: Graf funkce $f(x) = x^4$.

**Definice 54.**

Řekneme, že funkce $f$ má v bodě $x_0$ *inflexní bod*, jestliže v bodě $x_0$ existuje tečna ke grafu funkce a $f''$ zde mění znaménko (tj. graf funkce se mění z konvexního na konkávní, nebo opačně).

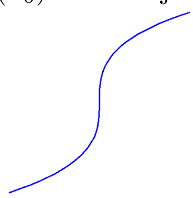
*Poznámka.* Funkce $f$ může mít inflexní bod v bodě $x_0$, ve kterém:

- $f''(x_0) = 0$,



Obr. 13.4: Graf funkce $f(x) = x^3$ s inflexním bodem.

- $f''(x_0)$ neexistuje.



Obr. 13.5: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ s inflexním bodem.

**Věta 37.**

Nechť má funkce $f$ v bodě $x_0$ spojitou první derivaci a nechť existuje ryzí okolí bodu $x_0$, v němž existuje druhá derivace funkce $f$. Označme $L$ levé ryzí okolí bodu $x_0$ a $R$ pravé ryzí okolí bodu $x_0$. Pak jestliže

$$f''(x) > 0\ \forall x \in L \text{ a } f''(x) < 0 \quad \forall x \in R \qquad \text{nebo naopak,}$$

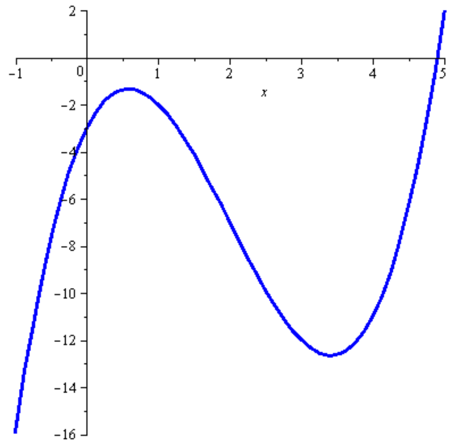
pak má funkce $f$ v bodě $x_0$ inflexní bod.

**Příklad 117.** *Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ je funkce $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x - 3$ konkávní/konvexní a najděte její inflexní body.*

Řešení: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 6, \quad f''(x) = 6x - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$

| $x$ | $(-\infty, 2)$ | $(2, \infty)$ |
|---|---|---|
| sgn $f''$ | $-$ | $+$ |
| $f$ | $\cap$ | $\cup$ |

Funkce je konkávní pro $x \in (-\infty, 2)$ konvexní pro $x \in (2, \infty)$ a v $x = 2$ má inflexní bod s hodnotou $f(2) = -7$.




Obr. 13.6: Graf funkce $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x - 3$.

## § 13.3 Asymptoty

**Definice 55.**

Přímku, která je tečnou ke grafu funkce $f$ v některém nevlastním bodě, nazýváme *asymptota* funkce $f$.

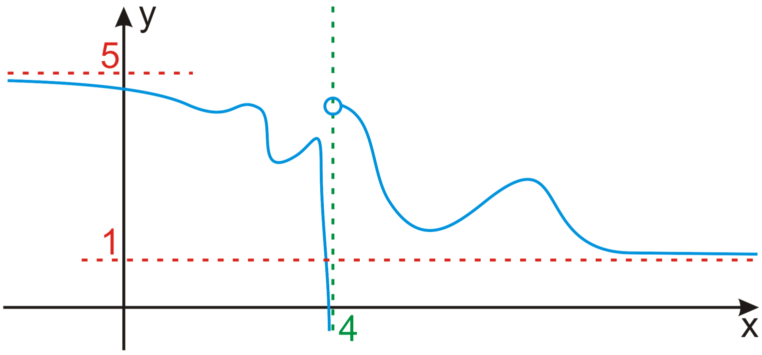
**Věta 38.**

Funkce má

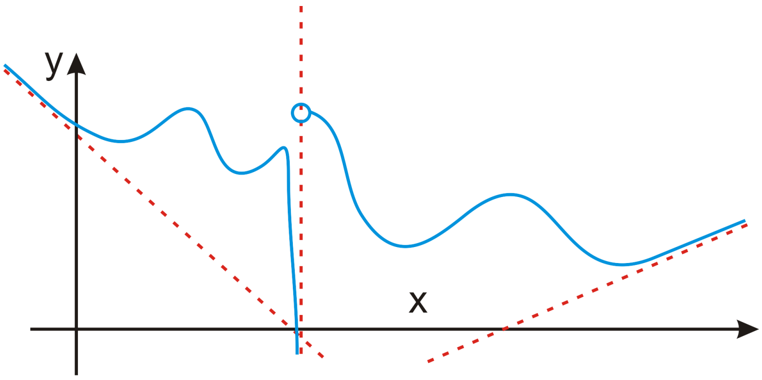
- *asymptotu bez směrnice* $x = x_0$ právě tehdy, když má v bodě $x_0$ nevlastní limitu zleva nebo zprava,
- *asymptotu se směrnicí* $y = ax + b$ pro $x \to \pm\infty$ právě tehdy, když

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) \in \mathbb{R}.$$

*Poznámka.* Je-li limita $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$, pak je svislá přímka $x = x_0$ asymptotou bez směrnice funkce $f$ v bodě $x_0$. Tedy asymptoty bez směrnice hledáme "v dírách" nebo na okraji definičního oboru.




Obr. 13.7: Jedna asymptota bez směrnice, dvě vodorovné se směrnicí.




Obr. 13.8: Jedna asymptota bez směrnice, dvě šikmé se směrnicí.

## § 13.4 Průběh funkce – shrnutí

***Postup při vyšetřování průběhu funkce***

(i) *Přímo z funkce*:

- $D(f)$, sudost/lichost, periodičnost, průsečíky s osami, kladnost/zápornost,
- asymptoty (se směrnicí, bez směrnice).

(ii) *Z první derivace*: rostoucí/klesající, lokální extrémy.

(iii) *Z druhé derivace*: konvexní/konkávní, inflexní body.

(iv) *Načrtnutí grafu*: ke všem výše zmíněným bodům dopočítáme funkční hodnoty a zkombinujeme zjištěné informace.

Postupně tedy plníme následující body:

a) definiční obor,

b) sudost/lichost (periodičnost),

c) asymptoty bez směrnice,

d) asymptoty se směrnicí,

e) průsečíky s osami,

f) kladnost/zápornost,

j) druhou derivaci,

k) kde je $f$ konvexní/konkávní,

l) inflexní body,

g) první derivaci,

h) kde je $f$ rostoucí/klesající,

i) lokální extrémy,

m) funkční hodnoty ve významných bodech,

n) načrtneme graf.

**Příklad 118.** *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = -\frac{x^2}{x+1}$$

Řešení:

a) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $x + 1 \neq 0$. Proto máme

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

b) O sudosti/lichosti funkce snadno rozhodneme dosazením $-x$. Poněvadž platí

$$f(-x) = -\frac{x^2}{-x+1} \neq \pm f(x),$$

není zadaná funkce ani lichá, ani sudá (což je vidět už z nesymetrie definičního oboru). Vzhledem k definičnímu oboru je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

c) Asymptoty bez směrnice popisují limitní chování funkce v bodech nespojitosti (nebo na okraji definičního oboru), proto přímým výpočtem ihned dostaneme

$$\lim_{x\to -1^+} -\frac{x^2}{x+1} = -\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{x+1} = -(+\infty) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to -1^-} -\frac{x^2}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} -\frac{x^2}{x+1} = -(-\infty) = \infty.$$

Funkce má jednu svislou asymptotu $x = -1$.

d) Pomocí vzorců určíme asymptoty se směrnicí (pokud existují).

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{x^2}{x^2+x} = -1,$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{x^2}{x+1} + x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

Funkce $f(x)$ má tedy v $+\infty$ i $-\infty$ asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = -x+1$.

e) Určíme průsečíky s osou $x$ ($\Rightarrow y = 0$):

$$f(x) = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0,$$

tedy $P_x = [0, 0]$,

a s osou $y$ ($\Rightarrow x = 0$):

$$y = -\frac{0^2}{0+1} = 0 \iff y = 0,$$

tedy $P_y = [0, 0] = P_x$.

f) Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná:

| $x$ | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 0)$ | $(0, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| sgn $f$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $f$ | kladná | záporná | záporná |

g) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{-x^2-2x}{(x+1)^2}, \quad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

h) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \iff -x(x+2) = 0 \iff x_1 = 0,\ x_2 = -2.$$

| $x$ | $(-\infty, -2)$ | $(-2, -1)$ | $(-1, 0)$ | $(0, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| sgn $f'$ | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| $f$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ |

i) Z tabulky vidíme, že funkce má v $x = -2$ lokální minimum a v $x = 0$ lokální maximum.

j) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{-2x-2}{(x+1)^4} = \frac{-2}{(x+1)^3},$$
$$D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

k) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

$$f''(x) = 0 \iff -2 = 0,$$

což je nesmysl. Druhá derivace tedy nemá žádný nulový bod. Nesmíme ovšem zapomenout, že její znaménko se může změnit i v bodech, ve kterých není definována (tj. v „dírách“ jejího definičního oboru).

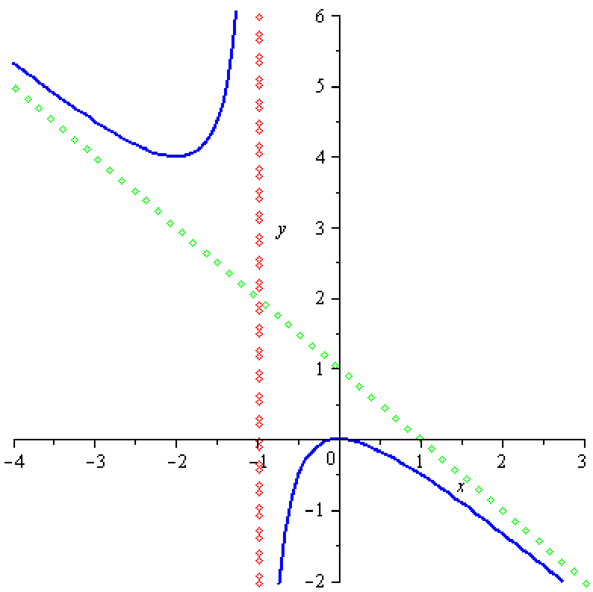
| $x$ | $(-\infty, -1)$ | $(-1, \infty)$ |
|---|---|---|
| sgn $f''$ | $+$ | $-$ |
| $f$ | $\cup$ | $\cap$ |

l) Funkce nemá žádný inflexní bod ($-1 \notin D(f)$).

m) Zrekapitulujme význačné body a spočtěme v nich funkční hodnoty.

- Průsečíky s osami $P_x = P_y = [0, 0]$.
- Lokální minimum v $x = -2$, $f(-2) = 4$, tedy jde o bod $[-2, 4]$.
- Lokální maximum v $x = 0$, $f(0) = 0$, tedy jde o bod $[0, 0]$.

n) Nyní zkombinujeme všechny získané informace a obdržíme graf funkce




Obr. 13.9: Graf funkce $f(x) = -\frac{x^2}{x+1}$.

## § 13.5 Absolutní (globální) extrémy

Často je potřeba najít na daném intervalu bod, ve kterém je hodnota funkce největší, nebo nejmenší v rámci celého intervalu. Takovým bodům pak říkáme absolutní nebo globální extrémy.

**Definice 56** (Absolutní (globální) extrémy)**.**

Buď $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce $f$ má v bodě $x_0 \in [a,b]$ *absolutní maximum (minimum) na intervalu* $[a,b]$, jestliže pro všechna $x \in [a,b]$ platí, že

$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0)).$$

Jsou-li nerovnosti pro $x \ne x_0$ ostré, mluvíme o *ostrých* absolutních extrémech funkce na $[a,b]$.

**Věta 39.**

Nechť funkce $f$ je spojitá na intervalu $[a,b]$. Pak funkce $f$ nabývá svého absolutního maxima i minima na intervalu $[a,b]$ a to buď v bodě lokálního extrému ležícího v $(a,b)$ nebo v jednom z krajních bodů $x = a$, $x = b$.

Tvrzení je důsledkem Weierstrassovy věty a obsahuje návod k hledání globálních extrémů spojitých funkcí.

*Poznámka.* Globální extrémy spojité funkce $f$ na intervalu $[a,b]$ hledáme takto:
Určíme stacionární body a body uvnitř intervalu $[a,b]$, v nichž neexistuje derivace, pak porovnáme funkční hodnoty v těchto bodech s hodnotami $f(a)$ a $f(b)$.

**Příklad 119.** *Určete rozměry otevřeného zahradního bazénu se čtvercovým dnem daného objemu* 32 m$^3$ *tak, aby se na vyzdění jeho dna a stěn spotřebovalo minimum materiálu. Délka bazénu musí být v rozmezí 2–8 metrů.*

Řešení:

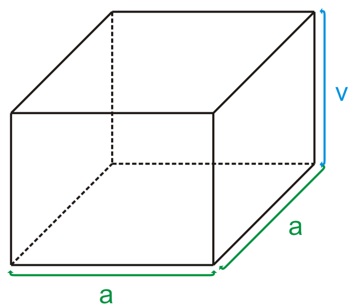
Ze zadaného objemu vyjádříme výšku bazénu

$$V = a^2 \cdot v \quad \Rightarrow \quad v = \tfrac{V}{a^2}.$$

Funkce určující obsah dna a stěn je

$$S = a^2 + 4 \cdot v \cdot a \quad \Rightarrow \quad S(a) = a^2 + \tfrac{4V}{a},$$

kterou chceme minimalizovat pro $a \in [2,8]$.



Nejprve najdeme stacionární bod

$$S'(a) = 2a - \frac{4V}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{2V} \quad \overset{V=32}{\Rightarrow} \quad a = 4,\ v = 2.$$

Nyní porovnáme hodnotu funkce objemu v nalezeném bodě $a = 4$ s hodnotami v krajních bodech, tj.

$$S(a) = a^2 + \tfrac{4\cdot 32}{a} \quad \Rightarrow \quad V(2) = 68, \quad V(4) = 48, \quad V(8) = 80.$$

Globální minimum je tedy v nalezeném stacionárním bodě a optimální rozměry bazénu splňujícího zadání jsou $4 \times 4 \times 2$.

Ověření, že jde skutečně o globální extrém, je samozřejmě možné i postupem z průbehu funkce, ten ale bývá většinou zdlouhavější. Zde např. ověříme, že objem na obě strany od stacionárního bodu roste a nižší hodnota tedy jinde být nemůže.

| $a$ | $(0,4)$ | $(4,\infty)$ |
|---|---|---|
| $\operatorname{sgn} S'$ | $-$ | $+$ |
| $S$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

## § 13.6 Příklady k procvičení

**Příklad 120.** *Určete průběh funkce.*

*(i)* $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$,

*(ii)* $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$,

*(iii)* $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$,

*(iv)* $f(x) = \frac{x^2+1}{2x}$,

*(v)* $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$,

*(vi)* $f(x) = \frac{x-3}{x^2}$,

*(vii)* $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$,

*(viii)* $f(x) = \frac{1-2x}{3x^2}$,

‡*(ix)* $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$,

‡*(x)* $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$.

**Příklad 121.** *Je dána funkce $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$. Určete:*

*(i) Pro která $x$ je tato funkce klesající.*

*(ii) Pro která $x$ je tato funkce konkávní.*

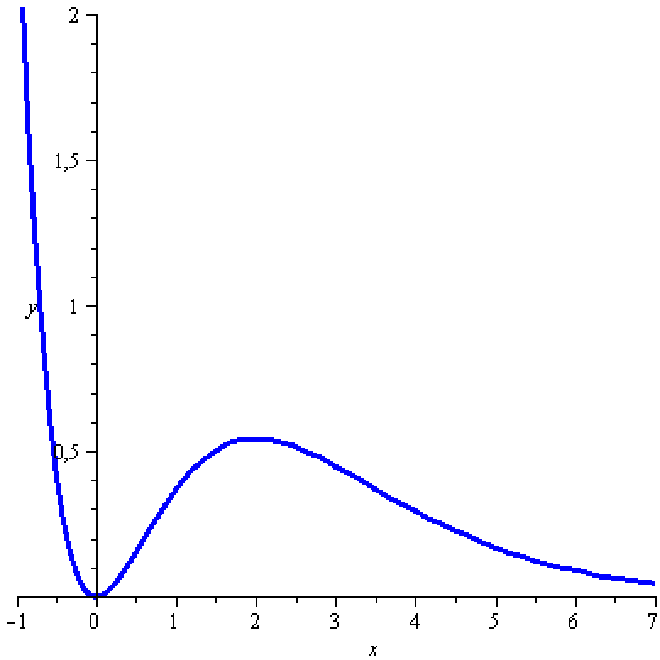
*(iii) Asymptoty bez směrnice.*

*(iv) Vodorovné asymptoty.*

*(v) Najděte lokální maxima.*

*(vi) Najděte inflexní body.*

*Poznámka.* Vyzkoušejte dopočítat vše k dokončení vyšetřování průběhu funkce z příkladu 121. Její graf vypadá takto:




Obr. 13.10: Graf funkce $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$.

**Příklad 122.** *Určete inflexní body funkce* $f(x) = \ln(2x^2 - 3x + 4)$.

**Příklad 123.** *Které tvrzení NEPLATÍ pro funkci* $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$.

*a) je sudá,* *b) její derivace má v bodě* 3 *hodnotu* $-\frac{3}{32}$, *c) je klesající pro* $x > 8$, *d) v bodě* 2 *je konkávní,* *e) má lokální maximum v* $x = 0$.

**Příklad 124.** *Vyřešte následující extremální problémy.*

(i) *Obdélník má obvod o, určete jeho strany a, b tak, aby jeho obsah byl maximální.*

(ii) *Určete takové záporné reálné číslo x, že jeho rozdíl s převrácenou hodnotou druhé mocniny tohoto čísla je maximální.*

(iii) *Váš přítel se na Vás obrátil s prosbou o pomoc. Dostal za úkol vyprojektovat uprostřed pozemku tvaru čtverce o straně 1,5 km 8 sousedících parcel určených ke stavbě luxusních vil. Parcely musí být obdélníkové, ve dvou řadách po čtyřech a výměra každé z nich musí činit 120 arů (tj. celkem 960 arů). Kolem každé parcely musí Váš přítel nechat postavit cesty. Přitom dlouhá spojovací cesta mezi řadami po čtyřech bude na obě strany vyvedena mimo pozemek a napojena na silniční síť oblasti. Tyto napojovací cesty budou financovány plně z fondu EU, takže jejich cenu není potřeba uvažovat. Jaké rozměry parcel poradíte, aby se za stavbu cest co nejvíce ušetřilo?*

## § 13.7 Wolfram|Alpha

- Lokální extrémy.

```
local extrema of (x-1)/(x^2+1)
```

- Inflexní body.

```
inflection points of (x-1)/(x^2+1)
```

- Asymptoty.

```
asymptotes y=(x^2-1)/(5-x)
```

- Graf funkce.

```
plot y=(x^2-3)/(x^2+9)

plot y=(x-1)/(x^2+1) for x from -3 to 4 and y from -1 to 0.5
```

Kapitola

# 14 Neurčitý integrál

## § 14.1 Definice a vlastnosti

**Definice 57** (Neurčitý integrál)**.**

Nechť jsou $F$ a $f$ funkce definované na otevřeném intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Jestliže platí

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in I,$$

pak funkci $F$ nazýváme *primitivní funkce* k funkci $f$, nebo *neurčitý integrál* funkce $f$ na intervalu $I$. Píšeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x).$$

Existuje-li k funkce $f$ primitivní funkce na intervalu I, pak říkáme, že funkce f je na I *integrovatelná*.

Z definice je vidět, že integrál je jakási antiderivace, tj. integrováním získáme ze známé derivace zpět původní funkci. Proto je také většina vzorců pro integrování elementárních funkcí shodná se vzorci pro derivace, jen čteno zprava doleva (a upraveno).

**Věta 40.**

Je-li funkce $f$ spojitá v intervalu $I$, pak je zde integrovatelná.

*Poznámka.* Primitivní funkce (tedy výsledek po integraci) je vždy spojitá, neboť k ní existuje derivace (je diferencovatelná).

**Věta 41** (Jednoznačnost)**.**

Primitivní funkce je určena jednoznačně až na aditivní konstantu.

Např. protože platí $\left(x^2\right)' = 2x$, je funkce $x^2$ primitivní funkcí k funkci $2x$. Podobně ale také $\left(x^2+4\right)' = \left(x^2-8\right)' = 2x$. Tedy $x^2 + c$ je primitivní funkce k funkci $2x$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$. Konstantu $c$ nazýváme *aditivní (integrační) konstanta*. Z toho je zřejmé, že primitivní funkce není jediná funkce, ale celá množina funkcí lišících se o konstantu.

***Vzorce***

Nechť $A, B, a, c, k, n \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $n \neq -1$.

1. $\int k\,dx = kx + c$,
2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$,
3. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$,
4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$,
5. $\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + c$,
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$,
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$,
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$,
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + c$,
10. $\int \frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{A} + c$,
11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm B}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm B}| + c$,
12. $\int \frac{1}{A^2+x^2}\,dx = \frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{x}{A} + c$,
13. $\int \frac{1}{A^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2A}\ln\left|\frac{A+x}{A-x}\right| + c$.

**Věta 42** (Linearita)**.**

Nechť $f$ a $g$ jsou funkce integrovatelné na intervalu $I$ a $a$, $b$ jsou reálná čísla. Pak na $I$ platí

$$\int af(x) + bg(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Příklad 125.**

$$\begin{aligned}\int \left(3x^3 - \sin x + \sqrt[5]{x}\right)\mathrm{d}x &= 3\int x^3\,\mathrm{d}x - \int \sin x\,\mathrm{d}x + \int x^{1/5}\,\mathrm{d}x \\ &= 3\frac{x^4}{4} + c_1 + \cos x + c_2 + \frac{x^{6/5}}{6/5} + c_3 \\ &= \frac{3}{4}x^4 + \cos x + \frac{5}{6}\sqrt[5]{x^6} + c.\end{aligned}$$

*Poznámka.* Při derivování šlo jen o správné použití vzorců a jejich znalost. Integrace je často mnohem obtížnější. Především proto, že neexistují vzorce pro integrál součinu, podílu a složené funkce.

