Aproximace

Petr Hasil

Přednáška z matematiky

MENDELU Agronomická fakulta

Mendelova univerzita v Brně

MENDELU Lesnická a dřevařská fakulta

Obsah

1. Numerická integrace
   - Obdélníkové pravidlo
   - Lichoběžníkové pravidlo
2. Algebraická rovnice
   - Tvrzení a příklady
   - Metoda bisekce (půlení)
3. Taylorův polynom
   - Definice a výpočet
   - Příklad
4. Polynomiální interpolace
   - Lagrangeův interpolační polynom
5. Lineární regrese
   - Metoda nejmenších čtverců
6. Příklady
7. Wolfram|Alpha

Obsah

1. Numerická integrace
   - Obdélníkové pravidlo
   - Lichoběžníkové pravidlo
2. Algebraická rovnice
   - Tvrzení a příklady
   - Metoda bisekce (půlení)
3. Taylorův polynom
   - Definice a výpočet
   - Příklad
4. Polynomiální interpolace
   - Lagrangeův interpolační polynom
5. Lineární regrese
   - Metoda nejmenších čtverců
6. Příklady
7. Wolfram|Alpha

Numerická integrace se používá především, když

- Nelze získat primitivní funkci.
- Primitivní funkce je velmi složitá.
- Nemáme k dispozici předpis integrované funkce, ale jen sadu naměřených hodnot.

Základní metody numerické integrace vycházejí přímo z konstrukce Riemannova integrálu. Nejjednodušší metodou je tzv. *obdélníkové pravidlo*, které se používá tak, že se zavede dělení intervalu, vypočítá funkční hodnota např. uprostřed dělicích intervalů (popř. v krajních bodech, zejména pokud jde jen o sadu naměřených hodnot a nemáme funkční předpis) a aproximace integrálu je přímo příslušný integrální součet.

Uvažujme funkci f intervalu $I = [a, b]$, na kterém zavedeme dělení $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Dále označme (v souladu se značením při konstrukci integrálu) výběr reprezentantů $R = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ (např. středy dělicích intervalů).

Potom pomocí obdélníkového pravidla lze odhadnout hodnotu integrálu jako

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Příklad

Pomocí obdélníkového pravidla odhadněte

$$\int_0^{10} x^2 \, \mathrm{d}x.$$

Interval rozdělte ekvidistantně na 5 dělicích intervalů a funkční hodnoty použijte ze středů těchto intervalů.

Příklad

Pomocí obdélníkového pravidla odhadněte

$$\int_0^{10} x^2 \, \mathrm{d}x.$$

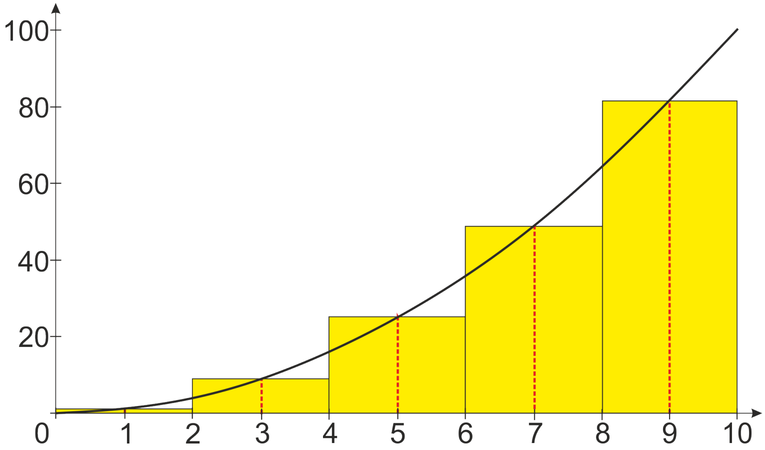
Interval rozdělte ekvidistantně na 5 dělicích intervalů a funkční hodnoty použijte ze středů těchto intervalů.

Interval $[a, b] = [0, 10]$ máme rozdělit na 5 stejně dlouhých částí, dělicí body tedy budou $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ a délka každého z těchto intervalů je 2. Výběrem reprezentantů jsou středy dělicích intervalů, tedy $R = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Máme tedy $f(x) = x^2$ a obdélníkové pravidlo dává

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \approx f(1)\cdot(2-0)+f(3)\cdot(4-2)+f(5)\cdot(6-4)+f(7)\cdot(8-6)+f(9)\cdot(10-8)$$

Výpočet je tedy následující

$$\int_0^{10} x^2 \, \mathrm{d}x \approx 1^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 2 + 5^2 \cdot 2 + 7^2 \cdot 2 + 9^2 \cdot 2 = 330.$$



V tomto případě lze samozřejmě provést přesný výpočet

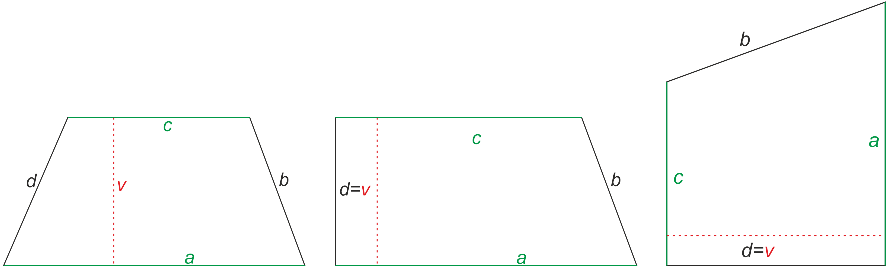
$$\int_0^{10} x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = \frac{1000}{3} - 0 = 333{,}\overline{3}.$$

Obsah

1. Numerická integrace
   - Obdélníkové pravidlo
   - Lichoběžníkové pravidlo
2. Algebraická rovnice
   - Tvrzení a příklady
   - Metoda bisekce (půlení)
3. Taylorův polynom
   - Definice a výpočet
   - Příklad
4. Polynomiální interpolace
   - Lagrangeův interpolační polynom
5. Lineární regrese
   - Metoda nejmenších čtverců
6. Příklady
7. Wolfram|Alpha

Pokročilejší a často i přesnější metodou je tzv. *lichoběžníkové pravidlo*. Postup je takový, že se funkční hodnoty v dělicích bodech propojí, čímž vznikne lomená čára. Následným postupem podobným tomu z obdélníkového pravidla pak aproximujeme plochu podgrafu sadou lichoběžníků.

Připomeňme, že obsah lichoběžníku lze vypočítat jako polovinu součtu rovnoběžných stran násobenou výškou lichoběžníku, tj.



$$S = \frac{a+c}{2} \cdot v.$$

Uvažujme funkci f intervalu $I = [a, b]$, na kterém zavedeme dělení $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

Potom pomocí lichoběžníkového pravidla lze odhadnout hodnotu integrálu jako

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

a jestliže je dělení ekvidistantní, tedy každý dělicí interval má stejnou délku ℓ, lze pravidlo zjednodušit na

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{\ell}{2}\Big[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big].$$

Příklad

Pomocí lichoběžníkového pravidla odhadněte

$$\int_0^{10} x^2 \, \mathrm{d}x.$$

Interval rozdělte ekvidistantně na 5 dělicích intervalů.

Příklad

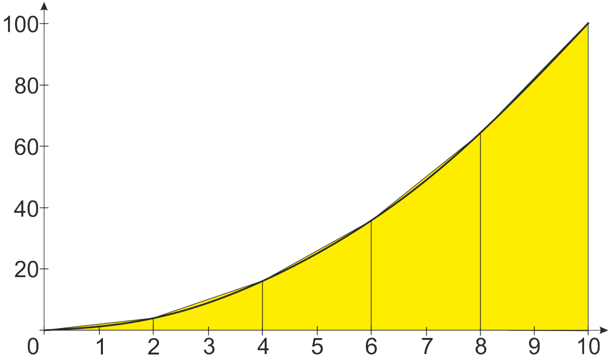
Pomocí lichoběžníkového pravidla odhadněte

$$\int_0^{10} x^2 \, dx.$$

Interval rozdělte ekvidistantně na 5 dělicích intervalů.

Opět máme $f(x) = x^2$, $[a, b] = [0, 10]$ a dělicí body $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Délka každého dělicího intervalu je $\ell = 2$, dostáváme tedy

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \frac{\ell}{2}[f(0) + 2f(2) + 2f(4) + 2f(6) + 2f(8) + f(10)]$$
$$= 0^2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 8^2 + 10^2$$
$$= 8 + 32 + 72 + 128 + 100 = 340.$$



Na obrázku vidíme, že pokročilejší obdélníkové pravidlo má v tomto příkladě nižší přesnost než obdélníkové kvůli tvaru funkce (konvexnost kladné funkce znamená, že lichoběžníkové pravidlo pokryje větší plochu). Je tedy nutné vždy získat co nejvíce informací o aproximované funkci a zvolit vhodnou metodu. Také je nutné se zajímat o samotný princip metod a ne jen „bezhlavě“ používat ty, které jsou obecně přesnější, v konkrétních případech to nemusí platit.

Poznámka

- Samozřejmě existuje celá řada dalších metod. Často je nutné rozhodovat se, zda vyžadovat vyšší přesnost i za cenu zvětšení početní náročnosti.
- Například tzv. Simpsonovo pravidlo pracuje tak, že místo lomené čáry nahradíme integrovanou funkci sadou parabol (jedna procházející body x_0, x_1, x_2, druhá body x_2, x_3, x_4 atd., neboť parabola je jednoznačně určena třemi body, musíme mít sudý počet dělicích intervalů). Všimněte si souvislosti s interpolací (viz dále).
- Dělicí body a intervaly, nebo aspoň jejich počet jsou často přímo dány tím, že neznáme předpis funkce, ale máme k dispozici jen sadu naměřených hodnot. Postup je pak podřízen tomu, abychom tyto hodnoty co nejlépe využili a vše je nutné volit tak, aby nám pro výpočet „nic nechybělo“, protože není možné získat další hodnoty.

Obsah

1. Numerická integrace
   - Obdélníkové pravidlo
   - Lichoběžníkové pravidlo
2. Algebraická rovnice
   - Tvrzení a příklady
   - Metoda bisekce (půlení)
3. Taylorův polynom
   - Definice a výpočet
   - Příklad
4. Polynomiální interpolace
   - Lagrangeův interpolační polynom
5. Lineární regrese
   - Metoda nejmenších čtverců
6. Příklady
7. Wolfram|Alpha

Algebraická rovnice je rovnice typu

$$P_n(x) = 0,$$

kde $P_n(x)$ je polynom stupně n v proměnné x.

Algebraická rovnice je rovnice typu

$$P_n(x) = 0,$$

kde $P_n(x)$ je polynom stupně n v proměnné x.

Protože řešit algebraickou rovnici je totéž, jako hledat kořeny polynomu P_n, známe již způsob, jak najít všechny celočíselné kořeny takové rovnice (dělitelé absolutního člene, Hornerovo schéma).

Algebraická rovnice je rovnice typu

$$P_n(x) = 0,$$

kde $P_n(x)$ je polynom stupně n v proměnné x.

Protože řešit algebraickou rovnici je totéž, jako hledat kořeny polynomu P_n, známe již způsob, jak najít všechny celočíselné kořeny takové rovnice (dělitelé absolutního člene, Hornerovo schéma).

Připomeňme, že je-li komplexní číslo $z = \alpha + \beta i$ kořenem polynomu P, pak je jeho kořenem i číslo komplexně sdružené $\bar{z} = \alpha - \beta i$.

Algebraická rovnice je rovnice typu

$$P_n(x) = 0,$$

kde $P_n(x)$ je polynom stupně n v proměnné x.

Protože řešit algebraickou rovnici je totéž, jako hledat kořeny polynomu P_n, známe již způsob, jak najít všechny celočíselné kořeny takové rovnice (dělitelé absolutního člene, Hornerovo schéma).