## § 14.2 Metoda per partes

Metoda per partes částečně nahrazuje chybějící pravidlo pro integraci součinu.

**Věta 43.**

Nechť jsou funkce $u$ a $v$ diferencovatelné na intervalu $I$. Pak na $I$ platí

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x,$$

jestliže integrály na pravé straně rovnosti existují.

*Poznámka.* Jako funkci $u$, tedy tu, kterou při použití věty derivujeme, volíme zpravidla funkci, která se při derivování "více zlepší". Protože nás budou zajímat výhradně integrandy typu polynom krát jiná funkce, volba bude vypadat následovně. Je dán integrál

$$\int P(x)f(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $P(x)$ je polynom, řešíme pomocí metody per partes takto:

- ▷ Je-li $f(x)$ jedna z funkcí $\mathrm{e}^{kx}, \sin(kx), \cos(kx)$, pak volíme $u = P(x)$.
- ▷ Je-li $f(x)$ jedna z funkcí $\ln x, \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arccotg} x$, pak volíme $u = f(x)$.

Metodu per partes lze použít opakovaně.

**Příklad 126.**

$$\begin{aligned}
&\int x\sin x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right| \\
&= x\cdot(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x \\
&= -x\cos x + \sin x + c.
\end{aligned}$$

*Poznámka.* Zkoušku provedeme zderivováním výsledku.

**Příklad 127.**

$$\begin{aligned}
\int 3x^2 \ln^2 x \,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} u = \ln^2 x & u' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \\ v' = 3x^2 & v = x^3 \end{vmatrix} \\
&= x^3 \ln^2 x - \int 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x^3 \,\mathrm{d}x \\
&= x^3 \cdot \ln^2 x - 2 \int x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^2 & v = \frac{x^3}{3} \end{vmatrix} \\
&= x^3 \cdot \ln^2 x - 2\left[\ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x\right] \\
&= x^3 \cdot \ln^2 x - 2\frac{x^3}{3} \ln x + \frac{2}{3} \int x^2 \,\mathrm{d}x \\
&= x^3 \cdot \ln^2 x - \frac{2}{3} x^3 \ln x + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + c \\
&= x^3 \cdot \ln^2 x - \frac{2}{3} x^3 \ln x + \frac{2}{9} x^3 + c.
\end{aligned}$$

## § 14.3 Substituční metoda

Substituční metoda se používá pro výpočet některých integrálů ze složených funkcí a také pro výpočet některých integrálů ze součinu či podílu funkcí.

**Věta 44** (Substituční metoda I)**.**

Nechť $f(t)$ je funkce spojitá na intervalu $I$, nechť má funkce $\varphi(x)$ derivaci na intervalu $J$ a nechť platí $\varphi(J) = I$. Potom na $J$ platí

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \,\mathrm{d}x = \int f(t) \,\mathrm{d}t,$$

dosadíme-li do výrazu na pravé straně $t = \varphi(x)$.

*Poznámka.* Za novou proměnnou $t$ volíme vnitřní složku složené funkce $f(\varphi(x))$, tedy $t = \varphi(x)$. Odtud diferenciací dostáváme $\mathrm{d}t = \varphi'(x) \,\mathrm{d}x$ (porovnejte se vzorcem ve znění věty).

**Příklad 128.**

$$\begin{aligned}
\int \sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} t = \ln x \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \end{vmatrix} \\
&= \int \sin t \,\mathrm{d}t = -\cos t + c = -\cos(\ln x) + c.
\end{aligned}$$

**Věta 45** (Substituční metoda II)**.**

Nechť $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu $I$, nechť má funkce $\varphi(t)$ na intervalu $J$ nenulovou derivaci a nechť platí $\varphi(J) = I$. Potom na $I$ platí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

dosadíme-li do výrazu na pravé straně $t = \varphi^{-1}(x)$, kde $\varphi^{-1}(x)$ je funkce inverzní k funkci $\varphi(x)$.

*Poznámka.* • Přestože pravá strana vztahu pro substituci vypadá složitěji než levá strana, vhodnou volbou substituce dodjde často naopak k výraznému zjednodušení.

- Porovnáme-li obě uvedené substituční metody, zjistíme, že jde o jediný vztah, který lze využít zprava doleva, nebo naopak.

**Příklad 129.** *Přímé použití věty:*

$$\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \frac{t-1}{2} \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right|$$
$$= \int \sin\Big(2 \cdot \frac{t-1}{2} + 1\Big) \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int \sin t\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{2}\cos t + c = \left| \begin{array}{c} x = \frac{t-1}{2} \\ t = 2x+1 \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + c.$$

*V tomto případě snadněji:*

$$\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = 2x+1 \\ \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right|$$
$$= \int \sin t \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cos t + c = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + c.$$

Je užitečné mít na paměti i následující dva důsledky substituční metody, protože mohou výrazně ušetřit čas při výpočtu složitějších integrálů.

*Důsledek.* Je-li $F$ primitivní funkce k funkci $f$, pak platí

$$\int f(\alpha x + \beta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + c.$$

**Příklad 130.**

$$\int \sqrt{4x+5}\,\mathrm{d}x = \int (4x+5)^{1/2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{4}\frac{(4x+5)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{6}\sqrt{(4x+5)^3} + c.$$

*Důsledek.* Platí

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c.$$

**Příklad 131.**

$$\int \frac{5x}{3x^2+5}\,\mathrm{d}x = 5\int \frac{x}{3x^2+5}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{6}\int \frac{6x}{3x^2+5}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{5}{6}\ln|3x^2+5| + c = \frac{5}{6}\ln(3x^2+5) + c.$$

## § 14.4 Racionální lomená funkce

*Poznámka.* Již víme, že každou racionální lomenou funkci, která není ryze lomená, lze pomocí dělení polynomů převést na součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Budeme se tedy zajímat pouze o integrály z ryze lomených racionálních funkcí.

Zaměříme se na 4 typy integrálů:

1. $\int \frac{A}{ax+b}\,\mathrm{d}x$,
2. $\int \frac{A}{(ax+b)^n}\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$,
3. $\int \frac{A}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$,
4. $\int \frac{Ax+B}{ax^2+px+q}\,\mathrm{d}x$,

kde $A, B, a, b, c, p, q$ jsou reálná čísla.

Typ 1 a 2 řešíme substitucí $t = ax + b$.

**Příklad 132** (Typ 1)**.**

$$\int \frac{3}{2x-8}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = 2x-8 \\ \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{3}{t}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{2}\ln|t| + c = \frac{3}{2}\ln|2x-8| + c.$$

**Příklad 133** (Typ 2)**.**

$$\int \frac{3}{(2x-8)^3}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = 2x-8 \\ \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{3}{t^3}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{2}\int t^{-3}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\frac{t^{-2}}{-2} + c$$

$$= \frac{3}{-4}\frac{1}{t^2} + c = \frac{-3}{4(2x-8)^2} + c.$$

Typ 3 řešíme doplněním jmenovatele na čtverec a použitím vzorce pro $\int \frac{1}{A^2+x^2}\,\mathrm{d}x$, nebo $\int \frac{1}{A^2-x^2}\,\mathrm{d}x$.

**Příklad 134** (Typ 3)**.**

$$\int \frac{3}{2x^2-4x+10}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2+4}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left| \begin{matrix} t = x-1 \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+2^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot \operatorname{arctg}\frac{t}{2} + c = \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + c.$$

Typ 4 řešíme převedením na součet integrálu typu $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ a integrálu typu 3.

**Příklad 135** (Typ 4)**.**

$$\int \frac{3x-6}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{x-2}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2-2-4}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x-3} + \frac{-6}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x$$

$$I_1 = \int \frac{2x+2}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = \ln|x^2+2x-3| + c$$

$$I_2 = -6\int \frac{1}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = -6\int \frac{1}{(x+1)^2-4}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} t = x+1 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{matrix} \right|$$

$$= -6\int \frac{1}{t^2-4}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{1}{4-t^2}\,\mathrm{d}t = 6\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| + c$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x+3}{1-x}\right| + c$$

Celkem

$$\int \frac{3x-6}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\left(\ln|x^2+2x-3| + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x+3}{1-x}\right|\right) + c$$

## § 14.5 Značení

Racionální lomenou funkci v proměnných $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ budeme značit $R(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$, tj. $R(\alpha, \beta)$ je podíl dvou polynomů, ve kterých místo $x$ vystupují $\alpha, \beta$. Např. $R(x, \sin x)$ jsou funkce $\frac{x^2-2\sin^3 x}{\sin^2 x}$, $2x + \sin x$, $\frac{\sin x - x^4}{x^2 - 2\sin^3 x}$ apod.

## § 14.6 Goniometrické funkce

**_Volba substituce_**

Nechť je integrand (integrovaná funkce) typu $R(\sin x, \cos x)$. Je-li integrand lichá funkce vůči sinu, volíme substituci $t = \cos x$. Je-li lichá vůči kosinu, volíme $t = \sin x$.

*Poznámka.* Připomeňme

$$\begin{aligned} &\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ &\quad \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ &\quad \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x. \end{aligned}$$

Tedy např. $\cos^6 x = (1 - \sin^2 x)^3$.

**Příklad 136.**

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x \,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x \,\mathrm{d}x$$

$$= \int \sin^2 x (\cos^2 x)^2 \cos x \,\mathrm{d}x = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \,\mathrm{d}x$$

$$= \int t^2 (1 - t^2)^2 \,\mathrm{d}t = \int t^2 - 2t^4 + t^6 \,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + c$$

$$= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + c.$$

# § 14.7 Iracionální funkce

**Volba substituce I**

Je-li je integrand typu $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$, $n \in \mathbb{N}$, volíme substituci

$$t^n = ax + b, \qquad \big(t = \sqrt[n]{ax+b}\big).$$

Tím převedeme integrál na integrál z racionální lomené funkce.

**Příklad 137.**

$$\int \frac{2x}{\sqrt[3]{4x-1}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t^3 = 4x-1 \Rightarrow x = \frac{t^3+1}{4} \\ 3t^2\,\mathrm{d}t = 4\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{3}{4}t^2\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{2\cdot\frac{t^3+1}{4}}{t}\cdot\frac{3}{4}t^2\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{4}\cdot\frac{3}{4}\int \frac{(t^3+1)t^2}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{8}\int (t^3+1)t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{8}\int t^4 + t\,\mathrm{d}t = \frac{3}{8}\left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^2}{2}\right) + c$$

$$= \frac{3}{8}\left[\frac{1}{5}\Big(\sqrt[3]{4x-1}\Big)^5 + \frac{1}{2}\Big(\sqrt[3]{4x-1}\Big)^2\right] + c$$

$$= \frac{3}{80}\sqrt[3]{(4x-1)^2}\Big[2(4x-1) + 5\cdot 1\Big] + c$$

$$= \frac{3}{80}\sqrt[3]{(4x-1)^2}\cdot(8x+3) + c.$$

**Volba substituce II**

Je-li je integrand typu $R(x, \sqrt[n_1]{x}, \sqrt[n_2]{x}, \ldots, \sqrt[n_k]{x})$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, volíme substituci

$$t^s = x, \qquad \big(t = \sqrt[s]{x}\big),$$

kde $s$ je nejmenším společným násobkem čísel $n_1, \ldots, n_k$. Tím převedeme integrál z iracionální funkce na integrál z racionální lomené funkce.

**Příklad 138.**

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt[5]{x} - 3\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{c} t^{10} = x \Rightarrow t = \sqrt[10]{x} \\ 10t^9\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right| \\
&= \int \frac{t^{10/5} - 3\cdot t^{10/2}}{t^{10}} \cdot 10t^9\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{t^2 - 3t^5}{t^{10}} 10t^9\,\mathrm{d}t = 10\int t - 3t^4\,\mathrm{d}t \\
&= 10\left(\frac{t^2}{2} - 3\frac{t^5}{5}\right) + c \\
&= 5\sqrt[10]{x^2} - 6\sqrt[10]{x^5} + c = 5\sqrt[5]{x} - 6\sqrt{x} + c.
\end{aligned}
$$

## § 14.8 Příklady k procvičení

**Příklad 139.** *Spočtěte integrály:*

*(i)* $\int 6x^2 - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$,

*(ii)* $\int \sqrt[3]{x^2}\cdot(x^2+1)\,\mathrm{d}x$,

*(iii)* $\int \dfrac{2x^3 + 4x - 8}{x^2}\,\mathrm{d}x$,

*(iv)* $\int \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x - 3}\,\mathrm{d}x$.

**Příklad 140.** *Integrujte pomocí substituce*

*(i)* $\int \cos\left(\frac{3}{2}x\right)\mathrm{d}x$,

*(ii)* $\int \frac{3}{\sqrt{2-8x}}\,\mathrm{d}x$,

*(iii)* $\int \frac{4}{2x-1}\,\mathrm{d}x$,

*(iv)* $\int 5^{3x}\,\mathrm{d}x$,

*(v)* $\int \frac{1}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x$

**Příklad 141.** *Pomocí metody per partes integrujte*

*(i)* $\int x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$,

*(ii)* $\int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x$.

**Příklad 142.** *S použitím vzorce*

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$$

*spočítejte integrály*

*(i)* $\int \frac{4x}{2x^2-8}\,\mathrm{d}x$,

*(ii)* $\int \frac{x}{2x^2-8}\,\mathrm{d}x$,

*(iii)* $\int \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x$.

**Příklad 143.** *S použitím vzorce*

$$\int \frac{1}{A^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{A} + c$$

*spočítejte integrál*

$$\int \frac{1}{16+9x^2}\,\mathrm{d}x.$$

**Příklad 144.** *S použitím vzorce*

$$\int \frac{1}{A^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2A}\ln\left|\frac{A+x}{A-x}\right| + c$$

*spočítejte integrál*

$$\int \frac{3}{16-9x^2}\,\mathrm{d}x.$$

**Příklad 145.** *S použitím vzorce*

$$\int \frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{A} + c$$

*spočítejte integrál*

$$\int \frac{-7}{\sqrt{16-3x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

**Příklad 146.** *S použitím vzorce*

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}}\,\mathrm{d}x = \ln|x+\sqrt{x^2 \pm B}| + c$$

*spočítejte integrál*

$$\int \frac{2}{\sqrt{4x^2-3}}\,\mathrm{d}x.$$

**Příklad 147.** *Použitím doplnění na čtverec spočítejte integrál*

$$\int \frac{3}{2x^2+8x-10}\,\mathrm{d}x.$$

**Příklad 148.** *Integrujte.*

*(i)* $\int 8x^3-2x^2+x-1\,\mathrm{d}x$,

*(ii)* $\int (x+3)(2x-7)\,\mathrm{d}x$,

*(iii)* $\int \frac{2x^6-3x^3+6x-2}{4x^2}\,\mathrm{d}x$,

*(iv)* $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3}}\,\mathrm{d}x$,

*(v)* $\int \frac{-2}{\sqrt{5-5x^2}}\,\mathrm{d}x$,

*(vi)* $\int \frac{14^x-5\cdot 7^x}{4\cdot 7^x}\,\mathrm{d}x$.

**Příklad 149.** *Integrujte.*

*(i)* $\int (2x+3)\sin x\,\mathrm{d}x$,

*(ii)* $\int (x^2+3x-1)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$,

*(iii)* $\int \ln x\,\mathrm{d}x$,

*(iv)* $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$,

*(v)* $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$,

‡*(vi)* $\int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$.

**Příklad 150.** *Integrujte.*

*(i)* $\int \frac{7}{3x}\,\mathrm{d}x$,

*(ii)* $\int \frac{2}{5-9x}\,\mathrm{d}x$,

*(iii)* $\int \sqrt{3-4x}\,\mathrm{d}x$,

*(iv)* $\int \sqrt[5]{2x-3}\,\mathrm{d}x$,

*(v)* $\int \frac{\sqrt{x}}{2x+3}\,\mathrm{d}x$, $[subst.\ x = t^2]$

*(vi)* $\int (12x+3)^{-4}\,\mathrm{d}x$,

*(vii)* $\int \frac{3x}{\sqrt{3x^2-5}}\,\mathrm{d}x$,

*(viii)* $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$,

*(ix)* $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$,

*(x)* $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+7}\,\mathrm{d}x$.

**Příklad 151.** *Integrujte.*

*(i)* $\int \frac{\mathrm{e}^x}{4-\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$,

*(ii)* $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$,

*(iii)* $\int \mathrm{e}^{-x^4} x^3\,\mathrm{d}x$,

*(iv)* $\int \sin x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$,

*(v)* $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$,

*(vi)* $\int \cos x \operatorname{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x$.

**Příklad 152.** *Integrujte.*

*(i)* $\int \frac{\sqrt[20]{x}-2\sqrt[30]{x}}{2\sqrt[15]{x}-\sqrt[12]{x}}\,\mathrm{d}x$,

*(ii)* $\int \frac{2}{\sqrt{4-9x^2}}\,\mathrm{d}x$,

*(iii)* $\int \frac{4}{2x^2+8x+11}\,\mathrm{d}x$,

*(iv)* $\int \frac{3}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,\mathrm{d}x$,

*(v)* $\int \frac{\sqrt{3x-1}}{2x}\,\mathrm{d}x$,

*(vi)* $\int 7x\sqrt[4]{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

**Příklad 153.** *Integrujte.*

*(i)* $\int \frac{2}{3x-4}\,\mathrm{d}x$,

*(ii)* $\int \frac{2}{(3x-4)^3}\,\mathrm{d}x$,

*(iii)* $\int \frac{2}{x^2-2x+3}\,\mathrm{d}x$,

*(iv)* $\int \frac{2x-2}{x^2-2x+3}\,\mathrm{d}x$,

*(v)* $\int \frac{4x+3}{x^2-2x+3}\,\mathrm{d}x$,

*(vi)* $\int \frac{3x-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$.

## § 14.9 Wolfram|Alpha

- Neurčitý integrál.

```
integrate x^5 ln(x)

integrate sqrt(ln(x))/x
```

Kapitola

# 15 Určitý (Riemannův) integrál

## § 15.1 Definice a vlastnosti

**Definice 58** (Dělení intervalu)**.**

Uvažujme uzavřený interval $I = [a, b], -\infty < a < b < \infty$. *Dělením intervalu* $I$ rozumíme konečnou posloupnost $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ bodů z intervalu $I$ takových, že

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

čísla $x_0, x_1, \dots, x_n$ nazýváme *dělící body*.
*Normou* $\nu(D)$ dělení $D$ rozumíme maximální vzdálenost sousedních dělících bodů, tedy

$$\nu(D) = \max\{x_i - x_{i-1}, i = 1, \dots, n\}.$$

**Definice 59** (Integrální součet)**.**

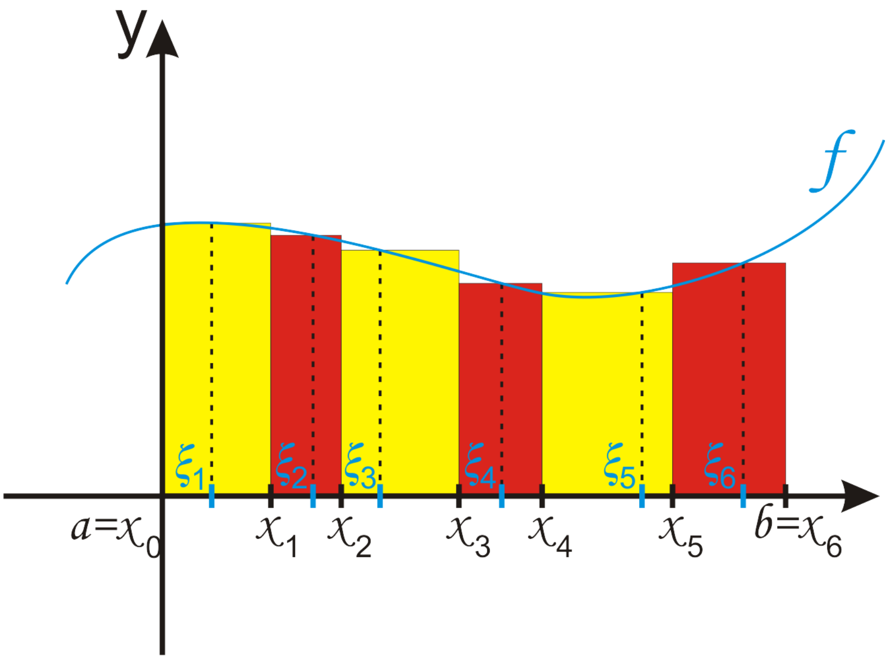
Nechť $f$ je funkce definovaná a ohraničená na uzavřeném intervalu $I = [a, b]$ a nechť $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ je dělení intervalu $I$ a $R = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ je posloupnost čísel z intervalu $I$ takových, že

$$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Potom součet

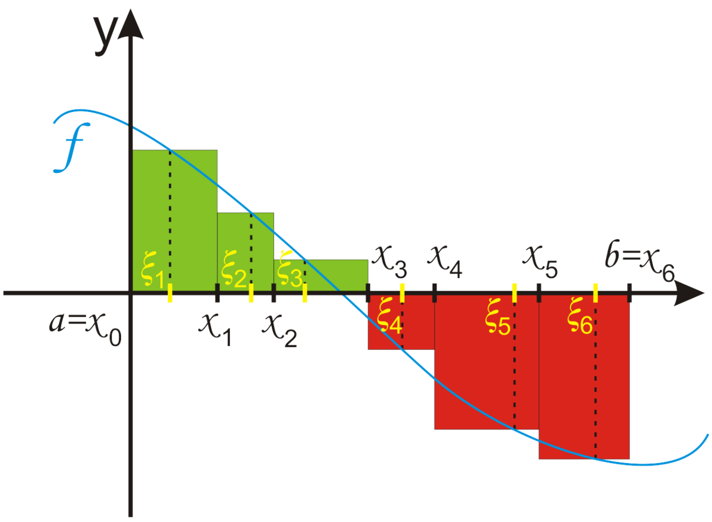
$$\sigma(f, D, R) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

nazýváme *integrální součet* funkce $f$ příslušný dělení $D$ a výběru reprezentantů $R$.