Připomeňme, že je-li komplexní číslo $z = \alpha + \beta i$ kořenem polynomu P, pak je jeho kořenem i číslo komplexně sdružené $\bar{z} = \alpha - \beta i$.

Protože (dle základní věty algebry) má polynom stupně n v $\mathbb{C}$ právě n kořenů (počítáno včetně násobnosti), má polynom lichého stupně aspoň jeden reálný kořen.

Věta (Odhad velikosti kořenů)

Buď

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

normovaný polynom stupně n.

Pak pro kořeny $x_1, \dots, x_n$ rovnice

$$P_n(x) = 0$$

platí

$$|x_i| \leq 1 + A, \quad (i = 1, \dots, n),$$

kde

$$A = \max\{|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \dots, |a_1|, |a_0|\}.$$

Věta (Descartes I)

Počet kladných kořenů polynomu $P_n(x)$ (počítáno s násobností) je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti jeho koeficientů nebo o sudé číslo menší.

Věta (Descartes I)

Počet kladných kořenů polynomu $P_n(x)$ (počítáno s násobností) je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti jeho koeficientů nebo o sudé číslo menší.

Věta (Descartes II)

Počet záporných kořenů polynomu $P_n(x)$ (počítáno s násobností) je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů polynomu $P_n(-x)$ nebo o sudé číslo menší.

Příklad

Použijte předchozí tvrzení na polynom

$$P(x) = x^7 - 14x^5 + 3x^2 + 1.$$

Příklad

Použijte předchozí tvrzení na polynom

$$P(x) = x^7 - 14x^5 + 3x^2 + 1.$$

- st $P = 7 \quad \Rightarrow \quad P$ má (včetně násobnosti) 7 kořenů, nejméně jeden je reálný.

Příklad

Použijte předchozí tvrzení na polynom

$$P(x) = x^7 - 14x^5 + 3x^2 + 1.$$

- $\operatorname{st} P = 7 \quad \Rightarrow \quad P$ má (včetně násobnosti) 7 kořenů, nejméně jeden je reálný.
- Koeficienty P jsou (nuly pro přehlednost vynecháme) $1, -14, 3, 1 \quad \Rightarrow \quad$ 2 znaménkové změny $\quad \Rightarrow \quad$ 2 nebo 0 kladných kořenů.

Příklad

Použijte předchozí tvrzení na polynom

$$P(x) = x^7 - 14x^5 + 3x^2 + 1.$$

- st $P = 7 \quad \Rightarrow \quad P$ má (včetně násobnosti) 7 kořenů, nejméně jeden je reálný.
- Koeficienty P jsou (nuly pro přehlednost vynecháme) $1, -14, 3, 1 \quad \Rightarrow \quad$ 2 znaménkové změny $\quad \Rightarrow \quad$ 2 nebo 0 kladných kořenů.
- $P(-x) = -x^7 + 14x^5 + 3x^2 + 1$. Koeficienty $P(-x)$ jsou (nuly pro přehlednost vynecháme) $-1, 14, 3, 1 \quad \Rightarrow \quad$ 1 znaménková změna $\quad \Rightarrow \quad$ 1 záporný kořen.

Příklad

Použijte předchozí tvrzení na polynom

$$P(x) = x^7 - 14x^5 + 3x^2 + 1.$$

- st $P = 7 \quad \Rightarrow \quad P$ má (včetně násobnosti) 7 kořenů, nejméně jeden je reálný.
- Koeficienty P jsou (nuly pro přehlednost vynecháme) $1, -14, 3, 1 \quad \Rightarrow \quad$ 2 znaménkové změny $\quad \Rightarrow \quad$ 2 nebo 0 kladných kořenů.
- $P(-x) = -x^7 + 14x^5 + 3x^2 + 1$. Koeficienty $P(-x)$ jsou (nuly pro přehlednost vynecháme) $-1, 14, 3, 1 \quad \Rightarrow \quad$ 1 znaménková změna $\quad \Rightarrow \quad$ 1 záporný kořen.
- $A = \max\{|-14|, |3|, |1|\} = 14 \quad \Rightarrow \quad |x_i| \leq 15, \quad (i = 1, \dots, 7).$

Celkem:

Pro kořeny polynom $P(x) = x^7 - 14x^5 + 3x^2 + 1$ jsou 2 možnosti.

Celkem:

Pro kořeny polynom $P(x) = x^7 - 14x^5 + 3x^2 + 1$ jsou 2 možnosti.

1. 1 záporný $\mathbb{R}$ a 6 $\mathbb{C}$,

Celkem:

Pro kořeny polynom $P(x) = x^7 - 14x^5 + 3x^2 + 1$ jsou 2 možnosti.

1. 1 záporný $\mathbb{R}$ a 6 $\mathbb{C}$,
2. 1 záporný $\mathbb{R}$, 2 kladné $\mathbb{R}$ a 4 $\mathbb{C}$.

Celkem:

Pro kořeny polynom $P(x) = x^7 - 14x^5 + 3x^2 + 1$ jsou 2 možnosti.

1. 1 záporný $\mathbb{R}$ a 6 $\mathbb{C}$,
2. 1 záporný $\mathbb{R}$, 2 kladné $\mathbb{R}$ a 4 $\mathbb{C}$.

Přičemž všechny reálné kořeny leží v intervalu $[-15, 15]$.

Celkem:

Pro kořeny polynom $P(x) = x^7 - 14x^5 + 3x^2 + 1$ jsou 2 možnosti.

1. 1 záporný $\mathbb{R}$ a 6 $\mathbb{C}$,
2. 1 záporný $\mathbb{R}$, 2 kladné $\mathbb{R}$ a 4 $\mathbb{C}$.

Přičemž všechny reálné kořeny leží v intervalu $[-15, 15]$.

(Velikost všech kořenů, i komplexních, je ≤ 15,
$|z| = |\alpha + \beta i| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.)