Obr. 15.1: Integrální součet kladné funkce.

Jak je vidět na obr. 15.1, geometricky je integrální součet kladné funkce roven součtu obsahů obdélníků, jejichž základny mají délku rovnu délce jednotlivých podintervalů v dělení $D$ a jejichž výška je rovna funkční hodnotě v reprezentantu z příslušného podintervalu. Je-li funkční hodnota v reprezentantu záporná, tedy obdélníček je pod osou $x$, potom je samozřejmě příspěvek tohoto obdélníčku (podintervalu) do integrálního součtu záporný. Obecně je tedy integrální součet roven součtu obsahů obdélníků nad osou $x$ zmenšený o obsah obdélníků pod ní (viz obr. 15.2).




Obr. 15.2: Integrální součet funkce měnící znaménko.

**Definice 60** (Určitý (Riemannův) integrál)**.**

Nechť $f$ je funkce definovaná a ohraničená na uzavřeném intervalu $I = [a, b]$. Dále nechť $D_n$ je posloupnost dělení intervalu $I$ taková, že $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$ a $R_n$ posloupnost reprezentantů z těchto dělení. Řekneme, že funkce $f$ je Riemannovsky integrovatelná na $I$, jestliže existuje číslo $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, D_n, R_n) = \mathcal{R}.$$

Číslo $\mathcal{R}$ nazýváme *Riemannův (určitý) integrál* funkce $f$ na intervalu $I$ a značíme jej

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Číslo $a$ nazýváme *dolní mez* a číslo $b$ *horní mez* Riemannova integrálu.

Riemannův integrál tedy pro funkci $f$ spojitou na intervalu $I = [a, b]$ získáme takto:

- Interval rozdělíme na podintervaly. Z každého podintervalu vybereme reprezentanta určíme integrální součet.
- Dělení zjemníme (vybereme nové dělení s menší normou) a postup opakujeme.
- Dělení zjemňujeme dokud se integrální součty neustálí. Hodnota, na které se ustálí je Riemannův integrál funkce $f$ na intervalu $I$.

**Věta 46** (Aditivita vzhledem k mezím)**.**

Nechť $f$ je funkce integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a nechť $c \in (a, b)$. Potom je $f$ integrovatelná na intervalech $[a, c]$ a $[c, b]$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Věta 47** (Linearita vzhledem k funkci)**.**

Nechť $f$ a $g$ jsou funkce integrovatelné na intervalu $[a, b]$ a nechť $c \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$\int_a^b \big[f(x) + g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

***Meze integrálu***

Nechť $a < b$. Platí

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

**Věta 48** (Monotonie vzhledem k funkci)**.**

Nechť $f$ a $g$ jsou funkce integrovatelné na intervalu $[a, b]$ takové, že pro $x \in (a, b)$ je $f(x) \leq g(x)$. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

*Důsledek* (Integrál z nezáporné funkce)*.* Uvažujeme-li v předchozí větě $f \equiv 0$ dostaneme, že integrál z funkce nezáporné na celém intervalu, přes nejž integrujeme, je nezáporný.

*Poznámka.* Obdobné tvrzení snadno obdržíme pro funkci nekladnou.

**Věta 49** (Postačující podmínky integrovatelnosti)**.**

Funkce $f$ je Riemannovsky integrovatelná na intervalu $I = [a, b]$, jestliže splňuje aspoň jednu z následujících podmínek.

- Funkce $f$ je na $I$ spojitá.
- Funkce $f$ je na $I$ monotonní.
- Funkce $f$ je na $I$ ohraničená a má na $I$ konečný počet bodů nespojitosti.

## § 15.2 Výpočet

**Věta 50** (Newton–Leibnizova formule)**.**

Nechť je funkce $f$ Riemannovsky integrovatelná na intervalu $I = [a, b]$. Dále nechť je funkce $F$ na intervalu $(a, b)$ primitivní funkce k funkci $f$ a je spojitá na $I$. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

**Příklad 154.**

$$\int_{-2}^{5} x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{5} = \frac{5^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{133}{3}.$$

**Věta 51** (Metoda per partes pro určitý integrál)**.**

Nechť jsou funkce $u, v$ a jejich derivace spojité na intervalu $[a, b]$. Pak platí

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Příklad 155.**

$$\int_1^3 x\ln x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2}\end{matrix}\right| = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{9}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 1\right) - \frac{1}{2}\int_1^3 x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{9}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}\ln 3 - 2$$

**Věta 52** (Substituční metoda pro určitý integrál)**.**

Nechť jsou funkce $f, \varphi$ a $\varphi'$ spojité na příslušných intervalech a nechť je funkce $\varphi$ ryze monotonní. Pak platí

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Příklad 156.**

$$\int_1^5 \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = 2x-1 & x = 5 \Rightarrow t = 9 \\ \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x & x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t & \end{vmatrix}$$

$$= \int_1^9 \sqrt{t}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^9 t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^9$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_1^9 = \frac{1}{3}(27-1) = \frac{26}{3}$$

**Příklad 157.**

$$\int_0^1 x^2(5-2x^3)^4\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = 5-2x^3 & x = 1 \Rightarrow t = 3 \\ \mathrm{d}t = -6x^2\,\mathrm{d}x & x = 0 \Rightarrow t = 5 \\ x^2\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\,\mathrm{d}t & \end{vmatrix}$$

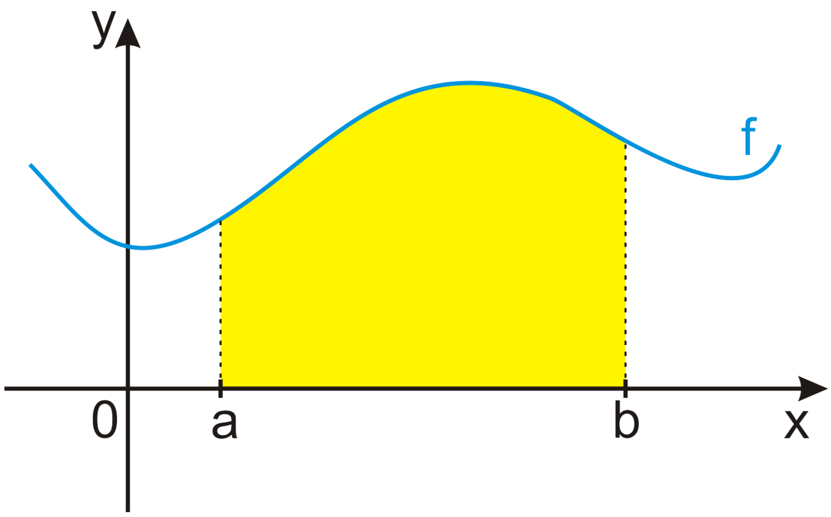
$$= \int_5^3 t^4\left(-\frac{1}{6}\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{6}\int_5^3 t^4\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\int_3^5 t^4\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{t^5}{5}\right]_3^5 = \frac{1}{30}(5^5-3^5) = \frac{2882}{30} = \frac{1441}{15}$$

## § 15.3 Geometrické aplikace

★ Plocha podgrafu kladné funkce na intervalu $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

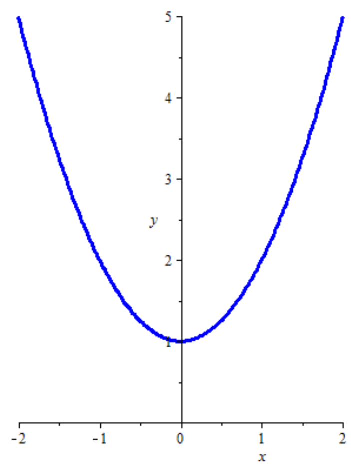



Obr. 15.3: Plocha podgrafu kladné funkce.

**Příklad 158.** *Určete plochu podgrafu funkce* $f(x) = x^2 + 1$ *na intervalu* $I = [-1, 2]$.

Protože $x^2 + 1 = 0$ nemá žádné reálné kořeny, je tato funkce buď stále kladná, nebo stále záporná. Dosazením libovolného čísla zjistíme, který z těchto případů nastává. Neboť $f(0) = 1 > 0$, funkce je kladná.

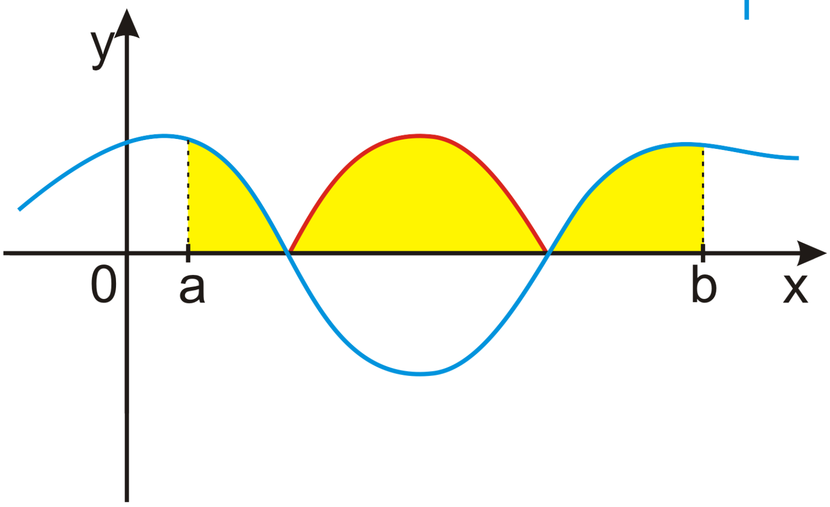
$$\begin{aligned} P &= \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{2} x^2 + 1\,\mathrm{d}x \\ &= \ldots = 6 \end{aligned}$$




Obr. 15.4: Graf funkce $f(x) = x^2 + 1$.

★ Plocha mezi grafem funkce $f$ a osou $x$ na intervalu $[a, b]$:

$$\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x.$$

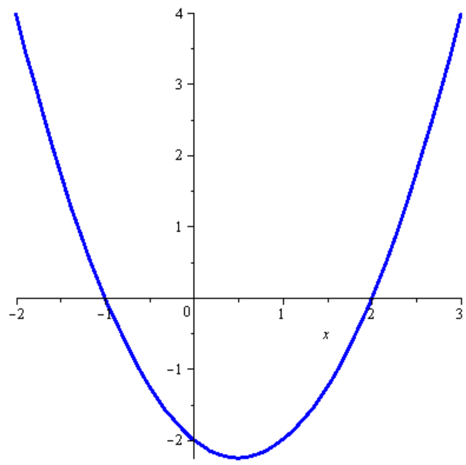



Obr. 15.5: Plocha mezi grafem funkce $f$ měnící znaménko a osou $x$.

**Příklad 159.** *Určete plochu ohraničenou grafem funkce $f(x) = x^2 - x - 2$ a osou $x$ na intervalu $I = [-2, 3]$.*

Protože $x^2 - x - 2 = 0$ má kořeny $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$, snadno zjistíme, že funkce $f$ je na intervalu $I$ kladná pro $x \in (-2, -1) \cup (2, 3)$ a záporná pro $x \in (-1, 2)$.

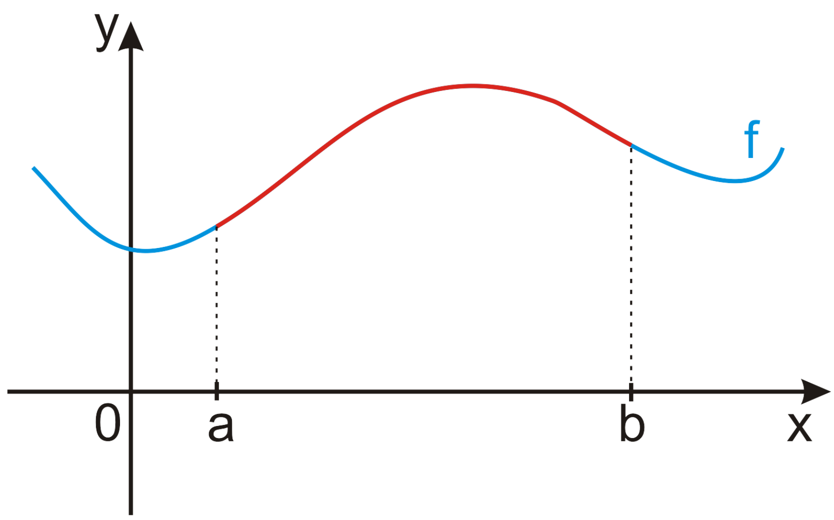
$$\begin{aligned} P &= \int_{-2}^{3} |f(x)| \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{-1} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} (-f(x)) \, \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{2}^{3} f(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \ldots = \frac{49}{6} \end{aligned}$$




Obr. 15.6: Graf funkce $f(x) = x^2 - x - 2$.

★ Délka křivky grafu funkce $f$ na intervalu $[a, b]$:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$



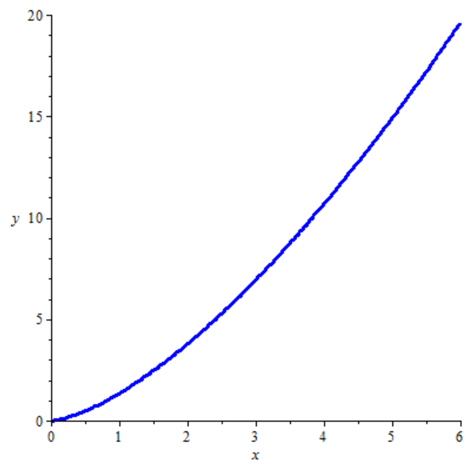

Obr. 15.7: Délka grafu funkce.

**Příklad 160.** *Určete délka křivky grafu funkce* $f(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$ *na intervalu* $I = [0, 6]$.

$$\ell = \int_0^6 \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^6 \sqrt{1 + 4x}\,\mathrm{d}x$$

$$\left| \begin{array}{ll} t = 1 + 4x & x = 6 \Rightarrow t = 25 \\ \mathrm{d}t = 4\,\mathrm{d}x & x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int_1^{25} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$$

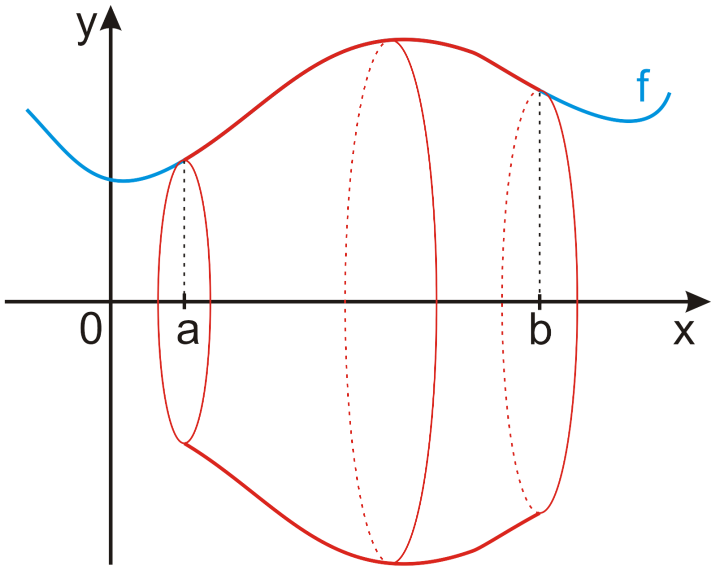
$$= \ldots = \frac{62}{3}$$




Obr. 15.8: Graf funkce $f(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

★ Objem a povrch pláště rotačního tělesa (rotace nezáporné funkce $f$ kolem osy $x$ na intervalu $[a, b]$):

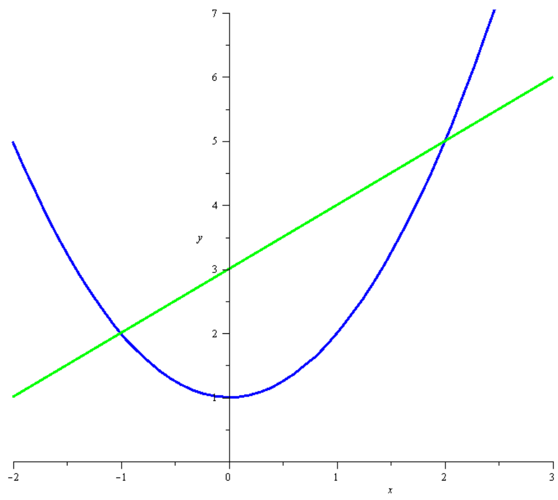
$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x, \quad V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$




Obr. 15.9: Vznik rotačního tělesa.

**Příklad 161.** *Určete plochu ohraničenou grafy funkcí $f(x) = x^2 + 1$ a $g(x) = x + 3$.*

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^2 + 1 &= x + 3 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ x_1 = -1, x_2 &= 2 \end{aligned}$$

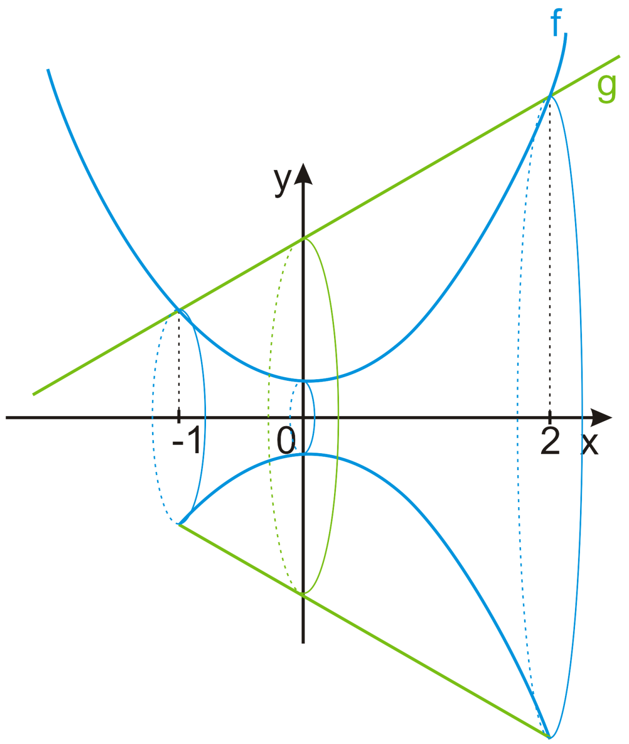



Obr. 15.10: Funkce $f$ a $g$.

$$\int_{-1}^{2} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} (x+3) - (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} 2 + x - x^2\,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{9}{2}.$$

**Příklad 162.** *Určete objem tělesa vzniklého rotací plochy omezené grafy funkcí* $f(x) = x^2+1$ *a* $g(x) = x + 3$ *kolem osy* $x$*.*

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-1}^{2} g^2(x)\,\mathrm{d}x - \pi \int_{-1}^{2} f^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \int_{-1}^{2} (x+3)^2 - (x^2+1)^2\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \int_{-1}^{2} 8 + 6x - x^2 - x^4\,\mathrm{d}x \\
&= \ldots = \frac{117}{5}\pi.
\end{aligned}
$$




Obr. 15.11: Rotace plochy mezi grafy funkcí $f$ a $g$.

## § 15.4 Příklady k procvičení

**Příklad 163.** *Integrujte.*

*(i)* $\int_{-3}^{5} 3x^2 - 5x + 7\,\mathrm{d}x$,

*(ii)* $\int_{0}^{\pi} x + \sin x\,\mathrm{d}x$,

*(iii)* $\int_{0}^{1} \frac{3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$,

*(iv)* $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2-x)\cos x\,\mathrm{d}x$,

*(v)* $\int_{-2}^{1} 3x(2x^2-7)^3\,\mathrm{d}x$,

*(vi)* $\int_{1}^{e^8} \frac{1}{x\sqrt{\ln x + 1}}\,\mathrm{d}x$,

*(vii)* $\int_{0}^{2} \frac{5x^2}{\sqrt{2x^3+9}}\,\mathrm{d}x$,

*(viii)* $\int_{-2}^{0} \frac{x^2}{e^{x^3}}\,\mathrm{d}x$.

**Příklad 164.** *Pomocí výše uvedených vzorců:*

*(i) Spočtěte objem tělesa vzniklého rotací části sinusoidy na intervalu* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *kolem osy* $x$*.*

*(ii) Spočtěte povrch pláště tělesa vzniklého rotací přímky* $y = 2x+1$ *kolem osy* $x$ *na intervalu* $[0, 1]$*.*

*(iii) Určete celý povrch tělesa z bodu (ii).*

**Příklad 165.** *Jsou dány funkce $f(x) = 2 - x$ a $g(x) = x^2$. Určete:*

*(i) Obsah plochy ohraničený jejich grafy.*

*(ii) Objem rotačního tělesa vzniklého rotací této plochy kolem osy $x$.*

**Příklad 166.** *Jsou dány funkce*

$$f(x) = x^2 + 1, \qquad g(x) = 2x + 4.$$

*Načrtněte obrázek a počítaný objekt na obrázku vyznačte.*

*(i) Vypočítejte obsah plochy ohraničené grafy funkcí $f$ a $g$.*

*(ii) Přímka $g$ vytíná z paraboly $f$ ohraničený kus. Jaký je objem tělesa, které vznikne rotací tohoto kusu paraboly $f$ kolem osy $x$?*

*(iii) Parabola $f$ ohraničuje kus přímky $g$. Jaký je povrch pláště komolého kužele, který vznikne rotací tohoto kusu přímky $g$ kolem osy $x$?*

*(iv) Určete objem tělesa, které vznikne rotací plochy těmito funkcemi omezené kolem osy $x$.*

*(v) Přímka $g$ vytíná z paraboly $f$ ohraničený kus. Napište integrál popisující délku tohoto kusu paraboly $f$.*

*(vi) Parabola $f$ ohraničuje kus přímky $g$. Určete délku tohoto kusu přímky $g$.*

## § 15.5 Wolfram|Alpha

- Určitý integrál.

```
integrate (x^3-2)^2 cos(x) for x from 2 to 5

integrate sin(x)/(cos(x)+2) for x from -pi to 0
```

Kapitola

# 16 Diferenciální rovnice

## § 16.1 Úvod

**Definice 61.**

*Diferenciální rovnice* je rovnice, ve které se neznámá funkce vyskytuje spolu se svými derivacemi. *Řád diferenciální rovnice* je nejvyšší derivace neznámé funkce, která se v rovnici vyskytne.

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Budeme se zabývat rovnicemi prvního řadu.

***Rovnice prvního řádu***

- Obecný tvar je $F(x, y, y') = 0$, kde $F$ je funkce tří proměnných.
- Rovnice rozřešené vzhledem k derivaci je $y' = f(x, y)$, kde $f$ je funkce dvou proměnných.

**Definice 62.**

Řešení diferenciální rovnice je funkce $y = y(x)$ (popř. $y = y(t)$, $y = y(x, t)$,...), která splňuje danou diferenciální rovnici.

Řešení diferenciálních rovnic získáme obvykle pomocí integrování, proto budou obsahovat integrační konstanty (tolik integračních konstant, kolikrát budeme integrovat). Tedy tzv. *obecné řešení* (tj. všechna řešení) dostaneme jako množinu danou těmito konstantami.

Řešení dané počáteční podmínkou, např. $y(x_0) = y_0$ (předem zadaná hodnota v daném bodě), se nazývá *partikulární*.

*Poznámka.*

- Řešení diferenciálních rovnic jsou spojité funkce (existují jejich derivace).

- Rovnice $y' = f(x)$ nemá jediné řešení (primitivní funkce tvoří množinu). Pokud uvažujeme podmínku, že $F(x)$ má procházet určitým bodem, pak má rovnice jedno řešení. Podmínka $y(x_0) = y_0$ se nazývá *počáteční podmínka* a rovnice s touto podmínkou *počáteční problém* (Cauchyho úloha).

- Výpočet primitivní funkce $y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ odpovídá řešení rovnice $y' = f(x)$.

- $y' = y$ má řešení $y = c \cdot \mathrm{e}^x$.

- $y'' + y = 0$ slouží k popisu malých kmitů matematického kyvadla. Řešení jsou $y = \sin x$, $y = \cos x$ a každá lineární kombinace těchto dvou funkcí, tedy řešení tvoří lineární prostor.

***Klasifikace***

- Podle počtu nezávisle proměnných na obyčejné (ODR) a parciální (PDR) diferenciální rovnice.
- Podle linearity na lineární a nelineární diferenciální rovnice.
- Podle řádu (rovnice $n$-tého řádu).

**Příklad 167.**

- *$ms'' = F$, kde $s = s(t)$ je poloha bodu na přímce, dráha (Newtonův zákon)*

- *$\alpha^2 u_{xx} = u_t$, kde $u = u(x,t)$ je teplota v čase $t$ v bodě $x$ na přímce (vedení tepla v tyči)*

- *$\alpha^2 u_{xx} = u_{tt}$, kde $u = u(x,t)$ je pozice vzhledem ke klidové poloze, vychýlení v čase $t$ v bodě $x$ na přímce (vlnová rovnice)*

- *$\theta'' + \alpha \sin\theta = 0$, kde $\theta = \theta(t)$ je úhel (matematické kyvadlo)*

- *$Q' = -kQ$, kde $Q = Q(t)$ je množství radioaktivní látky (radioaktivní rozpad)*

***Speciální případy***

- $f(x,y) = f(x)$, tj. $y' = f(x)$
  Odpovídá hledání primitivní funkce k $f(x)$, tedy $y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$. Problém
  $$y' = f(x), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{16.1}$$
  má řešení
  $$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}t.$$
- $f(x,y) = g(y)$, tj. $y' = g(y)$
  Lze převést na předchozí případ využitím inverzní funkce.
  $$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{g(y)}, \quad g(y) \neq 0,$$
  tedy máme problém (16.1) pro funkci $x(y)$ s řešením $x = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t$, což implicitně udává funkci $y = y(x)$.

**Příklad 168.** *Vyřešte rovnici*
$$y' = 3x^2 + \sin x.$$

Přímo integrujeme
$$y = \int 3x^2 + \sin x\,\mathrm{d}x = x^3 - \cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

■

**Příklad 169.** *Vyřešte rovnici*
$$y' = \frac{7}{\mathrm{e}^y + 4y - 3}.$$

Zaměníme proměnné a integrujeme
$$\begin{aligned} x' &= \frac{\mathrm{e}^y + 4y - 3}{7} \\ x &= \frac{1}{7}\int \mathrm{e}^y + 4y - 3\,\mathrm{d}y = \frac{1}{7}(\mathrm{e}^y + 2y^2 - 3y) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}, \\ 7x &= \mathrm{e}^y + 2y^2 - 3y + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

■

## § 16.2 Rovnice se separovatelnými proměnnými

Rovnicí se separovatelnými proměnnými budeme nazývat rovnici $y' = f(x)g(y)$.

**Způsob řešení**

$$\begin{aligned}
y' &= f(x)\cdot g(y)\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x)\cdot g(y) \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{g(y)}\\
\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} &= f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \Big/ \text{integrace}\\
\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} + c_1 &= \int f(x)\,\mathrm{d}x + c_2\\
G(y) &= F(x) + c \quad (c = c_2 - c_1)
\end{aligned}$$

Explicitní řešení pak lze často zapsat ve tvaru $y(x) = G^{-1}\big[F(x)+c\big]$.

**Příklad 170.** *Vyřešme $y' = \frac{y^2-y}{x}$, tedy $f(x) = \frac{1}{x}, g(y) = y^2 - y$.*

Máme

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{y^2-y}{x}\\
\frac{\mathrm{d}y}{y^2-y} &= \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pro} \quad y^2 - y \neq 0 \Rightarrow y \neq 0 \wedge y \neq 1.
\end{aligned}$$

Vypočítáme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(y-1)} = \int \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \ln|y-1| - \ln|y| + c_1,$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c_2.$$

Tedy

$$\begin{aligned}
\ln|y-1| - \ln|y| + c_1 &= \ln|x| + c_2\\
\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| &= \ln|x| + c_3, \quad c_3 \in \mathbb{R}\\
\left|\frac{y-1}{y}\right| &= |x|\cdot \mathrm{e}^{c_3}\\
\frac{y-1}{y} &= \pm\,\mathrm{e}^{c_3}\cdot x = c\cdot x, \quad c \neq 0\\
y &= \frac{1}{1-cx}, \quad c \neq 0.
\end{aligned}$$

Během výpočtu jsme udělali předpoklad, že $y \neq 0 \wedge y \neq 1$. Zkontrolujeme, zda nejde také o řešení rovnice:

- $y = 1$ je řešením a dostaneme jej pro $c = 0$,

- $y = 0$ je řešením, ale nijak jej nedostaneme,

tedy

$$\underbrace{y = \frac{1}{1 - cx},}_{\text{obecné řešení}} \quad \underbrace{y = 0,}_{\text{singulární řešení}} \qquad c \in \mathbb{R}$$

(Obecné řešení obsahuje tolik konstant, jako byl řád rovnice.) ■

**Příklad 171.**

$$y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}, \qquad y(0) = 1$$

Počáteční problém – vypočítáme obecné řešení a pak použitím počáteční podmínky určíme (vybereme) řešení, tedy

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1 + y^2}{1 + x^2} \\ \frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2} &= \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} \\ \operatorname{arctg} y &= \operatorname{arctg} x + c. \end{aligned}$$

Podmínka $y(0) = 1$ dává $\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} 0 + c \Rightarrow c = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Odtud dostáváme řešení

$$y = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}\right)$$

a užitím vzorce $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$ ho lze upravit na

$$y = \frac{x + 1}{1 - x}.$$

■

## § 16.3 Lineární rovnice

Lineární diferenciální rovnice je rovnice tvaru (linearita vzhledem k $y$)

$$y' = a(x)y + b(x). \tag{LDR}$$

**Definice 63.**

Je-li $b(x) \equiv 0$, mluvíme o *homogenní lineární rovnici*

$$u' = a(x)u, \tag{hLDR}$$

v opačném případě o *nehomogenní lineární rovnici*.

*Poznámka.* Obecné řešení rovnice (LDR) (tj. řešení závisející na jedné integrační konstantě) je tvaru $y = y_p + u$, kde $y_p$ je nějaké řešení rovnice (LDR), tzv. *partikulární řešení*, a $u$ je *obecné řešení* rovnice (hLDR).

Obecná metoda řešení je tzv. variace konstant, kdy se nejprve vyřeší homogenní rovnice metodou separace proměnných. Poté se v jejím řešení aditivní konstanta nahradí za neznámou funkci, kterou lze najít dosazením do původní rovnice a integrováním. Tento postup v jistém zobecnění funguje i pro některé rovnice vyšších řádů.

Nás zajímají pouze rovnice prvního řádu, proto použijeme metodu *integračního faktoru*.

**Integrační faktor**

Pro rovnici
$$y' = a(x)y + b(x)$$
je integrační faktor
$$\mu(x) = \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}.$$
Touto funkcí celou rovnici vynásobíme a následně upravujeme.

**Postup**

$$\begin{aligned}
y' - a(x)\,y &= b(x)\\
\big[y' - a(x)\,y\big]\cdot\mu(x) &= b(x)\cdot\mu(x)\\
\underbrace{y'\cdot\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} - y\,a(x)\cdot\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}}_{\left(y\cdot\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\right)'} &= b(x)\cdot\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\\
\left(y\cdot\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\right)' &= b(x)\cdot\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\\
y\cdot\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} &= \int b(x)\cdot\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c
\end{aligned}$$
$$y = \mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int b(x)\cdot\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c\right],\qquad c\in\mathbb{R}$$

**Příklad 172.** *Vyřešte rovnici*
$$y' = 4xy + (2x+1)\,\mathrm{e}^{2x^2}.$$

Integrační faktor je $\mu(x) = \mathrm{e}^{-\int 4x\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-2x^2}$. Vynásobíme jím rovnici se ziskem (vše obsahující $y$ je převedeno doleva)
$$y'\,\mathrm{e}^{-2x^2} - 4xy\,\mathrm{e}^{-2x^2} = 2x+1,$$

odtud

$$\left(y\,\mathrm{e}^{-2x^2}\right)' = 2x+1.$$

Obě strany zintegrujeme

$$y\,\mathrm{e}^{-2x^2} = \int 2x+1\;\mathrm{d}x = x^2+x+c, \qquad c\in\mathbb{R}.$$

Řešením je tedy

$$y = (x^2+x+c)\,\mathrm{e}^{2x^2}, \qquad c\in\mathbb{R}.$$

■

**Příklad 173** (Růst, učení,...)**.** *Jistý druh roste tak, že má jistou maximální délku a rychlost růstu je přímo úměrná délce, kterou ještě mají dorůst. Sestavte rovnici modelující tuto situaci.*

Označíme-li délku v čase $t$ jako funkci $\ell(t)$ a maximální délku $L$, pak příslušná rovnice je

$$\ell'(t) = k[L-\ell(t)],$$

kde konstantu úměrnosti $k$ by bylo nutné určit experimentálně (měření a výpočet pro konkrétní druh/situaci). ■

**Příklad 174** (Výměna tepla mezi tělesem a okolím)**.** *Je nalezena mrtvola, jejíž teplota je změřena na 26.6 °C. O 3 hodiny později je její teplota 21.1 °C, přičemž teplota okolí je 18.3 °C. Určete čas úmrtí za předpokladu, že teplota lidského těla je 37 °C.*

Povrchová teplota tělesa se mění rychlostí, která je přímo úměrná rozdílu teploty tělesa a okolního prostředí (Newtonův teplotní zákon).

Označme teplotu tělesa v čase $t$ jako $\Theta(t)$ [°C] a teplotu okolního prostředí jako $T$ [°C]. Potom musí platit rovnice

$$\Theta'(t) = -k\,[\Theta(t)-T], \qquad \text{kde } k>0 \text{ je konstanta úměrnosti.}$$

Všimněte si, že pokud bude teplota okolního prostředí *vyšší*, než je teplota tělesa (tj. pokud je $\Theta(t)<T$), potom je $\Theta'>0$ a těleso se bude zahřívat. Zatímco pokud bude teplota okolního prostředí *nižší*, než je teplota tělesa (tj. pokud $\Theta(t)>T$), potom je $\Theta'<0$ a těleso se bude ochlazovat.

Při použití výše uvedeného značení (pro čas $t$ v jednotkách [hodin]) máme

$$T=18.3,\ \Theta(0)=26.6 \text{ (teplota v čase nalezení mrtvoly)},\ \Theta(3)=21.1,$$

přičemž funkce $\Theta(t)$ splňuje rovnici

$$\Theta' = -k\,(\Theta-T) \quad\Rightarrow\quad \Theta' = -k\,\Theta + k\,T.$$

Poslední rovnice je lineární diferenciální rovnice pro neznámou funkci $\Theta(t)$. Tuto rovnici vyřešíme např. metodou integračního faktoru $\mu(t)=\mathrm{e}^{kt}$, potom

$$\Theta = T + c\,\mathrm{e}^{-kt} = 18.3 + c\,\mathrm{e}^{-kt}, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Konstanty $c$ a $k$ určíme z informací o počáteční teplotě a o teplotě v čase $t = 3$ [hodiny], tj.

$$26.6 = \Theta(0) = 18.3 + c\,\mathrm{e}^0 = 18.3 + c \;\Rightarrow\; c = 8.3 \;\Rightarrow\; \Theta = 18.3 + 8.3\,\mathrm{e}^{-kt},$$

a dále

$$21.1 = \Theta(3) = 18.3 + 8.3\,\mathrm{e}^{-3k} \;\Rightarrow\; \mathrm{e}^{-3k} = \frac{21.1 - 18.3}{8.3} \approx 0.337$$

$$\Rightarrow\; -3k = \ln 0.337 \;\Rightarrow\; k = -\frac{\ln 0.337}{3} \approx 0.362.$$

Tedy hledané řešení je funkce

$$\Theta(t) = 18.3 + 8.3\,\mathrm{e}^{-0.362t}\,.$$

Najdeme čas úmrtí, tj. určíme čas $t$, pro který je $\Theta(t) = 37$ °C. Tedy

$$18.3 + 8.3\,\mathrm{e}^{-0.362t} = 37 \;\Rightarrow\; \mathrm{e}^{-0.362t} = \frac{37 - 18.3}{8.3} \approx 2.253$$

$$\Rightarrow\; -0.362t = \ln 2.253 \;\Rightarrow\; t = -\frac{\ln 2.253}{0.362} \approx -2.24.$$

Mrtvola byla nalezena přibližně 2 hodiny a 15 minut po smrti. ■

**Příklad 175** (Míchání dvou látek)**.** *Vodní nádrž o celkovém objemu $L = 1000$ [litrů] obsahuje $Q_0 = 0$ [gramů] soli v počátečním čase $t_0 = 0$ [minut]. Do nádrže přitéká roztok o koncentraci soli $c = 50$ [gramů/litr] rychlostí $v = 20$ [litrů/min] a po řádném promíchání s vodou v nádrži z ní vytéká stejnou rychlostí. Určete množství soli $Q(t)$ v nádrži v libovolném čase $t$ a limitní množství pro $t \to \infty$.*

Označili jsme jako $Q(t)$ [g] množství soli v nádrži v libovolném čase $t$ [min]. Potom $Q'(t)$ udává, jak rychle se toto množství mění a přitom musí platit, že

$$Q'(t) = \left(\begin{array}{c}\text{rychlost, s jakou sůl}\\ \text{do nádrže přitéká}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{rychlost, s jakou sůl}\\ \text{z nádrže vytéká}\end{array}\right).$$

Sůl do nádrže *přitéká* rychlostí

$$c \cdot v = 50 \;\;[\mathrm{g/l}] \;\cdot\; 20 \;\;[\mathrm{l/min}] \;\; = 1000 \;\;[\mathrm{g/min}].$$

A protože v nádrži je vždy koncentrace soli rovna $\frac{Q(t)}{L} = \frac{Q(t)}{1000}$ [g/l], sůl z nádrže *vytéká* rychlostí

$$\frac{Q(t)}{L} \cdot v = \frac{Q(t)}{1000} \;\;[\mathrm{g/l}] \;\cdot\; 20 \;\;[\mathrm{l/min}] \;\; = \frac{Q(t)}{50} \;\;[\mathrm{g/min}].$$

Tedy hledaná funkce $Q(t)$ splňuje rovnici

$$Q'(t) = c \cdot v - \frac{Q(t)}{L} \cdot v \qquad \Rightarrow \qquad Q' = 1000 - \frac{Q}{50},$$

což je lineární diferenciální rovnice 1. řádu, a dále splňuje počáteční podmínku

$$Q(t_0) = Q_0 \qquad \Rightarrow \qquad Q(0) = 0. \tag{16.2}$$

Uvedenou rovnici vyřešíme metodou integračního faktoru

$$\mu(t) = \mathrm{e}^{\int \frac{v}{L}\, dt} = \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\, t} \qquad \Rightarrow \qquad \mu(t) = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{50}\, dt} = \mathrm{e}^{0.02\, t}$$

a potom máme (obecně)

$$\begin{aligned}
Q' + \frac{v}{L}\, Q &= c\, v \\
Q'\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\, t} + \frac{v}{L}\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\, t}\ Q &= c\, v\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\, t} \\
\left(Q\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\, t}\right)' &= c\, v\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\, t} \\
Q\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\, t} &= \int c\, v\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\, t}\ dt = c\, v\, \frac{\mathrm{e}^{\frac{v}{L}\, t}}{\frac{v}{L}} + C \\
Q &= c\, L + C\ \mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\, t}, \quad C \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

a pro náš konkrétní příklad

$$\begin{aligned}
Q' + 0.02\, Q &= 1000, \\
Q'\ \mathrm{e}^{0.02\, t} + 0.02\ \mathrm{e}^{0.02\, t}\ Q &= 1000\ \mathrm{e}^{0.02\, t}, \\
\left(Q\ \mathrm{e}^{0.02\, t}\right)' &= 1000\ \mathrm{e}^{0.02\, t}, \\
Q\ \mathrm{e}^{0.02\, t} = \int 1000\ \mathrm{e}^{0.02\, t}\ dt &= 1000\, \frac{\mathrm{e}^{0.02\, t}}{0.02} + C, \\
Q &= 50000 + C\ \mathrm{e}^{-0.02\, t}, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

A protože je počáteční množství známo v (16.2), pro integrační konstantu $C$ platí

$$\begin{aligned}
Q_0 = Q(t_0) = c\, L + C\ \mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\, t_0} \qquad &\Rightarrow \qquad 0 = Q(0) = 50000 + C\ \mathrm{e}^{0}, \\
C = (Q_0 - c\, L)\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\, t_0} \qquad &\Rightarrow \qquad C = -50000,
\end{aligned}$$

a tedy výsledné partikulární řešení (udávající kolik gramů soli bude v nádrži v okamžiku $t$ minut) je tvaru

$$\begin{aligned}
Q = c\, L + (Q_0 - c\, L)\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\, t_0}\ \mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\, t} \qquad &\Rightarrow \qquad Q = 50000 - 50000\ \mathrm{e}^{-0.02\, t}, \\
Q = c\, L + (Q_0 - c\, L)\ \mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\, (t - t_0)} \qquad &\Rightarrow \qquad Q = 50000\left(1 - \mathrm{e}^{-0.02\, t}\right).
\end{aligned}$$

Tedy v závislosti na tom, jestli je $Q_0 > c\, L$ nebo $Q_0 < c\, L$, množství soli v nádrži (záporně exponenciálně) klesá nebo roste, a při $Q_0 = c\, L$ zůstává stále stejné.

Pro $t \to \infty$ je potom

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to\infty} \left\{ c\, L + (Q_0 - c\, L)\ \underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\, (t - t_0)}}_{\to 0} \right\} \\
&\lim_{t\to\infty} Q(t) = c\, L \quad [\mathrm{g}]\ ,
\end{aligned}$$

tedy

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to\infty} 50000\,(1 - \underbrace{\mathrm{e}^{-0.02\,t}}_{\to 0})$$
$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = 50000 \quad [\mathrm{g}]\ .$$

Po dostatečně dlouhé době bude tedy koncentrace soli v nádrži rovna

$$Q_\infty = \frac{c\,L}{L} = c \quad [\mathrm{g/l}], \text{neboli} Q_\infty = \frac{50000}{1000} = 50 \quad [\mathrm{g/l}],$$

což je přesně koncentrace přitékajícího roztoku (samozřejmě, po „nekonečně dlouhé době“ přitékající roztok „nahradí“ původní roztok v nádrži, přičemž vůbec nezáleží na původním množství $Q_0$, tj. na tom, kolik soli bylo v nádrži na počátku). ■

**Příklad 176** (Míchání dvou látek II)**.** *Jak se změní model v Příkladu 175, pokud bude roztok po řádném promíchání s vodou v nádrži vytékat rychlostí pouze $w = 19$ [litrů/min]? Předpokládáme-li, že nádrž má celkový objem 1600 litrů, jaká bude koncentrace roztoku v nádrži v okamžiku jejího naplnění?*

Všimněte si, že se nyní *objem* roztoku *v nádrži mění* (roste) a to rychlostí $v - w = 1$ [litr/min]. To znamená, že nyní sůl z nádrže *vytéká* rychlostí

$$\frac{Q(t)}{L + (v-w)\,(t-t_0)} \cdot w = \frac{Q(t)}{1000+t} \quad [\mathrm{g/l}] \ \cdot 19 \quad [\mathrm{l/min}] \quad = \frac{19\,Q(t)}{1000+t} \quad [\mathrm{g/min}].$$

Výsledná diferenciální rovnice má tedy tvar

$$Q'(t) = c\cdot v - \frac{Q(t)}{L + (v-w)\,(t-t_0)} \cdot w \qquad \Rightarrow \qquad Q' = 1000 - \frac{19\,Q(t)}{1000+t},$$

což je opět lineární diferenciální rovnice 1. řádu, přičemž řešení $Q(t)$ splňuje počáteční podmínku (16.2).