Obsah

1. Numerická integrace
   - Obdélníkové pravidlo
   - Lichoběžníkové pravidlo
2. Algebraická rovnice
   - Tvrzení a příklady
   - Metoda bisekce (půlení)
3. Taylorův polynom
   - Definice a výpočet
   - Příklad
4. Polynomiální interpolace
   - Lagrangeův interpolační polynom
5. Lineární regrese
   - Metoda nejmenších čtverců
6. Příklady
7. Wolfram|Alpha

Definice (Kořen s přesností ε)

Číslo $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ nazýváme *kořen polynomu $P(x)$ s přesností ε* ($0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$), jestliže skutečný kořen polynomu $P(x)$ leží v intervalu $(\tilde{x} - \varepsilon, \tilde{x} + \varepsilon)$.

Definice (Kořen s přesností ε)

Číslo $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ nazýváme *kořen polynomu $P(x)$ s přesností ε* $(0 < \varepsilon \in \mathbb{R})$, jestliže skutečný kořen polynomu $P(x)$ leží v intervalu $(\tilde{x} - \varepsilon, \tilde{x} + \varepsilon)$.

Např.:

$$P(x) = 4x^4 - 31x^3 - 121x^2 + 244x + 660, \quad P(2) = 480, \quad P(3) = -210,$$

tedy (podle první Bolzanovy věty) v intervalu $(2, 3)$ má polynom P kořen. Střed tohoto intervalu, tj. číslo $\tilde{x} = 2,5$, je tedy kořenem polynomu P s přesností $\varepsilon = 0,5$.

Definice (Kořen s přesností ε)

Číslo $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ nazýváme *kořen polynomu $P(x)$ s přesností ε* $(0 < \varepsilon \in \mathbb{R})$, jestliže skutečný kořen polynomu $P(x)$ leží v intervalu $(\tilde{x} - \varepsilon, \tilde{x} + \varepsilon)$.

Např.:

$$P(x) = 4x^4 - 31x^3 - 121x^2 + 244x + 660, \quad P(2) = 480, \quad P(3) = -210,$$

tedy (podle první Bolzanovy věty) v intervalu $(2, 3)$ má polynom P kořen. Střed tohoto intervalu, tj. číslo $\tilde{x} = 2,5$, je tedy kořenem polynomu P s přesností $\varepsilon = 0,5$.

(Skutečným kořenem je číslo $2,75$.)

Z předchozího příkladu je zřejmé, že kořen lichého stupně polynomu P lze určit s libovolnou přesností tak, že najdeme interval, ve kterém leží jen tento kořen (např. pomocí věty o odhadu velikosti kořenů a užitím Hornerova schématu).

Z předchozího příkladu je zřejmé, že kořen lichého stupně polynomu P lze určit s libovolnou přesností tak, že najdeme interval, ve kterém leží jen tento kořen (např. pomocí věty o odhadu velikosti kořenů a užitím Hornerova schématu).

Označme si tento interval jako (a, b). Střed tohoto intervalu $\tilde{x}_1 = \frac{a+b}{2}$ je prvním odhadem kořene, tedy je kořenem daného polynomu s přesností $\frac{b-a}{2}$. Navíc zřejmě $P(a) \cdot P(b) < 0$ (hodnoty polynomu P v krajních bodech intervalu (a, b) mají opačná znaménka).

Z předchozího příkladu je zřejmé, že kořen lichého stupně polynomu P lze určit s libovolnou přesností tak, že najdeme interval, ve kterém leží jen tento kořen (např. pomocí věty o odhadu velikosti kořenů a užitím Hornerova schématu).

Označme si tento interval jako (a, b). Střed tohoto intervalu $\tilde{x}_1 = \frac{a+b}{2}$ je prvním odhadem kořene, tedy je kořenem daného polynomu s přesností $\frac{b-a}{2}$. Navíc zřejmě $P(a) \cdot P(b) < 0$ (hodnoty polynomu P v krajních bodech intervalu (a, b) mají opačná znaménka).

Spočteme tedy hodnotu $P(\tilde{x}_1) = P(\frac{a+b}{2})$ a z intervalů $(a, \frac{a+b}{2}), (\frac{a+b}{2}, b)$ vybereme ten, v jehož krajních bodech nabývá polynom P opačná znaménka, protože kořen jistě leží v této polovině intervalu.

Z předchozího příkladu je zřejmé, že kořen lichého stupně polynomu P lze určit s libovolnou přesností tak, že najdeme interval, ve kterém leží jen tento kořen (např. pomocí věty o odhadu velikosti kořenů a užitím Hornerova schématu).

Označme si tento interval jako (a, b). Střed tohoto intervalu $\tilde{x}_1 = \frac{a+b}{2}$ je prvním odhadem kořene, tedy je kořenem daného polynomu s přesností $\frac{b-a}{2}$. Navíc zřejmě $P(a) \cdot P(b) < 0$ (hodnoty polynomu P v krajních bodech intervalu (a, b) mají opačná znaménka).

Spočteme tedy hodnotu $P(\tilde{x}_1) = P(\frac{a+b}{2})$ a z intervalů $(a, \frac{a+b}{2}), (\frac{a+b}{2}, b)$ vybereme ten, v jehož krajních bodech nabývá polynom P opačná znaménka, protože kořen jistě leží v této polovině intervalu.

Střed tohoto podintervalu označíme jako druhé přiblížení ke kořeni $\tilde{x}_2$, tedy jde o kořen polynomu P s přesností $\frac{b-a}{4}$. Stejně můžeme postupovat libovolně dlouho a získat tak kořen polynomu s libovolnou přesností.

Poznámka

- Jestliže kdykoli dostaneme $P(\tilde{x}_i) = 0$, pak je číslo $\tilde{x}_i$ (přesným) kořenem polynomu P.

Poznámka

- Jestliže kdykoli dostaneme $P(\tilde{x}_i) = 0$, pak je číslo $\tilde{x}_i$ (přesným) kořenem polynomu P.
- Metodu bisekce je nejvhodnější používat na aproximaci jednonásobných kořenů. Existují metody, které převedou daný polynom na jiný, který má stejné kořeny, ale všechny jednonásobné.