Příslušný integrační faktor je

$$\mu(t) = \mathrm{e}^{\int \frac{19}{1000+t}\,dt} = \mathrm{e}^{19\,\ln(1000+t)} = \mathrm{e}^{\ln(1000+t)^{19}} = (1000+t)^{19}.$$

Tedy platí

$$\begin{aligned}
Q' + \frac{19\,Q(t)}{1000+t} &= 1000\\
Q'\,(1000+t)^{19} + 19\,Q(t)\,(1000+t)^{18} &= 1000\,(1000+t)^{19}\\
\left[Q\,(1000+t)^{19}\right]' &= 1000\,(1000+t)^{19}\\
Q\,(1000+t)^{19} &= 1000\,\frac{(1000+t)^{20}}{20} + C\\
Q = \frac{50\,(1000+t)^{20} + C}{(1000+t)^{19}} &= 50\,(1000+t) + \frac{C}{(1000+t)^{19}}.
\end{aligned}$$

Z počáteční podmínky (16.2) pak určíme hodnotu $C$, tj.

$$0 = Q(0) = 50 \cdot 1000 + \frac{C}{1000^{19}} \;\Rightarrow\; C = -50000 \cdot 1000^{19} = -5 \cdot 10^{61}.$$

Tedy výsledné partikulární řešení je tvaru

$$Q = 50\,(1000 + t) - \frac{5 \cdot 10^{61}}{(1000 + t)^{19}}.$$

Protože v nádrži bylo původně 1000 litrů vody a nádrž se nyní naplňuje rychlostí 1 litr/min, bude nádrž naplněna za 600 minut (tj. za 10 hodin). Tedy v okamžiku $t = 600$ bude v nádrži

$$Q(600) = 50\,(1600) - \frac{5 \cdot 10^{61}}{(1600)^{19}} \approx 79993.4 \quad \text{[g] soli},$$

tj. koncentrace soli bude

$$\frac{Q(600)}{1600} \approx \frac{79993.4}{1600} \approx 49.996 \quad \text{[g/l]},$$

tedy tato koncentrace bude téměř stejná jako u přitékajícího roztoku. ■

## § 16.4 Příklady k procvičení

**Příklad 177.** *Vyřešte rovnice*

*(i)* $y' = 3\cos x + \sin 2x$, *(ii)* $y' = \frac{1}{y}$.

**Příklad 178.** *Vyřešte počáteční problémy*

*(i)* $y' = 3\cos x + \sin 2x, \quad y(0) = 5,$

*(ii)* $y' = \frac{1}{y}, \quad y(2) = 4,$

*(iii)* $y' = \frac{1}{y}, \quad y(2) = -4.$

**Příklad 179.** *Vyřešte rovnice*

*(i)* $2y = x^3 y'$, *(ii)* $y' = 6x - 2y$.

**Příklad 180.** *Vyřešte počáteční problémy*

*(i)* $2y = x^3 y', \quad y(1) = -2,$ *(ii)* $y' = 6x - 2y, \quad y(0) = -2.$

## § 16.5 Wolfram|Alpha

- Diferenciální rovnice.

```
y'=5xy+3x
```

```
y'=5xy+3x,y(0)=1
```

Kapitola

# 17 Aproximace

## § 17.1 Numerická integrace

Numerická integrace se používá především, když

- Nelze získat primitivní funkci.
- Primitivní funkce je velmi složitá.
- Nemáme k dispozici předpis integrované funkce, ale jen sadu naměřených hodnot.

Základní metody numerické integrace vycházejí přímo z konstrukce Riemannova integrálu. Nejjednodušší metodou je tzv. *obdélníkové pravidlo*, které se používá tak, že se zavede dělení intervalu, vypočítá funkční hodnota např. uprostřed dělicích intervalů (popř. v krajních bodech, zejména pokud jde jen o sadu naměřených hodnot a nemáme funkční předpis) a aproximace integrálu je přímo příslušný integrální součet.

Uvažujme funkci $f$ intervalu $I = [a, b]$, na kterém zavedeme dělení $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Dále označme (v souladu se značením při konstrukci integrálu) výběr reprezentantů $R = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ (např. středy dělicích intervalů).

Potom pomocí obdélníkového pravidla lze odhadnout hodnotu integrálu jako

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

**Příklad 181.** *Pomocí obdélníkového pravidla odhadněte*

$$\int_0^{10} x^2\,\mathrm{d}x.$$

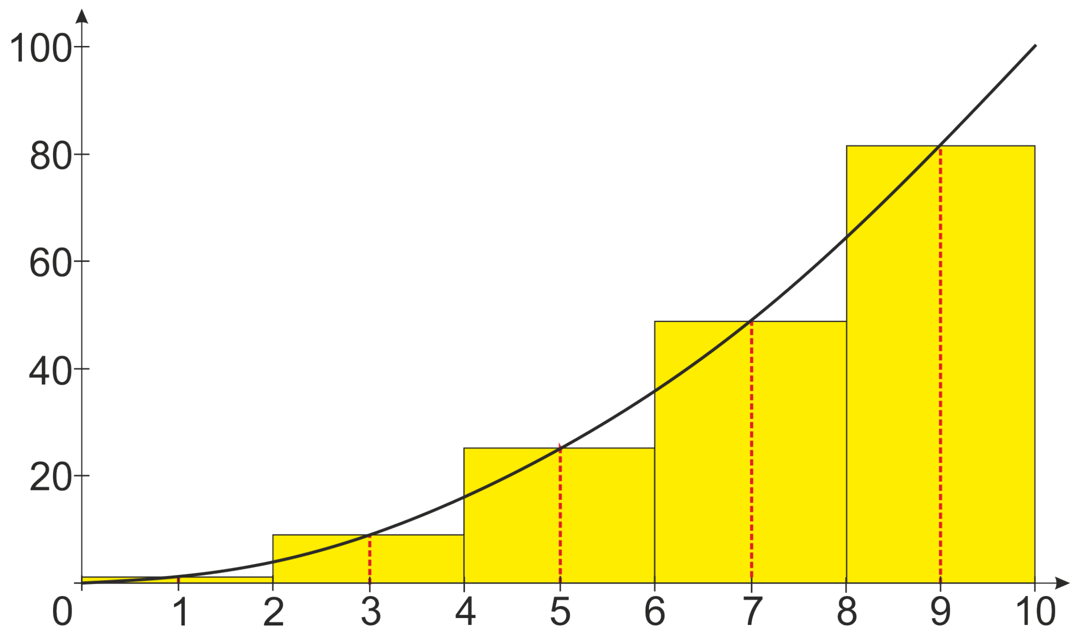
*Interval rozdělte ekvidistantně na 5 dělicích intervalů a funkční hodnoty použijte ze středů těchto intervalů.*

Interval $[a, b] = [0, 10]$ máme rozdělit na 5 stejně dlouhých částí, dělicí body tedy budou $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ a délka každého z těchto intervalů je 2. Výběrem reprezentantů jsou středy dělicích intervalů, tedy $R = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Máme tedy $f(x) = x^2$ a obdélníkové pravidlo dává

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx f(1)\cdot(2-0) + f(3)\cdot(4-2) + f(5)\cdot(6-4) + f(7)\cdot(8-6) + f(9)\cdot(10-8).$$

Výpočet je tedy následující

$$\int_0^{10} x^2\,\mathrm{d}x \approx 1^2\cdot 2 + 3^2\cdot 2 + 5^2\cdot 2 + 7^2\cdot 2 + 9^2\cdot 2 = 330.$$




Obr. 17.1: Obdélníkové pravidlo.

V tomto případě lze samozřejmě provést přesný výpočet

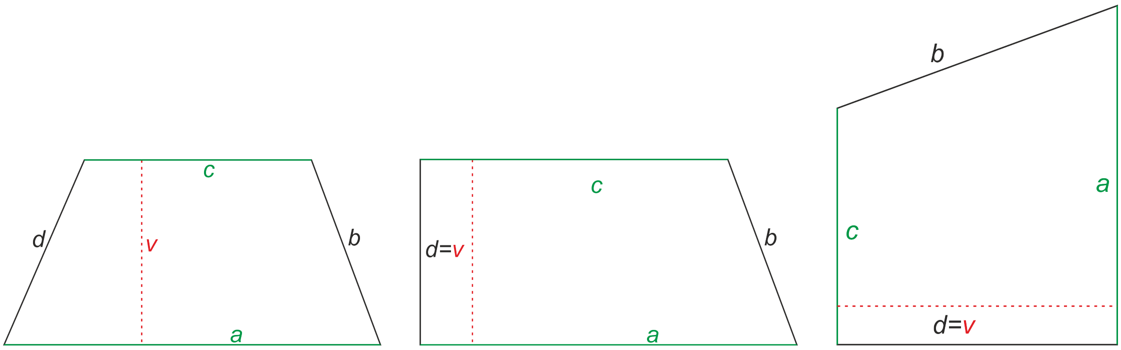
$$\int_0^{10} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = \frac{1000}{3} - 0 = 333{,}\overline{3}.$$

Pokročilejší a často i přesnější metodou je tzv. *lichoběžníkové pravidlo*. Postup je takový, že se funkční hodnoty v dělicích bodech propojí, čímž vznikne lomená čára. Následným postupem podobným tomu z obdélníkového pravidla pak aproximujeme plochu podgrafu sadou lichoběžníků.

Připomeňme, že obsah lichoběžníku lze vypočítat jako polovinu součtu rovnoběžných stran násobenou výškou lichoběžníku, tj.

$$S = \frac{a+c}{2}\cdot v,$$

kde strany jsou popsány na obrázku 17.2




Obr. 17.2: Obsah lichoběžníku.

Uvažujme funkci $f$ intervalu $I = [a, b]$, na kterém zavedeme dělení $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Potom pomocí lichoběžníkového pravidla lze odhadnout hodnotu integrálu jako

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

a jestliže je dělení ekvidistantní, tedy každý dělicí interval má stejnou délku $\ell$, lze pravidlo zjednodušit na

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{\ell}{2}\Big[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big].$$

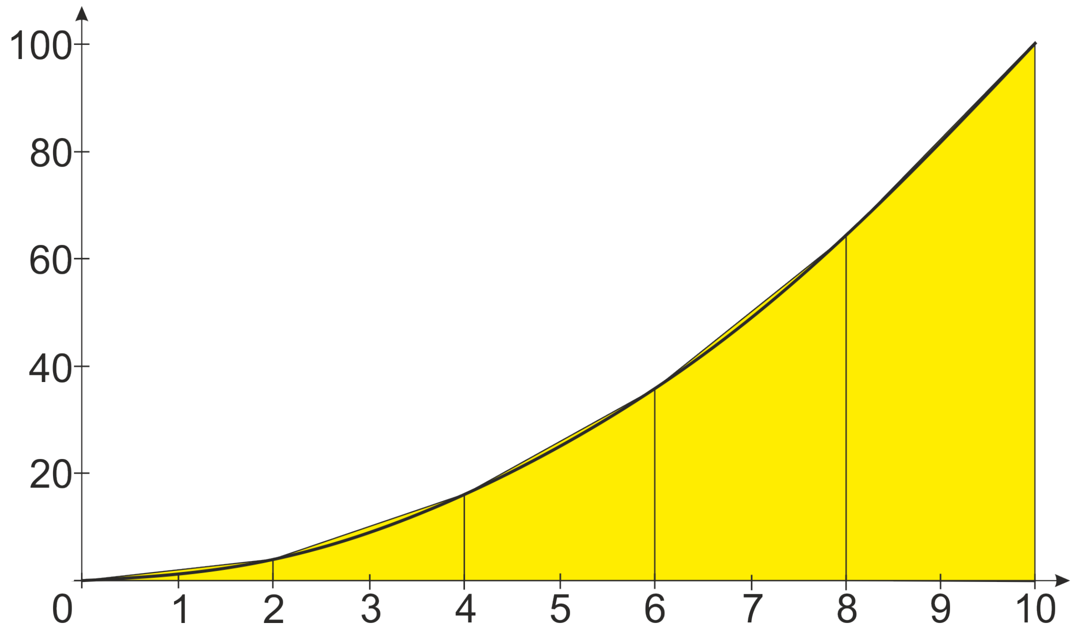
**Příklad 182.** *Pomocí lichoběžníkového pravidla odhadněte*

$$\int_0^{10} x^2\,\mathrm{d}x.$$

*Interval rozdělte ekvidistantně na 5 dělicích intervalů.*

Opět máme $f(x) = x^2$, $[a, b] = [0, 10]$ a dělicí body $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Délka každého dělicího intervalu je $\ell = 2$, dostáváme tedy

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{\ell}{2}[f(0) + 2f(2) + 2f(4) + 2f(6) + 2f(8) + f(10)]\\ &= 0^2 + 2\cdot 2^2 + 2\cdot 4^2 + 2\cdot 6^2 + 2\cdot 8^2 + 10^2 = 8 + 32 + 72 + 128 + 100 = 340.\end{aligned}$$




Obr. 17.3: Lichoběžníkové pravidlo.

Na obrázku 17.3 vidíme, že pokročilejší obdélníkové pravidlo má v tomto příkladě nižší přesnost než obdélníkové kvůli tvaru funkce (konvexnost kladné funkce znamená, že lichoběžníkové pravidlo pokryje větší plochu). Je tedy nutné vždy získat co nejvíce informací o aproximované funkci a zvolit vhodnou metodu. Také je nutné se zajímat o samotný princip metod a ne jen „bezhlavě“ používat ty, které jsou obecně přesnější, v konkrétních případech to nemusí platit.

*Poznámka.*

- Samozřejmě existuje celá řada dalších metod. Často je nutné rozhodovat se, zda vyžadovat vyšší přesnost i za cenu zvětšení početní náročnosti.
- Například tzv. Simpsonovo pravidlo pracuje tak, že místo lomené čáry nahradíme integrovanou funkci sadou parabol (jedna procházejicí body $x_0, x_1, x_2$, druhá body $x_2, x_3, x_4$ atd., neboť parabola je jednoznačně určena třemi body, musíme mít sudý počet dělicích intervalů). Všimněte si souvislosti s interpolací (viz dále).
- Dělicí body a intervaly, nebo aspoň jejich počet jsou často přímo dány tím, že neznáme předpis funkce, ale máme k dispozici jen sadu naměřených hodnot. Postup je pak podřízen tomu, abychom tyto hodnoty co nejlépe využili a vše je nutné volit tak, aby nám pro výpočet „nic nechybělo“, protože není možné získat další hodnoty.

## § 17.2 Algebraická rovnice

Algebraická rovnice je rovnice typu

$$P_n(x) = 0,$$

kde $P_n(x)$ je polynom stupně $n$ v proměnné $x$. Protože řešit algebraickou rovnici je totéž, jako hledat kořeny polynomu $P_n$, známe již způsob, jak najít všechny celočíselné kořeny takové rovnice (dělitelé absolutního člene, Hornerovo schéma). Připomeňme, že je-li komplexní číslo $z = \alpha + \beta i$ kořenem polynomu $P$, pak je jeho kořenem i číslo komplexně sdružené $\bar{z} = \alpha - \beta i$. Protože (dle základní věty algebry) má polynom stupně $n$ v $\mathbb{C}$ právě $n$ kořenů (počítáno včetně násobnosti), má polynom lichého stupně aspoň jeden reálný kořen.

**Věta 53** (Odhad velikosti kořenů)**.**

Buď

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

normovaný polynom stupně $n$.
Pak pro kořeny $x_1, \ldots, x_n$ rovnice

$$P_n(x) = 0$$

platí

$$|x_i| \leq 1 + A, \quad (i = 1, \ldots, n),$$

kde

$$A = \max\{|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_1|, |a_0|\}.$$

**Věta 54** (Descartes I)**.**

Počet kladných kořenů polynomu $P_n(x)$ (počítáno s násobností) je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti jeho koeficientů nebo o sudé číslo menší.

**Věta 55** (Descartes II)**.**

Počet záporných kořenů polynomu $P_n(x)$ (počítáno s násobností) je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů polynomu $P_n(-x)$ nebo o sudé číslo menší.

**Příklad 183.** *Použijte předchozí tvrzení na polynom*

$$P(x) = x^7 - 14x^5 + 3x^2 + 1.$$

- $\operatorname{st} P = 7 \quad \Rightarrow \quad P$ má (včetně násobnosti) 7 kořenů, nejméně jeden je reálný (použita Věta 14).
- Koeficienty $P$ jsou (nuly pro přehlednost vynecháme) $1, -14, 3, 1 \quad \Rightarrow \quad$ 2 znaménkové změny $\quad \Rightarrow \quad$ 2 nebo 0 kladných kořenů (použita Věta 54).

- $P(-x) = -x^7 + 14x^5 + 3x^2 + 1$. Koeficienty $P(-x)$ jsou (nuly pro přehlednost vynecháme) $-1, 14, 3, 1 \quad \Rightarrow \quad 1$ znaménková změna $\quad \Rightarrow \quad 1$ záporný kořen (použita Věta 55).
- $A = \max\{|-14|, |3|, |1|\} = 14 \quad \Rightarrow \quad |x_i| \leq 15, \quad i = 1, \dots, 7$ (použita Věta 53).

*Celkem:*
Pro kořeny polynom $P(x) = x^7 - 14x^5 + 3x^2 + 1$ jsou 2 možnosti.

1. 1 záporný $\mathbb{R}$ a 6 $\mathbb{C}$,
2. 1 záporný $\mathbb{R}$, 2 kladné $\mathbb{R}$ a 4 $\mathbb{C}$.

Přičemž všechny reálné kořeny leží v intervalu $[-15, 15]$.
(Velikost všech kořenů, i komplexních, je $\leq 15$, $|z| = |\alpha + \beta i| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.)

## § 17.3 Metoda bisekce (půlení)

**Definice 64** (Kořen s přesností $\varepsilon$)**.**

Číslo $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ nazýváme *kořen polynomu $P(x)$ s přesností $\varepsilon$* $(0 < \varepsilon \in \mathbb{R})$, jestliže skutečný kořen polynomu $P(x)$ leží v intervalu $(\tilde{x} - \varepsilon, \tilde{x} + \varepsilon)$.

Např.:

$$P(x) = 4x^4 - 31x^3 - 121x^2 + 244x + 660, \quad P(2) = 480, \quad P(3) = -210,$$

tedy (podle první Bolzanovy věty) v intervalu $(2, 3)$ má polynom $P$ kořen. Střed tohoto intervalu, tj. číslo $\tilde{x} = 2,5$, je tedy kořenem polynomu $P$ s přesností $\varepsilon = 0,5$.

(Skutečným kořenem je číslo $2,75$.)

Z předchozího příkladu je zřejmé, že kořen lichého stupně polynomu $P$ lze určit s libovolnou přesností tak, že najdeme interval, ve kterém leží jen tento kořen (např. pomocí věty o odhadu velikosti kořenů a užitím Hornerova schématu).

Označme si tento interval jako $(a, b)$. Střed tohoto intervalu $\tilde{x}_1 = \frac{a+b}{2}$ je prvním odhadem kořene, tedy je kořenem daného polynomu s přesností $\frac{b-a}{2}$. Navíc zřejmě $P(a) \cdot P(b) < 0$ (hodnoty polynomu $P$ v krajních bodech intervalu $(a, b)$ mají opačná znaménka).

Spočteme tedy hodnotu $P(\tilde{x}_1) = P(\frac{a+b}{2})$ a z intervalů $(a, \frac{a+b}{2}), (\frac{a+b}{2}, b)$ vybereme ten, v jehož krajních bodech nabývá polynom $P$ opačná znaménka, protože kořen jistě leží v této polovině intervalu.

Střed tohoto podintervalu označíme jako druhé přiblížení ke kořeni $\tilde{x}_2$, tedy jde o kořen polynomu $P$ s přesností $\frac{b-a}{4}$. Stejně můžeme postupovat libovolně dlouho a získat tak kořen polynomu s libovolnou přesností.

*Poznámka.*

- Jestliže kdykoli dostaneme $P(\tilde{x}_i) = 0$, pak je číslo $\tilde{x}_i$ (přesným) kořenem polynomu $P$.
- Metodu bisekce je nejvhodnější používat na aproximaci jednonásobných kořenů. Existují metody, které převedou daný polynom na jiný, který má stejné kořeny, ale všechny jednonásobné.
- Existují také různá vylepšení metody bisekce (např. metoda zlatého řezu), pomocí kterých je možné kořen s danou přesností najít rychleji.

**Příklad 184.** *Odhadněte nezáporný kořen polynomu* $P(x) = x^3 - 3x - 1$ *s přesností aspoň* $0,02$.

Nejprve pomocí věty o odhadu velikosti kořenů uděláme základní odhad:

$$\max\{1, 3, 1\} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x_i \in [-4, 4].$$

Nás zajímají jen kladné kořeny, proto se omezíme na interval $[0, 4]$ a na něm provedeme tzv. separaci kořenů — tj. interval rozdělíme na větší počet subintervalů a v dělících bodech určíme hodnotu polynomu $P$.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | -1 | -3 | 1 | 17 | 51 |

Vzhledem ke znaménkové změně (používáme první Bolzanovu větu) se hledaný kořen nachází v intervalu $(1, 2)$. (Číslo 1 ani 2 kořenem není, neboť v nich nemá polynom hodnotu nula.)

Průběh bisekce přehledně shrňme do tabulky.

| $a$ | $\tilde{x}_i = \frac{a+b}{2}$ | $b$ | $P(a)$ | $P(\tilde{x}_i)$ | $P(b)$ | chyba $\left(\frac{b-a}{2}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,5 | 2 | − | − | + | 0,5 |
| 1,5 | 1,75 | 2 | − | − | + | 0,25 |
| 1,75 | 1,875 | 2 | − | − | + | 0,125 |
| 1,875 | 1,9375 | 2 | − | + | + | 0,0625 |
| 1,875 | 1,90625 | 1,9375 | − | + | + | 0,03125 |
| 1,875 | 1,890625 | 1,90625 | | | | 0,015625 |

Řešením zadaného problému je tedy číslo $1,890625$, které je kořenem polynomu $P$ s přesností $0,015625$.