Poznámka

- Jestliže kdykoli dostaneme $P(\tilde{x}_i) = 0$, pak je číslo $\tilde{x}_i$ (přesným) kořenem polynomu P.
- Metodu bisekce je nejvhodnější používat na aproximaci jednonásobných kořenů. Existují metody, které převedou daný polynom na jiný, který má stejné kořeny, ale všechny jednonásobné.
- Existují také různá vylepšení metody bisekce (např. metoda zlatého řezu), pomocí kterých je možné kořen s danou přesností najít rychleji.

Příklad

Odhadněte nezáporný kořen polynomu $P(x) = x^3 - 3x - 1$ s přesností aspoň $0,02$.

Příklad

Odhadněte nezáporný kořen polynomu $P(x) = x^3 - 3x - 1$ s přesností aspoň $0,02$.

Nejprve pomocí věty o odhadu velikosti kořenů uděláme základní odhad:

$$\max\{1,3,1\} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x_i \in [-4,4].$$

Příklad

Odhadněte nezáporný kořen polynomu $P(x) = x^3 - 3x - 1$ s přesností aspoň $0,02$.

Nejprve pomocí věty o odhadu velikosti kořenů uděláme základní odhad:

$$\max\{1, 3, 1\} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x_i \in [-4, 4].$$

Nás zajímají jen kladné kořeny, proto se omezíme na interval $[0, 4]$ a na něm provedeme tzv. separaci kořenů — tj. interval rozdělíme na větší počet subintervalů a v dělících bodech určíme hodnotu polynomu P.

Příklad

Odhadněte nezáporný kořen polynomu $P(x) = x^3 - 3x - 1$ s přesností aspoň $0,02$.

Nejprve pomocí věty o odhadu velikosti kořenů uděláme základní odhad:

$$\max\{1, 3, 1\} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x_i \in [-4, 4].$$

Nás zajímají jen kladné kořeny, proto se omezíme na interval $[0, 4]$ a na něm provedeme tzv. separaci kořenů — tj. interval rozdělíme na větší počet subintervalů a v dělících bodech určíme hodnotu polynomu P.

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	-1	-3	1	17	51

Příklad

Odhadněte nezáporný kořen polynomu $P(x) = x^3 - 3x - 1$ s přesností aspoň $0,02$.

Nejprve pomocí věty o odhadu velikosti kořenů uděláme základní odhad:

$$\max\{1, 3, 1\} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x_i \in [-4, 4].$$

Nás zajímají jen kladné kořeny, proto se omezíme na interval $[0, 4]$ a na něm provedeme tzv. separaci kořenů — tj. interval rozdělíme na větší počet subintervalů a v dělících bodech určíme hodnotu polynomu P.

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	-1	-3	1	17	51

Vzhledem ke znaménkové změně (používáme první Bolzanovu větu) se hledaný kořen nachází v intervalu $(1, 2)$. (Číslo 1 ani 2 kořenem není, neboť v nich nemá polynom hodnotu nula.)

Průběh bisekce přehledně shrňme do tabulky.

Průběh bisekce přehledně shrňme do tabulky.

a	$\tilde{x}_i = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(\tilde{x}_i)$	$P(b)$	chyba $\left(\frac{b-a}{2}\right)$

Průběh bisekce přehledně shrňme do tabulky.

a	$\tilde{x}_i = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(\tilde{x}_i)$	$P(b)$	chyba $\left(\frac{b-a}{2}\right)$
1	1,5	2				

Průběh bisekce přehledně shrňme do tabulky.

a	$\tilde{x}_i = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(\tilde{x}_i)$	$P(b)$	chyba $\left(\frac{b-a}{2}\right)$
1	1,5	2	$-$	$-$	$+$	0,5

Průběh bisekce přehledně shrňme do tabulky.

a	$\tilde{x}_i = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(\tilde{x}_i)$	$P(b)$	chyba $\left(\frac{b-a}{2}\right)$
1	1,5	2	$-$	$-$	$+$	0,5
1,5	1,75	2				

Průběh bisekce přehledně shrňme do tabulky.

a	$\tilde{x}_i = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(\tilde{x}_i)$	$P(b)$	chyba $\left(\frac{b-a}{2}\right)$
1	1,5	2	$-$	$-$	$+$	0,5
1,5	1,75	2	$-$	$-$	$+$	0,25

Průběh bisekce přehledně shrňme do tabulky.

a	$\tilde{x}_i = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(\tilde{x}_i)$	$P(b)$	chyba $\left(\frac{b-a}{2}\right)$
1	1,5	2	$-$	$-$	$+$	0,5
1,5	1,75	2	$-$	$-$	$+$	0,25
1,75	1,875	2				

Průběh bisekce přehledně shrňme do tabulky.

a	$\tilde{x}_i = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(\tilde{x}_i)$	$P(b)$	chyba $\left(\frac{b-a}{2}\right)$
1	1,5	2	$-$	$-$	$+$	0,5
1,5	1,75	2	$-$	$-$	$+$	0,25
1,75	1,875	2	$-$	$-$	$+$	0,125

Průběh bisekce přehledně shrňme do tabulky.

a	$\tilde{x}_i = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(\tilde{x}_i)$	$P(b)$	chyba $\left(\frac{b-a}{2}\right)$
1	1,5	2	$-$	$-$	$+$	0,5
1,5	1,75	2	$-$	$-$	$+$	0,25
1,75	1,875	2	$-$	$-$	$+$	0,125
1,875	1,9375	2				

Průběh bisekce přehledně shrňme do tabulky.

a	$\tilde{x}_i = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(\tilde{x}_i)$	$P(b)$	chyba $\left(\frac{b-a}{2}\right)$
1	1,5	2	$-$	$-$	$+$	0,5
1,5	1,75	2	$-$	$-$	$+$	0,25
1,75	1,875	2	$-$	$-$	$+$	0,125
1,875	1,9375	2	$-$	$+$	$+$	0,0625

Průběh bisekce přehledně shrňme do tabulky.

a	$\tilde{x}_i = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(\tilde{x}_i)$	$P(b)$	chyba $\left(\frac{b-a}{2}\right)$
1	1,5	2	$-$	$-$	$+$	0,5
1,5	1,75	2	$-$	$-$	$+$	0,25
1,75	1,875	2	$-$	$-$	$+$	0,125
1,875	1,9375	2	$-$	$+$	$+$	0,0625
1,875	1,90625	1,9375				

Průběh bisekce přehledně shrňme do tabulky.

a	$\tilde{x}_i = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(\tilde{x}_i)$	$P(b)$	chyba $\left(\frac{b-a}{2}\right)$
1	1,5	2	$-$	$-$	$+$	0,5
1,5	1,75	2	$-$	$-$	$+$	0,25
1,75	1,875	2	$-$	$-$	$+$	0,125
1,875	1,9375	2	$-$	$+$	$+$	0,0625
1,875	1,90625	1,9375	$-$	$+$	$+$	0,03125

Průběh bisekce přehledně shrňme do tabulky.

a	$\tilde{x}_i = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(\tilde{x}_i)$	$P(b)$	chyba $\left(\frac{b-a}{2}\right)$
1	1,5	2	$-$	$-$	$+$	0,5
1,5	1,75	2	$-$	$-$	$+$	0,25
1,75	1,875	2	$-$	$-$	$+$	0,125
1,875	1,9375	2	$-$	$+$	$+$	0,0625
1,875	1,90625	1,9375	$-$	$+$	$+$	0,03125
1,875	1,890625	1,90625				

Průběh bisekce přehledně shrňme do tabulky.

a	$\tilde{x}_i = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(\tilde{x}_i)$	$P(b)$	chyba $\left(\frac{b-a}{2}\right)$
1	1,5	2	$-$	$-$	$+$	0,5
1,5	1,75	2	$-$	$-$	$+$	0,25
1,75	1,875	2	$-$	$-$	$+$	0,125
1,875	1,9375	2	$-$	$+$	$+$	0,0625
1,875	1,90625	1,9375	$-$	$+$	$+$	0,03125
1,875	1,890625	1,90625				0,015625

Průběh bisekce přehledně shrňme do tabulky.

a	$\tilde{x}_i = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(\tilde{x}_i)$	$P(b)$	chyba $\left(\frac{b-a}{2}\right)$
1	1,5	2	$-$	$-$	$+$	0,5
1,5	1,75	2	$-$	$-$	$+$	0,25
1,75	1,875	2	$-$	$-$	$+$	0,125
1,875	1,9375	2	$-$	$+$	$+$	0,0625
1,875	1,90625	1,9375	$-$	$+$	$+$	0,03125
1,875	1,890625	1,90625				0,015625

Řešením zadaného problému je tedy číslo $1,890625$, které je kořenem polynomu P s přesností $0,015625$.

Obsah

1. Numerická integrace
   - Obdélníkové pravidlo
   - Lichoběžníkové pravidlo
2. Algebraická rovnice
   - Tvrzení a příklady
   - Metoda bisekce (půlení)
3. Taylorův polynom
   - Definice a výpočet
   - Příklad
4. Polynomiální interpolace
   - Lagrangeův interpolační polynom
5. Lineární regrese
   - Metoda nejmenších čtverců
6. Příklady
7. Wolfram|Alpha

Věta (Taylorova věta)

Nechť má funkce f v okolí bodu x_0 vlastní derivace až do řádu $n+1$ pro nějaké $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro všechna x z tohoto okolí platí

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

kde ξ je vhodné číslo ležící mezi x_0 a x.

Vynecháme-li zbytek $R_n(x)$, obdržíme tzv. *Taylorův polynom*:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i.$$

Vynecháme-li zbytek $R_n(x)$, obdržíme tzv. *Taylorův polynom*:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i.$$

Pokud v položíme $x_0 = 0$, získáme tzv. *Maclaurinův polynom*:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i.$$

Obsah

1. Numerická integrace
   - Obdélníkové pravidlo
   - Lichoběžníkové pravidlo
2. Algebraická rovnice
   - Tvrzení a příklady
   - Metoda bisekce (půlení)
3. Taylorův polynom
   - Definice a výpočet
   - Příklad
4. Polynomiální interpolace
   - Lagrangeův interpolační polynom
5. Lineární regrese
   - Metoda nejmenších čtverců
6. Příklady
7. Wolfram|Alpha

Příklad

Určete Taylorův polynom 4. řádu se středem v bodě $x_0 = 1$ funkce $f(x) = x \ln x$.

Příklad

Určete Taylorův polynom 4. řádu se středem v bodě $x_0 = 1$ funkce $f(x) = x \ln x$.

$$f'(x) = 1 + \ln x,\ f''(x) = \tfrac{1}{x},\ f'''(x) = \tfrac{-1}{x^2},\ f^{(4)}(x) = \tfrac{2}{x^3}.$$

Příklad

Určete Taylorův polynom 4. řádu se středem v bodě $x_0 = 1$ funkce $f(x) = x \ln x$.

$$f'(x) = 1 + \ln x,\ f''(x) = \tfrac{1}{x},\ f'''(x) = \tfrac{-1}{x^2},\ f^{(4)}(x) = \tfrac{2}{x^3}.$$

$$f(1) = 0,\ f'(1) = 1,\ f''(1) = 1,\ f'''(1) = -1,\ f^{(4)}(1) = 2.$$

Příklad

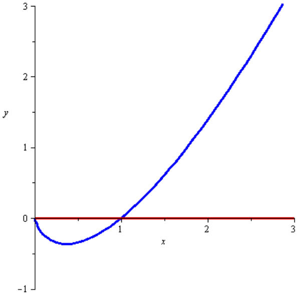
Určete Taylorův polynom 4. řádu se středem v bodě $x_0 = 1$ funkce $f(x) = x \ln x$.