## § 17.4 Taylorův polynom

**Věta 56** (Taylorova věta)**.**

Nechť má funkce $f$ v okolí bodu $x_0$ vlastní derivace až do řádu $n+1$ pro nějaké $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro všechna $x$ z tohoto okolí platí

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

kde $\xi$ je vhodné číslo ležící mezi $x_0$ a $x$.

Vynecháme-li zbytek $R_n(x)$, obdržíme tzv. *Taylorův polynom*:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i.$$

Pokud položíme $x_0 = 0$, získáme tzv. *Maclaurinův polynom*:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i.$$

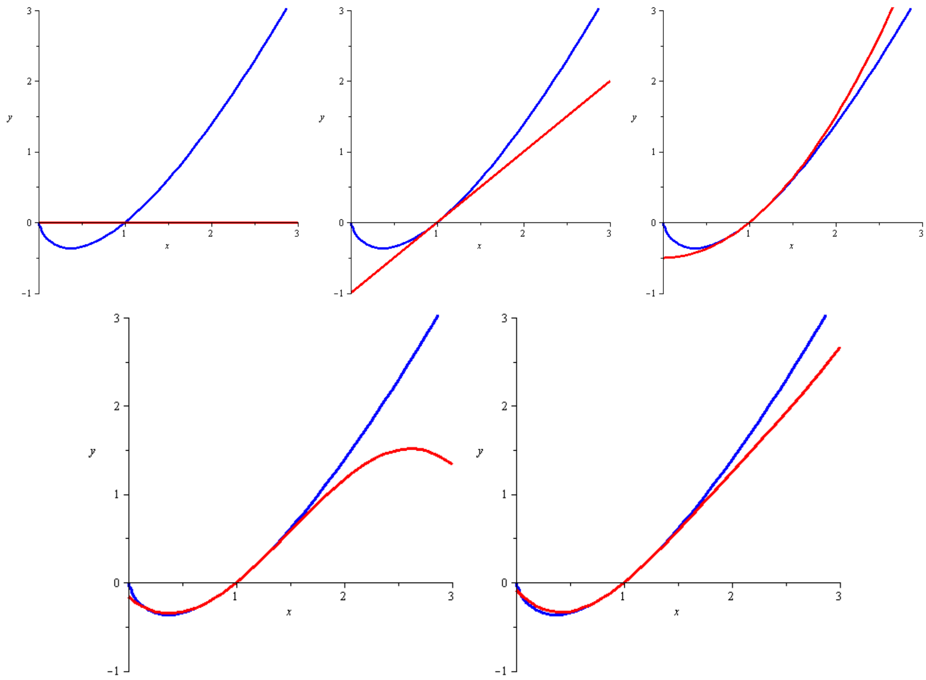
**Příklad 185.** *Určete Taylorův polynom 4. řádu se středem v bodě $x_0 = 1$ funkce $f(x) = x \ln x$.*

$$f'(x) = 1 + \ln x,\ f''(x) = \tfrac{1}{x},\ f'''(x) = \tfrac{-1}{x^2},\ f^{(4)}(x) = \tfrac{2}{x^3}.$$

$$f(1) = 0,\ f'(1) = 1,\ f''(1) = 1,\ f'''(1) = -1,\ f^{(4)}(1) = 2.$$

Tedy

$$\begin{aligned} T(x) &= 0 + \tfrac{1}{1!}(x-1) + \tfrac{1}{2!}(x-1)^2 + \tfrac{-1}{3!}(x-1)^3 + \tfrac{2}{4!}(x-1)^4 \\ &= \tfrac{1}{12}(x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 10x - 3). \end{aligned}$$



Obr. 17.4: Graf Taylorova polynomu funkce $f(x) = x \ln x$ řádu $0 - 4$.

**Příklad 186.** *Určete Maclaurinův polynom 5. řádu funkce* $f(x) = \cos x$.

$$f(x) = \cos x,\ f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f'''(x) = \sin x,\ f^{(4)} = \cos x,\ f^{(5)} = -\sin x.$$

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -1,\ f'''(0) = 0,\ f^{(4)}(0) = 1,\ f^{(5)}(0) = 0.$$

Tedy

$$\begin{aligned} M(x) &= 1 + \tfrac{0}{1!}x + \tfrac{-1}{2!}x^2 + \tfrac{0}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \tfrac{0}{5!}x^5 \\ &= \tfrac{1}{24}x^4 - \tfrac{1}{2}x^2 + 1. \end{aligned}$$

## § 17.5 Interpolace – Lagrangeův interpolační polynom

Jsou dány navzájem různé body $x_i$, $i = 1, \ldots, n+1$, a hodnoty funkce $f$ v těchto bodech. Cílem je najít polynom $P_n$ stupně nejvýše $n$ takový, aby platilo $P_n(x_i) = f(x_i)$ pro $i = 1, \ldots, n+1$. Body $x_i$ se nazývají *uzly* a polynom $P_n$ *interpolační polynom*.

**Věta 57.**

Pro $(n+1)$ daných dvojic čísel $[x_i, f(x_i)]$, $i = 1, \dots, n$, $x_i \neq x_k$ pro $i \neq k$, existuje právě jeden interpolační polynom $P_n$ (stupně nejvýše $n$) takový, že platí $P_n(x_i) = f(x_i)$ pro $i = 1, \dots, n$.

**Definice 65.**

*Lagrangeův interpolační polynom* definujeme vztahem

$$P_n(x) = \ell_1(x)f(x_1) + \ell_2(x)f(x_2) + \dots + \ell_{n+1}(x)f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \ell_i(x)f(x_i),$$

kde polynomy $\ell_i(x)$ jsou tvaru

$$\ell_i(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_{n+1})}.$$

**Příklad 187.** *Pro funkci zadanou tabulkou najděte interpolační polynom.*

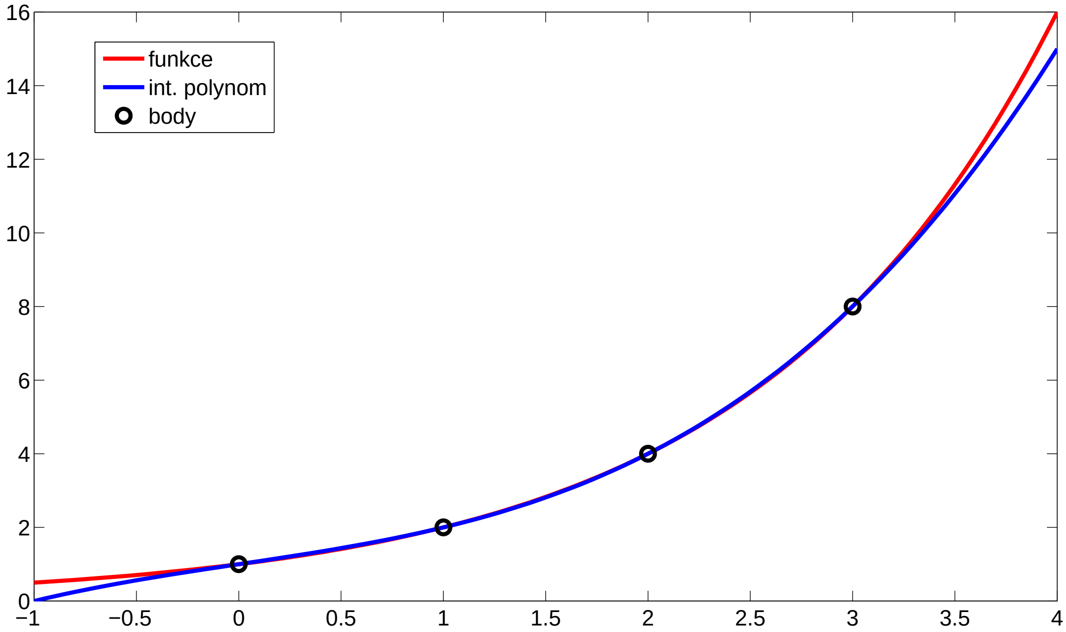
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 1 | 2 | 4 | 8 |

Nejprve sestrojíme polynomy $\ell_i$:

$$\ell_1(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} \qquad \ell_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}$$
$$\ell_2(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \qquad \ell_4(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}.$$

Pak

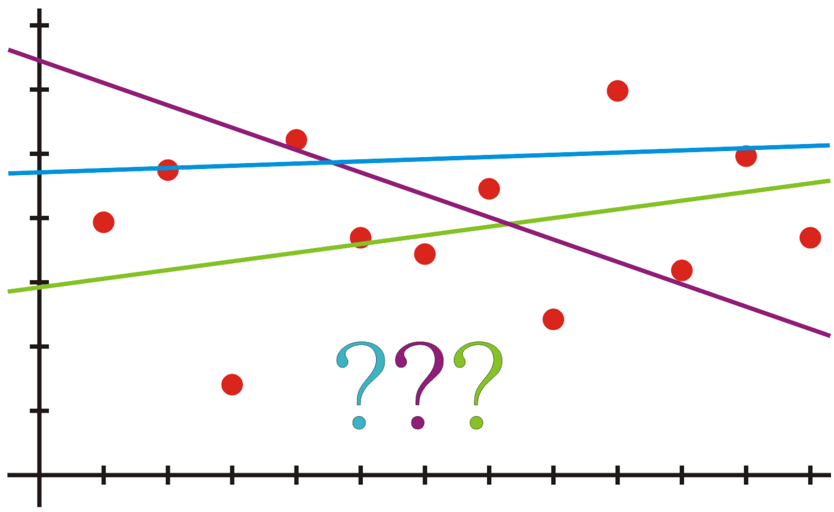
$$\begin{aligned} P_3(x) &= 1\cdot\ell_1(x) + 2\cdot\ell_2(x) + 4\cdot\ell_3(x) + 8\cdot\ell_4(x) \\ &= 1\cdot\frac{x^3-6x^2+11x-6}{-6} + 2\cdot\frac{x^3-5x^2+6x}{2} \\ &\qquad + 4\cdot\frac{x^3-4x^2+3x}{-2} + 8\cdot\frac{x^3-3x^2+2x}{6} \\ &= \frac{x^3}{6} + \frac{5x}{6} + 1 \end{aligned}$$




Obr. 17.5: Řešení příkladu 187.

## § 17.6 Lineární regrese – Metoda nejmenších čtverců

Pomocí jednoduché lineární regrese popisujeme vztah mezi proměnnými $x$ a $y$. Snažíme se najít funkci $f$ tak, aby vztah $y = f(x)$ co nejlépe vystihoval závislost mezi $x$ a $y$.

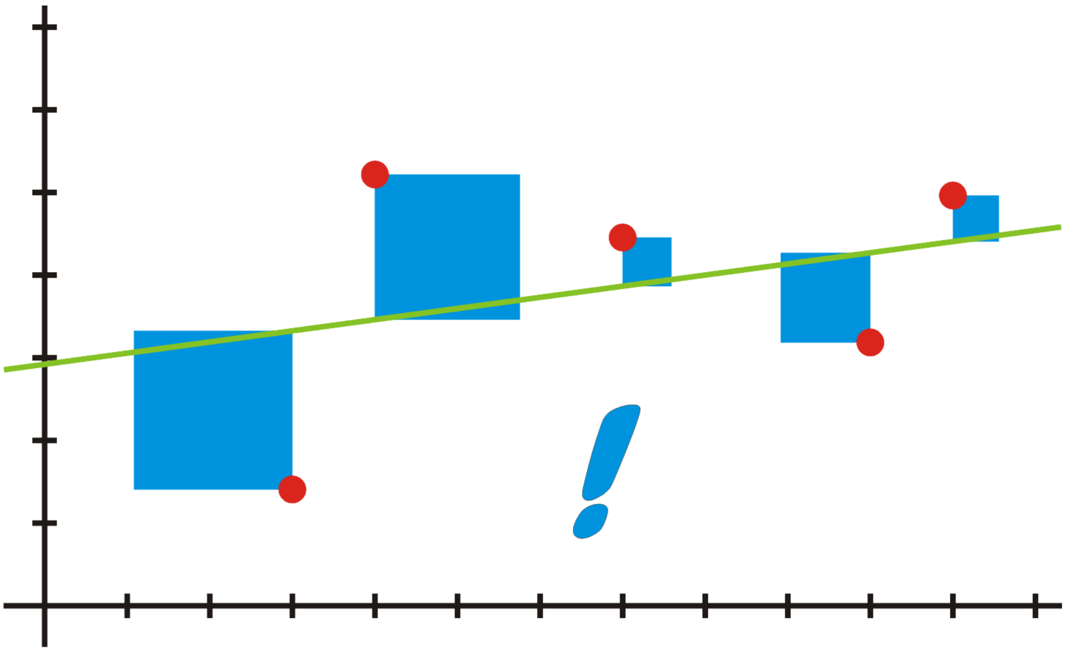



Obr. 17.6: Prokládání přímky množinou bodů.

Měřítkem kvality vybrané funkce $f$ je nejmenší hodnota součtu čtverců vzdáleností

$$\sum_{i=1}^{n} \big[y_i - f(x_i)\big]^2 \to \min .$$

Odtud plyne její název – *metoda nejmenších čtverců*.



Obr. 17.7: Přímka získaná metodou nejmenších čtverců.

Regresní přímka $f(x) = ax + b$ vyjadřuje nejjednodušší závislost $x$ na $y$. Pomocí metody nejmenších čtverců určíme její parametry $a$ a $b$:

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i,$$
$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Například při dávkování léků ovcím je někdy nezbytné vážit ovce, což je ovšem spjato s praktickými problémy. Proto je snaha najít jednodušší způsob, takovým může být například odhad hmotnosti na základě obvodu hrudníku.

**Příklad 188.** *Deset ovcí bylo zváženo a byl jim změřen obvod hrudníku. Najděte vztah, který nejlépe popisuje závislost hmotnosti na obvodu hrudníku.*

| *obvod [cm]* | *80* | *88* | *88* | *83* | *86* | *80* | *83* | *87* | *86* | *88* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *hmotnost [kg]* | *30* | *35* | *35* | *33* | *33* | *31* | *31* | *35* | *34* | *35* |

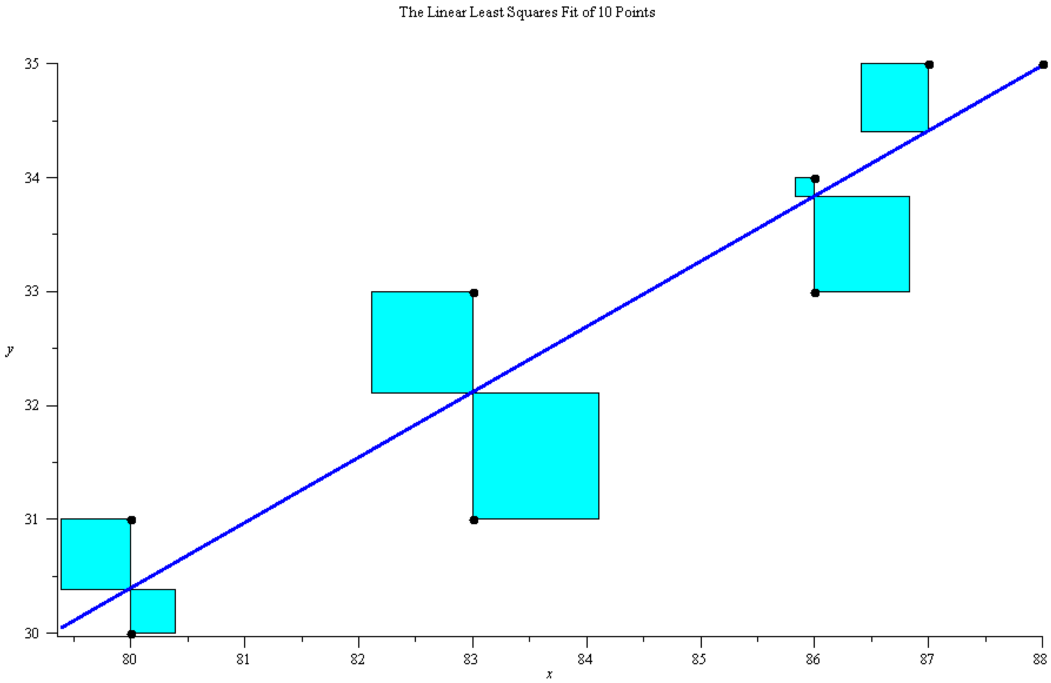
$x =$ obvod hrudníku, $y =$ hmotnost

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 849, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 72171, \quad \sum_{i=1}^{10} y_i = 332, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 28239.$$

Odtud

$$\begin{aligned} 72171a + 849b &= 28239 \\ 849a + 10b &= 332 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= 58/101 \doteq 0.57 \\ b &= -1571/101 \doteq -15.55 \end{aligned}$$

Rovnice přímky vyjadřující závislost hmotnosti na obvodu hrudníku je $y = 0.57x - 15.55$.




Obr. 17.8: Řešení příkladu 188.

## § 17.7 Příklady k procvičení

**Příklad 189.** *Experimentálně jsme zjistili hodnoty funkce $f$ v následující tabulce.*

| $x_i$ | -2 | -1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 3 | 2 | 4 | 3 | 5 | 4 |

*Odhadněte* $\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$ *pomocí*

(i) *obdélníkového pravidla s 5 dělicími intervaly a výškou obdélníku danou vždy v levém krajním bodě dělicího intervalu,*

(ii) *obdélníkového pravidla s 5 dělicími intervaly a výškou obdélníku danou vždy v pravém krajním bodě dělicího intervalu,* *(iii) lichoběžníkového pravidla s 5 dělicími intervaly.*

**Příklad 190.** *Je dána funkce* $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 5$ *na intervalu* $[-3, 3]$. *Odhadněte* $\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ *níže popsanými způsoby. Následně spočtěte přesnou hodnotu daného integrálu.*

*(i) Uvažujete ekvidistantní dělení tohoto intervalu na 3 subintervaly a použijete obdélníkové pravidlo s výškou obdélníku danou vždy uprostřed dělicího intervalu.*

*(ii) Uvažujete ekvidistantní dělení tohoto intervalu na 6 subintervalů a použijete obdélníkové pravidlo s výškou obdélníku danou vždy uprostřed dělicího intervalu.*

*(iii) Uvažujete ekvidistantní dělení tohoto intervalu na 3 subintervaly a použijete lichoběžníkové pravidlo.*

*(iv) Uvažujete ekvidistantní dělení tohoto intervalu na 6 subintervalů a použijete lichoběžníkové pravidlo.*

**Příklad 191.** *Odhadněte všechny reálné kořeny polynomu* $P(x) = 6x^3+19x^2+2x-3$ *s chybou nejvíce* $0,05$.

*(POZOR! Věta o odhadu velikosti kořenů funguje jen pro normované polynomy.)*

**Příklad 192.** *Pomocí Taylorova polynomu třetího řádu počítaného se středem* $x_0 = \frac{1}{2}$ *odhadněte hodnotu funkce*

$$f(x) = \ln(2x)$$

*v bodě* $x = 1$.

**Příklad 193.** *Pomocí Maclaurinova polynomu čtvrtého řádu odhadněte hodnotu funkce*

$$f(x) = x^3 + \cos x$$

*v bodě* $\frac{1}{2}$.

**Příklad 194.** *Sestrojte Taylorův polynom čtvrtého řádu se středem* $x_0 = -1$ *pro funkci*

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

**Příklad 195.** *Sestrojte Maclaurinův polynom třetího řádu pro funkci*

$$(a) \quad f(x) = \mathrm{e}^{\cos x}, \qquad (b) \quad g(x) = \operatorname{arctg} x.$$

**Příklad 196.** *V tabulce jsou uvedeny čtyři měření. Odhadněte pomocí Lagrangeova interpolačního polynomu hodnotu měřené veličiny v čase* $2,5$. *(Polynom není nutné před dosazením upravovat.)*

| *čas* | *1* | *2* | *3* | *4* |
|---|---|---|---|---|
| *naměřeno* | *-2* | *0* | *1* | *1* |

**Příklad 197.** *V následující tabulce jsou uvedeny čtyři hodnoty funkce* $f$. *Aproximujte tuto funkci pomocí Lagrangeova interpolačního polynomu. Polynom upravte. Poté odhadněte pomocí získaného polynomu hodnotu funkce* $f$ *pro* $x = \frac{1}{2}$.

| $x$ | *-1* | *0* | *1* | *2* |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | *6* | *-4* | *-2* | *0* |

**Příklad 198.** *Pomocí metody nejmenších čtverců najděte vztah popisující lineární závislost teploty na čase zjištěnou měřením zaznamenaným v tabulce*

| *čas* | *1* | *2* | *3* | *4* |
|---|---|---|---|---|
| *teplota* | *-2* | *-1* | *2* | *1* |

*Jaká teplota odpovídá času* $\frac{5}{2}$*?*

**Příklad 199.** *Pomocí metody nejmenších čtverců najděte vztah popisující lineární závislost teploty na čase zjištěnou měřením zaznamenaným v tabulce*

| *čas* | *-1* | *0* | *1* | *2* |
|---|---|---|---|---|
| *teplota* | *3* | *-1* | *0* | *2* |

*Body a přímku načrtněte a na obrázku popište metodu nejmenších čtverců.*

**Příklad 200.** *Sestrojte Lagrangeův interpolační polynom pro funkci, pro niž platí*

$$f(-1) = 2, \quad f(1) = -2, \quad f(3) = 1.$$

**Příklad 201.** *Sestrojte Lagrangeův interpolační polynom procházející body*

$$[-2, 5], [-1, 3], [0, 1], [1, 0].$$

**Příklad 202.** *Metodou nejmenších čtverců proložte přímku body*

*(i)* $[0, 1], [1, 3], [2, -1], [3, 3]$,

*(ii)* $[1, 1], [2, 0], [0, 3], [-2, 5]$.

**Příklad 203.** *Aproximujte všechny kořeny rovnice* $x^3 - 7x + 5 = 0$ *s chybou menší než* $0,1$.

## § 17.8 Wolfram|Alpha

- Kořeny algebraické rovnice.

```
solve x^5+5x^4-4x^3+12x-1=0
```

- Taylorův polynom.

```
series of xln(x) at x=1, order 7
```

- Lagrangeův interpolační polynom.

```
interpolating polynomial [0,1],[1,2],[2,4],[3,8]
```

- Metoda nejmenších čtverců.

```
linear fit [-1,3],[0,-1],[1,0],[2,2]
```

# Příloha A Řešení

Příklad 4:

(i) $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$,

(ii) $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -14 \end{pmatrix}$,

(iii) 10,

(iv) $-13$.

Příklad 14:

(i) $\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 3 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$,

(ii) $\begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 9 & 6 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$,

(iii) nelze,

(iv) $\begin{pmatrix} 14 & 6 & 4 \\ 26 & 12 & 10 \\ 38 & 18 & 16 \end{pmatrix}$,

(v) nelze.

Příklad 15:

$$BAC = \begin{pmatrix} 10 & -50 \\ -4 & 44 \\ -8 & 36 \\ -19 & -5 \end{pmatrix}.$$

Příklad 16:

$$C^T A^T B^T = (BAC)^T.$$

Příklad 17: Matice má plnou hodnost, je tedy ekvivalentní s jednotkovou maticí. Podle použitých úprav může vyjít jakákoli horní trojúhelníková matice plné hodnosti.

Příklad 18: $h(E) = 3$, nezávislé jsou sloupce 1, 2 a 4, nebo 1, 3 a 4.

Příklad 19:

$$F^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ -11 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 17 & 3 & 9 & -11 \\ 21 & 3 & 13 & -15 \\ -7 & -1 & -3 & 5 \\ 29 & 3 & 17 & -19 \end{pmatrix},$$

$G^{-1}$ neexistuje (matice $G$ je singulární).

Příklad 20:

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -9 & 7 \\ 14 & 11 \end{pmatrix}, \quad AB^T = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ -6 & 0 & 7 \\ -10 & 17 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T B = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Příklad 21:

$$\langle u, v\rangle = -2, \quad uv^T = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad u^T v = (-2).$$

Příklad 22:

$$h(A) = 2.$$

Příklad 23: Např.

$$h\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1, \qquad h\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

$$h\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 3, \qquad h\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 4.$$

(Matice jsou ve schodovitém tvaru v němž hodnost = počet nenulových řádků.)

Příklad 24:

Např. $u_1, u_2, u_4$.

Příklad 25:

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & 12 & -7 \\ 5 & 9 & -8 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -13 & 0 & -3 \\ 2 & -5 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 27:

(i) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$

(ii) nemá řešení,

(iii) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 - 2p \\ p \end{pmatrix}, p \in \mathbb{R},$

(iv) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(7 - 12p + 4q) \\ \frac{1}{5}(8p - q - 3) \\ p \\ q \end{pmatrix},$

(v) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$

(vi) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-4p \\ 3p-2 \\ p \end{pmatrix}, p \in \mathbb{R},$

(vii) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$

(viii) nemá řešení,

(ix) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17/8 \\ -3/4 \\ -7/4 \\ -11/8 \end{pmatrix},$

(x) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(3q+7) \\ \frac{1}{4}(4p+5q+1) \\ q \\ p \end{pmatrix}, p, q \in \mathbb{R}.$

Příklad 32:

(i) $-8$,

(ii) 13,

(iii) 41,

(iv) $-32$,

(v) $8x^2 - 5x$,

(vi) $-2a^3b - 3a^3 + 7a^2b + 2a^2b^2 + 3ab^2 + 6ab - 6a^2 + 6b^2$.

Příklad 33:

(i) $-10$,

(ii) 189,

(iii) $-310$.

Příklad 34:

25.

Příklad 35:

(i) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

(ii) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$

(iii) $\begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix},$

(iv) $\begin{pmatrix} -11 \\ 3 \\ -13 \end{pmatrix}.$

Příklad 36:

79.

Příklad 37:

100. (Jde o kvádr.)

Příklad 40:

(i) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$

(ii) determinant je nulový - Cramerovo pravidlo nelze použít,

(iii) determinant je nulový - Cramerovo pravidlo nelze použít,

(iv) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Příklad 41:

$$x = 2, y = -1, z = 3.$$

Příklad 42: SLR nemá řešení.

Příklad 43:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 - 4p \\ p - 4 \\ p \end{pmatrix}, p \in \mathbb{R}.$$

Příklad 44:

$$x_2 = 2.$$

Příklad 59:

(i) $3x^4 + x^3 + x^2 + x + 10$,

(ii) $9x^4 - 12x^3 + 23x^2 - 22x + 40$,

(iii) $-10x^4 + 23x^3 - 25x^2 + 16x - 4$,

(iv) $-54x^6 + 56x^5 - 174x^4 - 18x^7 + 126x^3 - 418x^2 + 245x - 239$.

Příklad 60:

(i) $2x - 3 + \frac{2x^3 - x^2 + 5x}{x^4 - x^3 - x + 1}$,

(ii) $\frac{3}{2}x^4 + \frac{3}{4}x + 1 + \frac{-\frac{x}{4} + 6}{2x^3 - 1}$.

Příklad 61:

(i) $P(x) = (x + 2)(x + 1)^2(x - 1)(x - 3)$,

(ii) $Q(x) = (x + 2)x(x - 1)^4$.

Příklad 62: (*i*) Dvojnásobným, (*ii*) dvojnásobným.

Příklad 63:

(i) ryze lomená,

(ii) $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 + \frac{5x^2 + 4x + 1}{x^3 + 1}$,

(iii) $\frac{2}{9} + \frac{-\frac{4}{9}x^8 + 12x^6 - 4x^2 + \frac{47}{9}}{9x^9 + 2x^8 - 1}$.

Příklad 64:

(i) v $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ $\{-1, \frac{3}{2}\}$,

(ii) v $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ $\{-2\}$,

(iii) v $\mathbb{R}$ nemá řešení, v $\mathbb{C}$ $\{2 \pm 5i\}$.

Příklad 65:

(i) a) $x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$, b) $x \in (-\infty, -1] \cup [\frac{3}{2}, \infty)$,

(ii) a) $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, b) $x \in \mathbb{R}$,

(iii) $x \in \mathbb{R}$,

(iv) a) $x \in (-2, 1)$, b) $x \in (-2, 1]$,

(v) a) $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (3, \infty)$, b) $x \in (-\infty, 0) \cup [3, \infty)$,

(vi) a) $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, -1/2) \cup (2, \infty)$,
b) $x \in (-\infty, -3] \cup (-1, -1/2) \cup [2, \infty)$,

(vii) a) $x \in (-\infty, -3) \cup (\frac{-3-\sqrt{17}}{4}, \frac{-3+\sqrt{17}}{4}) \cup (2, \infty)$,
b) $x \in (-\infty, -3] \cup (\frac{-3-\sqrt{17}}{4}, \frac{-3+\sqrt{17}}{4}) \cup [2, \infty)$.

Příklad 66:

- $f \cap x :$ $[3, 0], [-5, 0]$,
- $f \cap y :$ $[0, 15]$.

Příklad 67:

$$x \in (-\infty, -1] \cup (\tfrac{1}{3}, 3].$$

Příklad 68:

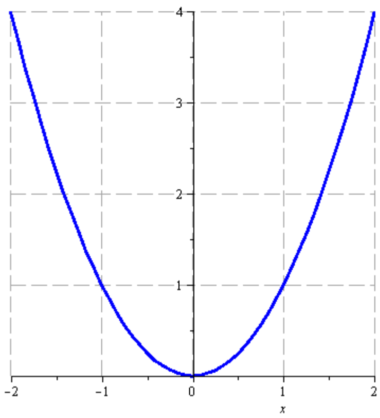
$$R(x) = \frac{2}{3}x + 1 + \frac{-8x^2 + 7x - 18}{3(3x^3 - 2x + 1)}.$$

Příklad 69: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$, $[0, 5/3], [1, 1]$.

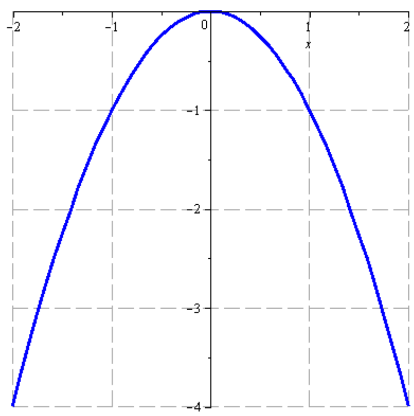
Příklad 70: $y = -x + 1$.

Příklad 71: $y = \frac{1}{10}x + 2$, zajímá nás hodnota pro $x = 12$, tedy dávka je 3,2 gramu.

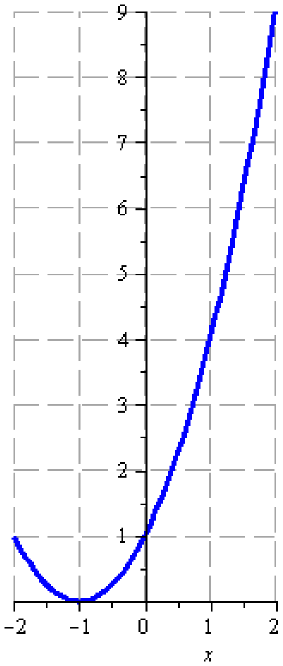
Příklad 74:



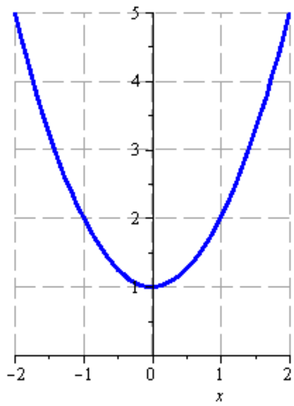

Obr. A.1: (i) a (iii)



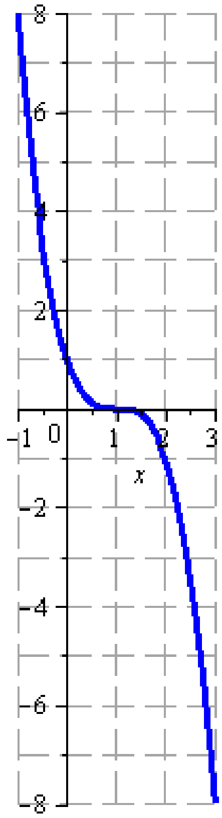

Obr. A.2: (ii)




Obr. A.3: (iv)

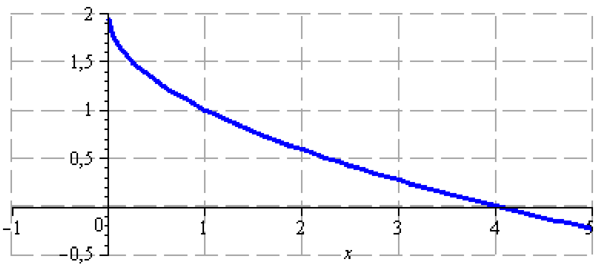



Obr. A.4: (v)

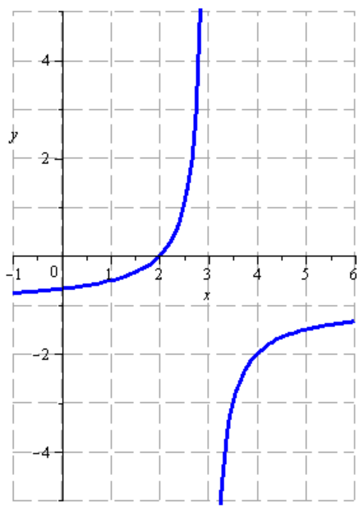



Obr. A.5: (vi)

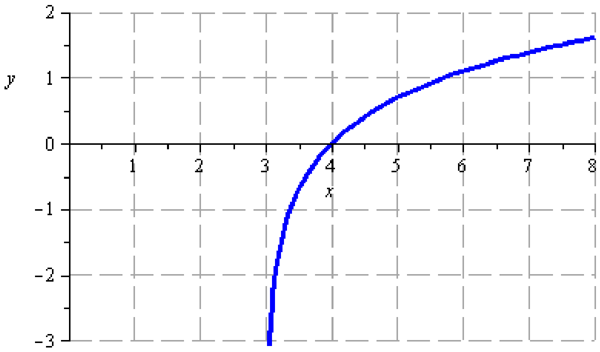
Příklad 75:



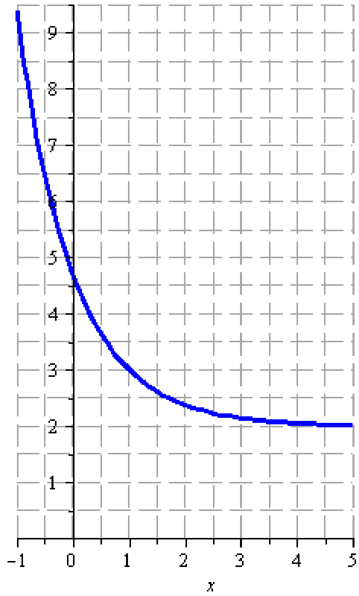

Obr. A.6: (i)




Obr. A.7: (ii)

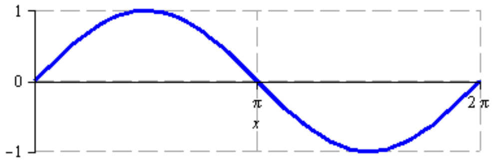



Obr. A.8: (iii)

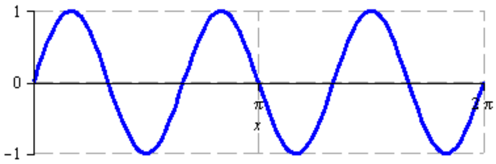



Obr. A.9: (iv)

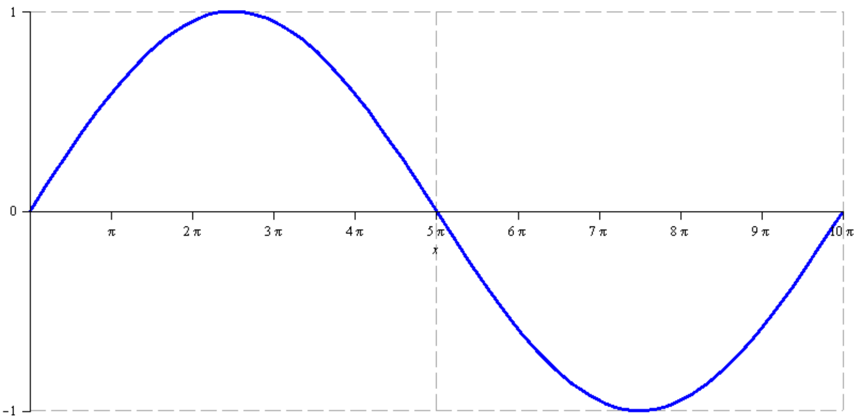
Příklad 76:



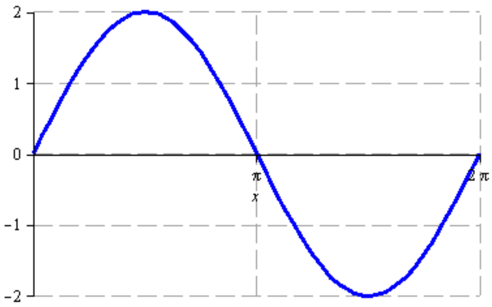

Obr. A.10: (i)



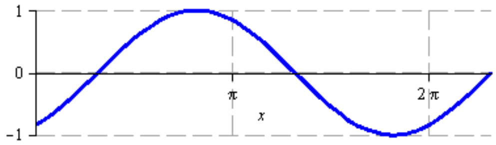

Obr. A.11: (ii)



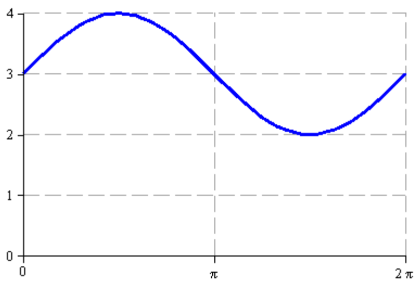

Obr. A.12: (iii)



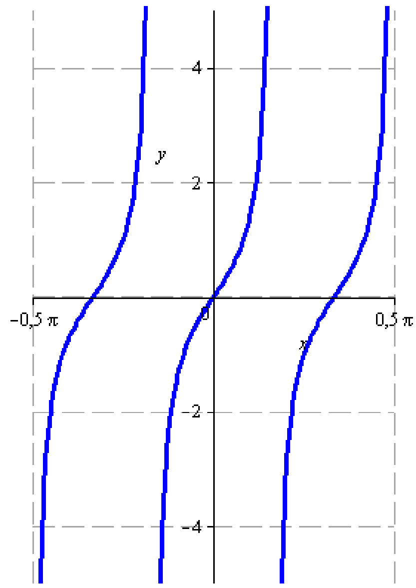

Obr. A.13: (iv)




Obr. A.14: (v)




Obr. A.15: (vi)




Obr. A.16: (vii)

Příklad 77: b

Příklad 78:

- (i) $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$,
- (ii) $\mathrm{D}(f) = (-\infty, 3]$,
- (iii) $\mathrm{D}(f) = (-3, \infty)$,
- (iv) $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$,
- (v) $\mathrm{D}(f) = (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$,
- (vi) $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$,
- (vii) $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2} + 1; k \in \mathbb{Z}\}$,
- (viii) $\mathrm{D}(f) = (-2, 4) \cup (4, 10]$.

Příklad 79:

(i) $\left(\frac{2x}{1-x}\right)^2$, (ii) $\frac{2x^2}{1-x^2}$, (iii) $\left(\frac{2\ln x}{1-\ln x}\right)^2$, (iv) $\ln^2 x^2$.

Příklad 80:

(i) $x^5, \operatorname{cotg} x$,

(ii) $\sqrt[3]{x}, \sin x, x^3+3$,

(iii) $\cos x, x^7$,

(iv) $\log_2 x, \sqrt{x}, \operatorname{tg} x, 2+x$.

Příklad 81:

a) $\sin x, \left(\frac{1}{5}\right)^x$,

b) $\sin x, \frac{1}{x}, 5^x$.

Příklad 82:

(i) $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$,

(ii) $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{3x+1}{2}}$,

(iii) $f^{-1}(x) = 3^x + 2$,

(iv) $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{5}} x = -\log_5 x$.

Příklad 84:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}.$$

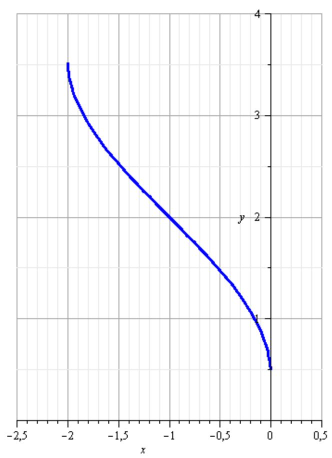
Příklad 85:

(i) $D(f) = (1, \infty)$,

(ii) $D(g) = [-5, -4]$.

Příklad 86: $D(f) = (-\frac{21}{2}, -10) \cup (-10, 1)$.

Příklad 87:



Příklad 88:

$$D(f) = [-4, -2) \cup (1, 4].$$

Příklad 89:

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, 1], \qquad D(g) = (0, 1).$$

Příklad 90: Funkce $f$ je lichá, $g$ sudá a funkce $h_1$ a $h_2$ nejsou ani liché, ani sudé.

Příklad 96:

(i) 16,
(ii) $\frac{\pi}{2}$,
(iii) $\infty$,
(iv) $-\infty$,
(v) neexistuje,
(vi) $-\infty$.

Příklad 97:

(i) $\frac{\sin 2}{2}$,
(ii) 0,
(iii) $-12$,
(iv) neexistuje,
(v) neexistuje,
(vi) $\infty$.

Příklad 98:

(i) $\frac{1}{2}$,
(ii) $\frac{1}{3}$,
(iii) $\frac{1}{4}$,
(iv) 0,
(v) $-\infty$,
(vi) $-3$.

Příklad 99:

(i) 3,
(ii) 0.

Příklad 101:

(i) 0,
(ii) 0,
(iii) $-6x^2 + 2x - 4$,
(iv) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{5x^3} + \frac{18}{5\sqrt[5]{x^2}}$,
(v) $\frac{7}{2} + \frac{3}{2x^2} - \frac{5}{4\sqrt{x^3}}$,
(vi) $-\frac{3x^2+48x+1}{(3x^2-1)^2}$,
(vii) $2\cos x - \frac{1}{\sin^2 x}$,
(viii) $\operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x}$.

Příklad 102:

(i) $-4$,
(ii) 2.

Příklad 103:

(i) $2, -3, \frac{9}{2}$,

(ii) $\frac{\pi}{4}, 1, -\pi$.

Příklad 104:

(i) $x\,\mathrm{e}^x(2\sin x + x\sin x + x\cos x)$,

(ii) $f(x) = x^2 6^x(3 + x\ln 6)$,

(iii) $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$,

(iv) $\frac{-1}{x\ln^2 x}$,

(v) $\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$,

(vi) $\frac{-2}{1+4x^2}$.

Příklad 105:

(i) $3x\,\mathrm{e}^x[(\sin x - 3\ln x)(x+2) + x\cos x - 3]$,

(ii) $4^x[2 + (2x+6)\ln 4]$,

(iii) $\frac{9x^2-4x+5}{2\sqrt{3x^3-2x^2+5x-1}}$,

(iv) $\frac{-14x}{(x^2+1)\ln^2(x^2+1)}$,

(v) $\frac{x^2-2x-1}{2(x^2+1)^2}\sqrt{\frac{x^2+1}{1-x}}$,

(vi) $-6x^2\sin x^3\cos x^3$,

(vii) $\sin^2(2x) + 2x\sin(4x)$,

(viii) $\frac{-2\sin x}{\cos x\ln^2\cos x}$,

(ix) $7^{2x^3+x-9}\ln 7(6x^2+1)$,

(x) $\frac{2}{x^2+1}$.