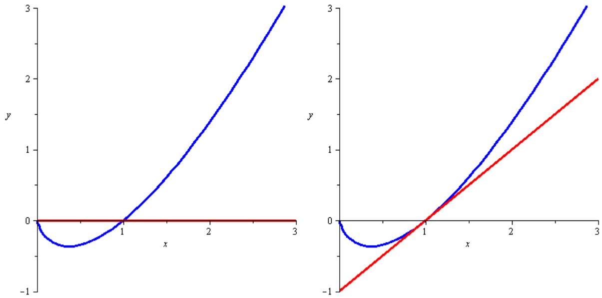
$$f'(x) = 1 + \ln x,\ f''(x) = \tfrac{1}{x},\ f'''(x) = \tfrac{-1}{x^2},\ f^{(4)}(x) = \tfrac{2}{x^3}.$$

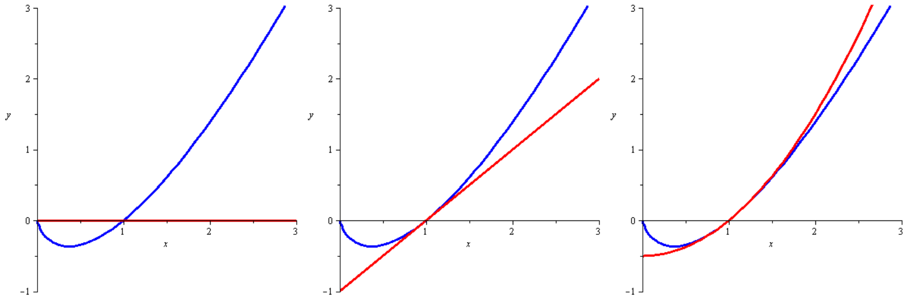
$$f(1) = 0,\ f'(1) = 1,\ f''(1) = 1,\ f'''(1) = -1,\ f^{(4)}(1) = 2.$$

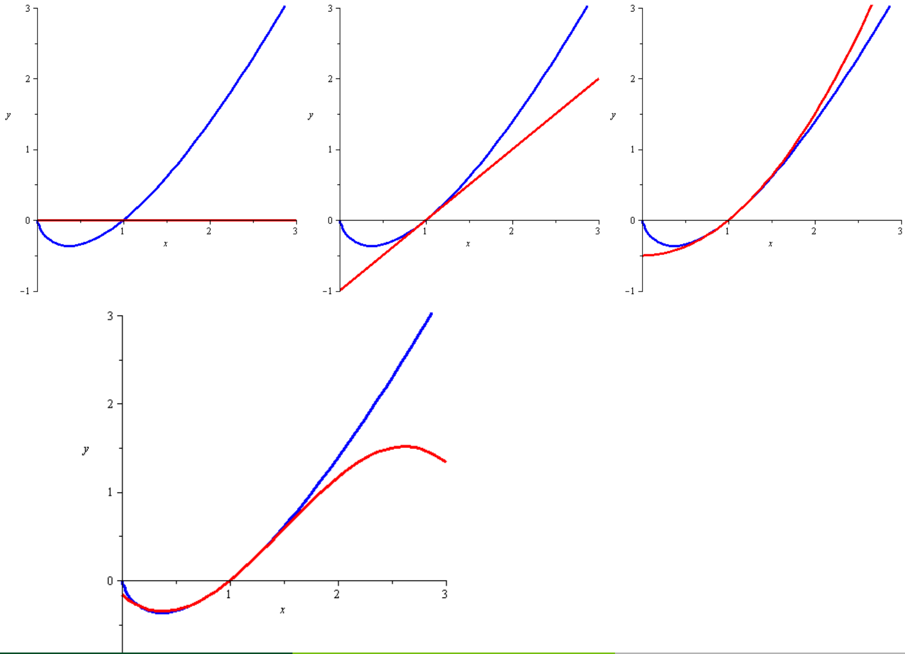
Tedy

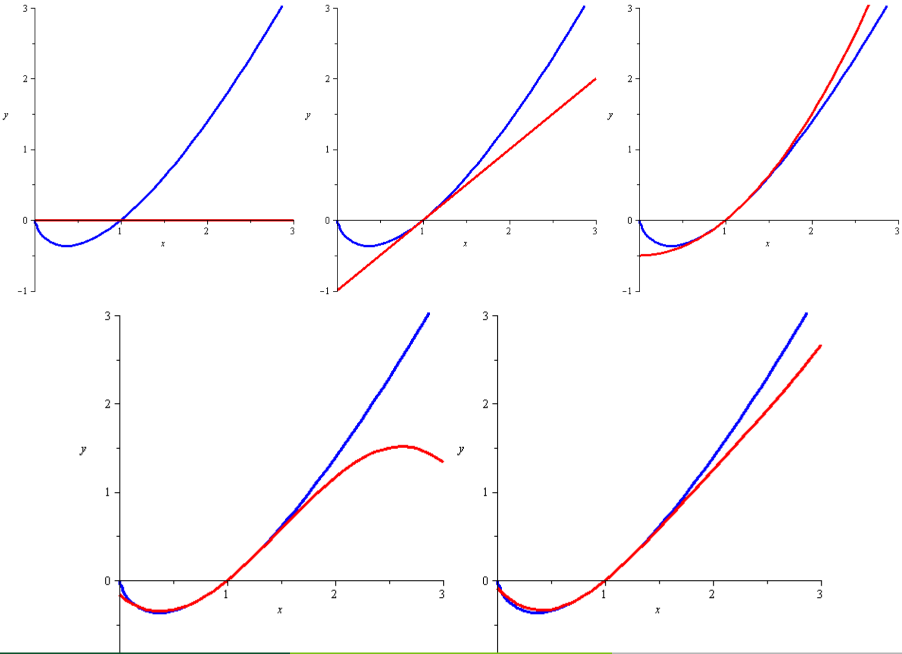
$$\begin{aligned} T(x) &= 0 + \tfrac{1}{1!}(x-1) + \tfrac{1}{2!}(x-1)^2 + \tfrac{-1}{3!}(x-1)^3 + \tfrac{2}{4!}(x-1)^4 \\ &= \tfrac{1}{12}(x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 10x - 3). \end{aligned}$$