Příklad 106:

(i) $5x^4 + 5^x\ln 5$,

(ii) $x^x(1+\ln x)$,

(iii) $(\sin x)^{\cos x}(\cos x\operatorname{cotg} x - \sin x\ln\sin x)$,

(iv) $(\ln x)^{\operatorname{tg} x}(\frac{\ln\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x\ln x})$.

Příklad 107:

(i) $x^4\sqrt[5]{5^x}(25 + x\ln 5)$,

(ii) $-30x^4\operatorname{tg} x^5\ln\cos^3 x^5$,

(iii) $\frac{-2}{x\ln\frac{2}{3}\sqrt{1-\log^2_{\frac{2}{3}} x^2}}$,

(iv) $\frac{1}{(x-3)\ln(x-3)} + \frac{1}{\sqrt{-x^2+10x-21}}$,

(v) $\frac{-2\operatorname{cotg} x}{\ln^2(\sin^2 x)}$,

(vi) $2\sin x(x\sin x\cos x^2 + \sin x^2\cos x)$.

Příklad 108:

$$f'(x) = 15x^2 + 2\sin x - \frac{3}{2x^3}, \quad g(x) = x^3\frac{4\ln x - 1}{\ln^2 x},$$
$$h(x) = \frac{2\cos(2x)}{3\sqrt[3]{\sin^2(2x)}}.$$

Příklad 109:

$$f'''(-2) = 1\,224.$$

Příklad 110: $f_x = 3y^4 - 30x^5$, $f_y = 12xy^3 + 2y$, $f_{xx} = -150x^4$, $f_{xy} = 12y^3$, $f_{yy} = 36xy^2 + 2$.

Příklad 111: $f_x = \frac{2}{y^3} \cos \frac{2x}{y^3}$, $f_y = \frac{-6x}{y^4} \cos \frac{2x}{y^3}$.

Příklad 112:

(i) 2,

(ii) 1,

(iii) $\infty$,

(iv) $\frac{1}{3}$,

(v) 0,

(vi) $\frac{1}{2\pi}$.

Příklad 113:

(i) 0,

(ii) $-1$,

(iii) $\infty$,

(iv) $-\infty$.

Příklad 114:

(i) $y = 11x + 25$,

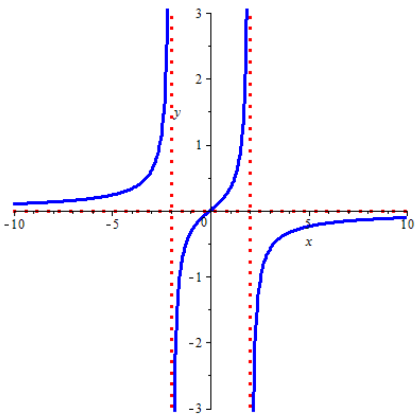
(ii) $x - y + \pi = 0$.

Příklad 115:

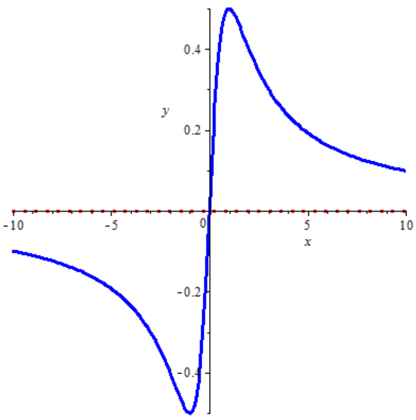
(i) $y = \frac{4-x}{3}$,

(ii) $y = 12x - 110$.

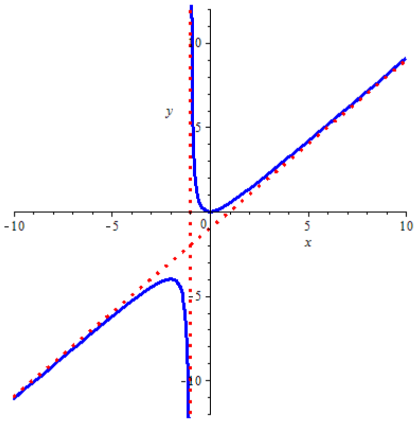
Příklad 120:



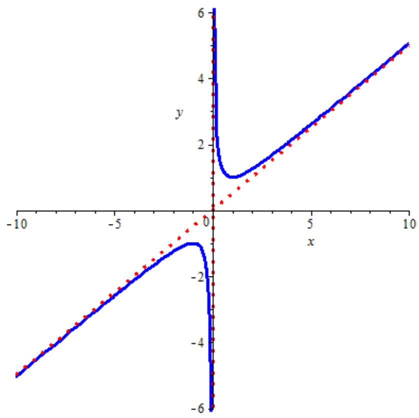
Obr. A.17: (i)



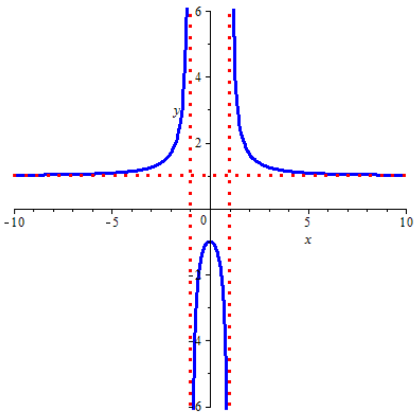
Obr. A.18: (ii)



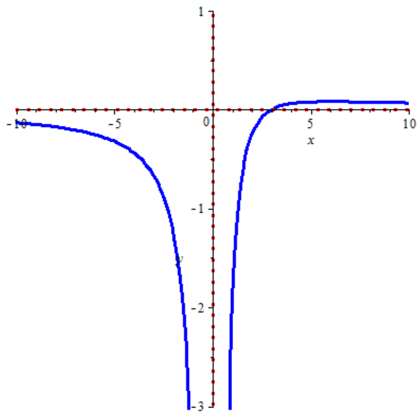

Obr. A.19: (iii)



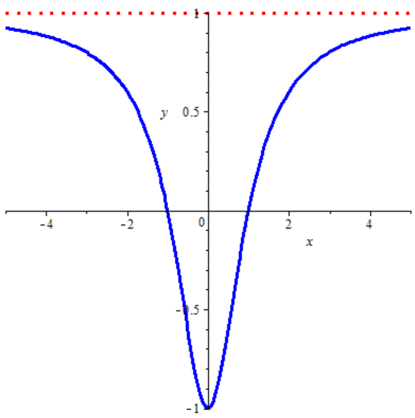

Obr. A.20: (iv)



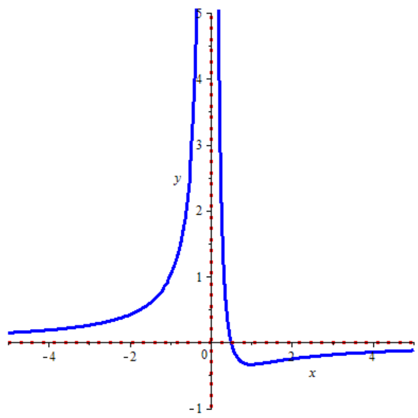

Obr. A.21: (v)



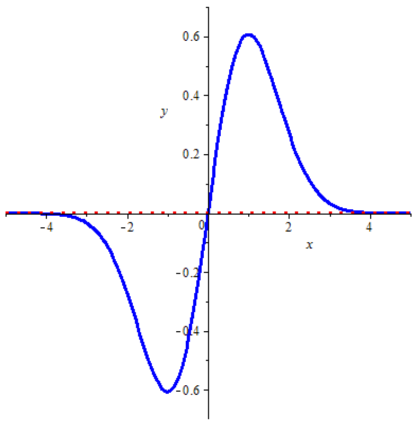

Obr. A.22: (vi)



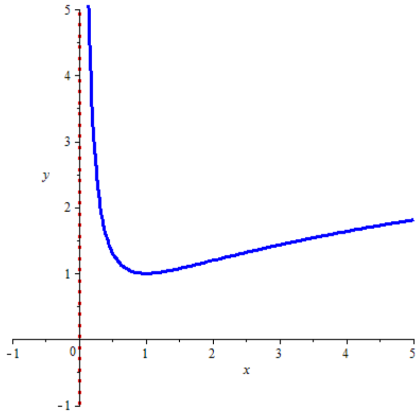

Obr. A.23: (vii)




Obr. A.24: (viii)




Obr. A.25: (ix)




Obr. A.26: (x)

Příklad 121:

(i) $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

(ii) $x \in (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$,

(iii) nemá,

(iv) $y = 0$,

(v) $x = 2$,

(vi) $x \in \{2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}$.

Příklad 122: $\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{92}}{8}$.

Příklad 123: D.

Příklad 124

(i) Obdélník s maximálním obsahem při pevně zadaném obvodu je právě čtverec, tedy $a = b = o/4$.

(ii) $-\sqrt[3]{2}$.

(iii) Za daných podmínek jsou tedy nejlepší volbou parcely o rozměrech $100 \times 120m$, přičemž větší rozměr je vertikální.

Příklad 139:

(i) $2x^3 - 8\sqrt{x} + 2\ln|x| + c$,

(ii) $\frac{3}{11}\sqrt[3]{x^{11}} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c$,

(iii) $x^2 + 4\ln|x| + \frac{8}{x} + c$,

(iv) $\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x + 28\ln|x-3| + c$.

Příklad 140:

(i) $\frac{2}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)+c$,

(ii) $-\frac{3}{4}\sqrt{2-8x}+c$,

(iii) $2\ln|2x-1|+c$,

(iv) $\frac{5^{3x}}{3\ln 5}+c$,

(v) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x)+c$.

Příklad 141:

(i) $\mathrm{e}^x\left(x^2-2x+2\right)+c$,

(ii) $\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+c$.

Příklad 142:

(i) $\ln|2x^2-8|+c$,

(ii) $\frac{1}{4}\cdot\ln|2x^2-8|+c$,

(iii) $=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x=-\int\frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+c$.

Příklad 143:

$$\int\frac{1}{16+9x^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{4^2+(3x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\operatorname{arctg}\frac{3x}{4}+c=\frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{3x}{4}+c.$$

Příklad 144:

$$\int\frac{3}{16-9x^2}\,\mathrm{d}x=3\int\frac{1}{4^2-(3x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\ln\left|\frac{4+3x}{4-3x}\right|+c=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{4+3x}{4-3x}\right|+c.$$

Příklad 145:

$$\int\frac{-7}{\sqrt{16-3x^2}}\,\mathrm{d}x=-7\int\frac{1}{\sqrt{4^2-(\sqrt{3}x)^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=-7\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{4}+c=\frac{-7\sqrt{3}}{3}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{4}+c.$$

Příklad 146:

$$\int \frac{2}{\sqrt{4x^2-3}}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{\sqrt{(2x)^2-3}}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\frac{1}{2}\ln|2x+\sqrt{4x^2-3}|+c = \ln|2x+\sqrt{4x^2-3}|+c.$$

Příklad 147:

$$\int \frac{3}{2x^2+8x-10}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+4x-5}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x+2)^2-9}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\int \frac{1}{9-(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{3+x+2}{3-x-2}\right|+c = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+5}{1-x}\right|+c.$$

Příklad 148:

(i) $2x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}-x+c,$

(ii) $\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}-21x+c,$

(iii) $\frac{x^5}{10}-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{1}{2x}+c,$

(iv) $\frac{12}{11}\sqrt[12]{x^{11}}-\frac{40}{17}\sqrt[20]{x^{17}}+c,$

(v) $-\frac{2}{\sqrt{5}}\arcsin x+c,$

(vi) $\frac{2^x}{4\ln 2}-\frac{5}{4}x+c.$

Příklad 149:

(i) $2\sin x-(2x+3)\cos x+c,$

(ii) $\mathrm{e}^x(x^2+x-2)+c,$

(iii) $x(\ln x-1)+c,$

(iv) $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+c,$

(v) $\frac{1}{2}(x^2\operatorname{arctg}x-x+\operatorname{arctg}x)+c,$

(vi) $\frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x+\cos x)+c.$

Příklad 150:

(i) $\frac{7}{3}\ln|x|+c,$

(ii) $-\frac{2}{9}\ln|5-9x|+c,$

(iii) $-\frac{1}{6}\sqrt{(3-4x)^3}+c,$

(iv) $\frac{5}{12}\sqrt[5]{(2x-3)^6}+c,$

(v) $\sqrt{x}-\sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2x}{3}}+c,$

(vi) $\frac{-1}{36(12x+3)^3}+c,$

(vii) $\sqrt{3x^2-5}+c,$

(viii) $\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x}+c,$

(ix) $-\ln|\cos x|+c,$

(x) $\ln(x^2-3x+7)+c.$

Příklad 151:

(i) $-\ln|4-\mathrm{e}^x|+c$,

(ii) $\frac{\operatorname{arctg}^4 x}{4}+c$,

(iii) $-\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-x^4}+c$,

(iv) $-\frac{\cos^3 x}{3}+c$,

(v) $-\frac{1}{\sin x}-\sin x+c$,

(vi) $-\frac{1}{\sin x}-\sin x+c$.

Příklad 152:

(i) $-\frac{30}{29}\sqrt[30]{x^{29}}$,

(ii) $\frac{2}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+c$,

(iii) $2\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{2}{3}}(x+2)\right]+c$,

(iv) $3\ln\left[\frac{1}{2}(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})\right]+c_1$, nebo (dle použitého vzorce)
$3\ln\left[(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})\right]+c_2$, kde $c_2=c_1+3\ln\frac{1}{2}$,

(v) $\sqrt{3x-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}+c$,

(vi) $\frac{7}{9}(2x+1)^{\frac{9}{4}}-\frac{7}{5}(2x+1)^{\frac{5}{4}}+c=\frac{14}{45}(2x+1)^{\frac{5}{4}}(5x-2)+c$.

Příklad 153:

(i) $\frac{2}{3}\ln|3x-4|+c$,

(ii) $\frac{-1}{3(3x-4)^2}+c$,

(iii) $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}}+c$,

(iv) $\ln(x^2-2x+3)+c$,

(v) $2\ln(x^2-2x+3)+\frac{7\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}}+c$,

(vi) $\frac{3}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{5\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$.

Příklad 163:

(i) 168,

(ii) $2+\frac{\pi^2}{2}$,

(iii) $\frac{3}{4}\pi$,

(iv) $1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{12}\pi$,

(v) 117,

(vi) 4,

(vii) $\frac{10}{3}$,

(viii) $\frac{\mathrm{e}^8-1}{3}$.

Příklad 164:

(i) $\frac{\pi^2}{4}$,

(ii) $4\pi\sqrt{5}$,

(iii) $\pi(4\sqrt{5}+10)$.

Příklad 165:

(i) $\frac{9}{2}$, (ii) $\frac{72}{5}\pi$.

Příklad 166:

(i) $\frac{32}{3}$,

(ii) $\frac{1072}{15}\pi$,

(iii) $48\pi\sqrt{5}$,

(iv) $\frac{1408}{15}\pi$,

(v) $\int_{-1}^{3}\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$,

(vi) $4\sqrt{5}$.

Příklad 177:

(i) $y = 3\sin x - \frac{\cos 2x}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$, (ii) $x = \frac{y^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

Příklad 178:

(i) $y = 3\sin x - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{11}{2}$,

(ii) $x = \frac{y^2}{2} - 6 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{2x+12}$,

(iii) $x = \frac{y^2}{2} - 6 \quad \Rightarrow \quad y = -\sqrt{2x+12}$.

Příklad 179:

(i) $y = c\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, \quad c \in \mathbb{R}$, (ii) $y = 3x - \frac{3}{2} + c\,\mathrm{e}^{-2x}, \quad c \in \mathbb{R}$.

Příklad 180:

(i) $y = -2\,\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x^2}}$, (ii) $y = 3x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2\,\mathrm{e}^{2x}}$.

Příklad 189: (i) 19, (ii) 22, (iii) 20,5.

Příklad 190: (i) -46, (ii) -47,5, (iii) -52, (iv) -49, přesná hodnota je -48.

Příklad 191: Kořeny jsou $-3, -\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$. Výsledné odhady kořenů tedy musí vyjít nejvýše o danou chybu jinak. (Řešení příkladu nelze jednoznačně napsat, protože jiná volba prvního odhadu může vést k jinému výsledku, který je sice také dostatečně přesnou aproximací hledaného kořene, ale např. z druhé strany, nebo v rámci povolené chyby posunutý.)

Příklad 192: Polynom $= \frac{8}{3}x^3 - 6x^2 + 6x - \frac{11}{6}$. Výsledná hodnota $= \frac{5}{6}$.

Příklad 193: Polynom $= \frac{1}{24}(x^4 + 24x^3 - 12x^2 + 24)$. Výsledná hodnota $= \frac{385}{384}$.

Příklad 194: $-x^4 - 5x^3 - 10x^2 - 10x - 5$.

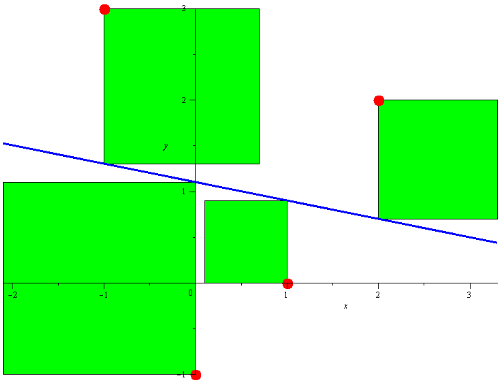
Příklad 195: $(a) \quad \mathrm{e}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$, $\qquad (b) \quad x - \frac{x^3}{3}$.

Příklad 196: Polynom $= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 5$. Výsledná hodnota $= \frac{5}{8}$.

Příklad 197: $-\frac{15}{4}$.

Příklad 198: $y = \frac{6}{5}x - 3$. Hodnota v $\frac{5}{2}$ je 0.

Příklad 199: $y = -\frac{x}{5} + \frac{11}{10}$.



Hledáme přímku (lineární závislost) pro níž je součet ploch naznačených čtverců minimální.

Příklad 200:
$$P(x) = \frac{7}{8}x^2 - 2x - \frac{7}{8}.$$

Příklad 201:
$$P(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x + 1.$$

Příklad 202:

(i) $y = \frac{x}{5} + \frac{6}{5}$.

(ii) $y = -\frac{9}{7}x + \frac{18}{7}$.

Příklad 203: Odhady vyjdou přibližně $-2,948828358; 0,7828156787$ a $2,166012680$. Výsledky se mohou lišit dle zvoleného prvního dělení intervalu. (Nikdy ale o víc, než o příslušnou chybu).

Příloha

# B Vzorce

## § B.1 Základní vzorce

### Mnohočleny

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$
$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$

### Mocninná funkce

$a^0 = 1,$ $a^{-r} = \frac{1}{a^r},$ $a^{\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{a},$ $a^r a^s = a^{r+s},$ $(a^r)^s = a^{rs}.$

### Logaritmus a exponenciála

$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y,$
$\log 1 = 0,$
$\log_a a = 1,$
$\log a^b = b \log a,$
$\log(ab) = \log a + \log b,$
$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b,$
$\log_a a^x = x = a^{\log_a x},$
$\ln x = \lg x = \log_{\mathrm{e}} x, \ \mathrm{e} = 2,71828\ldots,$
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\ln b}{\ln a}.$

### Goniometrické funkce

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$
$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$
$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2},$
$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}.$

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\operatorname{tg} x$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | – |
| $\operatorname{cotg} x$ | – | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

### Zlomky

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$,
$\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$,
$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$,

$(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$,
$(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}$,
$\frac{ca}{cb} = \frac{a}{b}$,

$\frac{c}{cb} = \frac{1}{b}$,
$\frac{a}{a} = 1$.

### Ostatní

▷ **Komplexní čísla ($\mathbb{C}$)**

$i^2 = -1$, $\overline{a+ib} = a - ib$, $a^2 + b^2 = (a-ib)(a+ib)$

▷ **Kvadratický polynom** $P(x) = ax^2 + bx + c$

$D = b^2 - 4ac$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

▷ **Doplnění na čtverec**

$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$, $x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q$.

## § B.2 Derivace

Nechť $f$ a $g$ jsou funkce, $c \in \mathbb{R}$.

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
- $(c \cdot f)' = c \cdot f'$,
- $(f \cdot g)' = f'g + fg'$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$,
- $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Nechť $a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $\alpha \neq 0$, $b \neq 1$.

- $(c)' = 0$,
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$,
- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$,
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$,
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,
- $(\log_b x)' = \frac{1}{x \cdot \ln b}$,
- $(\sin x)' = \cos x$,
- $(\cos x)' = -\sin x$.
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$,
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$,
- $(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$.

## § B.3 Integrály

Nechť $f$ a $g$ jsou funkce, $k, c \in \mathbb{R}$.

- $\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$,
- $\int k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x$,
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$.

---

Nechť $A, B, a, c, k, n \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $n \neq -1$.

- $\int k\,\mathrm{d}x = kx + c$,
- $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$,
- $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$,
- $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$,
- $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c$,
- $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$,
- $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$,
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c$,
- $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + c$,
- $\int \frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin \frac{x}{A} + c$,
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}}\,\mathrm{d}x = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm B}| + c$,
- $\int \frac{1}{A^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{x}{A} + c$,
- $\int \frac{1}{A^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2A} \ln\left|\frac{A+x}{A-x}\right| + c$.

---

Integrování per partes $\big[u = u(x), v = v(x)\big]$.

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x.$$

Substituční metoda.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} x = h(t) \\ dx = h'(t)\,\mathrm{d}t \end{matrix}\right| = \int f(h(t))h'(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} g(x) = t \\ g'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix}\right| = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Délka křivky.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Povrch pláště a objem rotačního tělesa (rotace $f$ kolem osy $x$).

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x,$$
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$