3
2
1
0
-1
y
1
2
3
x


3
2
1
0
-1
y
x
1
2
3
3
2
1
0
-1
y
x
1
2
3


y
x
3
2
1
0
-1
1
2
3


3
2
1
0
-1
y
x
1
2
3


y
x
-1
0
1
2
3

Obsah

1. Numerická integrace
   - Obdélníkové pravidlo
   - Lichoběžníkové pravidlo
2. Algebraická rovnice
   - Tvrzení a příklady
   - Metoda bisekce (půlení)
3. Taylorův polynom
   - Definice a výpočet
   - Příklad
4. Polynomiální interpolace
   - Lagrangeův interpolační polynom
5. Lineární regrese
   - Metoda nejmenších čtverců
6. Příklady
7. Wolfram|Alpha

Jsou dány navzájem různé body x_i, $i = 1, \ldots, n+1$, a hodnoty funkce f v těchto bodech. Cílem je najít polynom P_n stupně nejvýše n takový, aby platilo $P_n(x_i) = f(x_i)$ pro $i = 1, \ldots, n+1$. Body x_i se nazývají *uzly* a polynom P_n *interpolační polynom*.

Jsou dány navzájem různé body x_i, $i = 1, \ldots, n+1$, a hodnoty funkce f v těchto bodech. Cílem je najít polynom P_n stupně nejvýše n takový, aby platilo $P_n(x_i) = f(x_i)$ pro $i = 1, \ldots, n+1$. Body x_i se nazývají *uzly* a polynom P_n *interpolační polynom*.

Věta

Pro $(n+1)$ daných dvojic čísel $[x_i, f(x_i)]$, $i = 1, \ldots, n$, $x_i \neq x_k$ pro $i \neq k$, existuje právě jeden interpolační polynom P_n (stupně nejvýše n) takový, že platí $P_n(x_i) = f(x_i)$ pro $i = 1, \ldots, n$.

Definice

Lagrangeův interpolační polynom definujeme vztahem

$$P_n(x) = \ell_1(x)f(x_1) + \ell_2(x)f(x_2) + \cdots + \ell_{n+1}(x)f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \ell_i(x)f(x_i),$$

Definice

Lagrangeův interpolační polynom definujeme vztahem

$$P_n(x) = \ell_1(x)f(x_1) + \ell_2(x)f(x_2) + \cdots + \ell_{n+1}(x)f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \ell_i(x)f(x_i),$$

kde polynomy $\ell_i(x)$ jsou tvaru

$$\ell_i(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_{n+1})}.$$

Příklad

Pro funkci zadanou tabulkou najděte interpolační polynom.

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	1	2	4	8

Nejprve sestrojíme polynomy ℓ_i:

$$\ell_1(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} \qquad \ell_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}$$

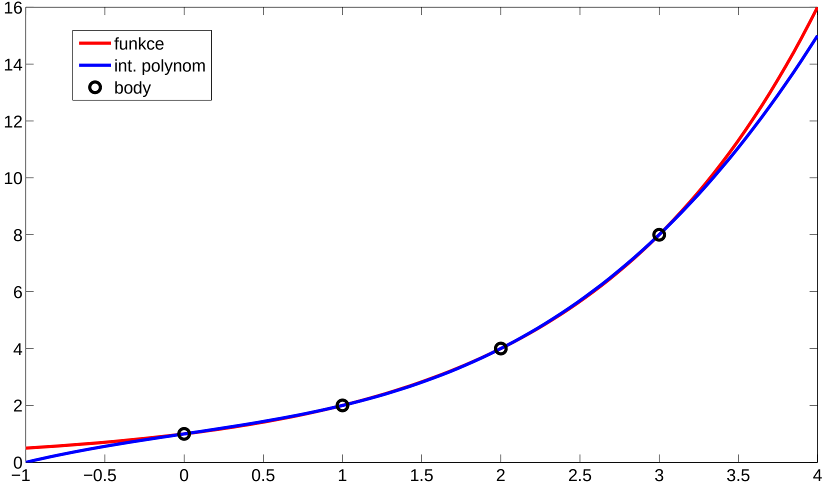
$$\ell_2(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \qquad \ell_4(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}.$$

Nejprve sestrojíme polynomy ℓ_i:

$$\ell_1(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} \qquad \ell_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}$$
$$\ell_2(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \qquad \ell_4(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}.$$

Pak

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= 1 \cdot \ell_1(x) + 2 \cdot \ell_2(x) + 4 \cdot \ell_3(x) + 8 \cdot \ell_4(x) \\
&= 1 \cdot \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{-6} + 2 \cdot \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{2} \\
&\qquad + 4 \cdot \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{-2} + 8 \cdot \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{6} \\
&= \frac{x^3}{6} + \frac{5x}{6} + 1
\end{aligned}$$

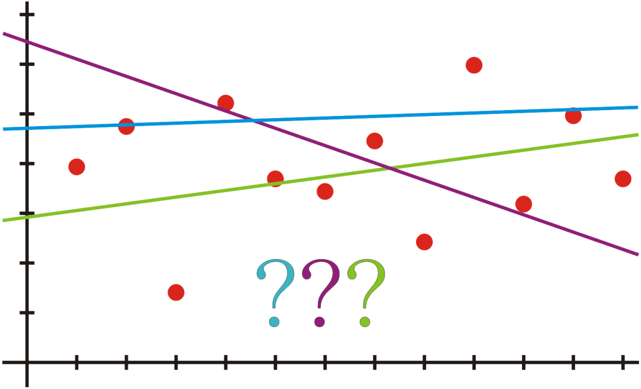

funkce
int. polynom
body
16
14
12
10
8
6
4
2
0
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

Obsah

1. Numerická integrace
   - Obdélníkové pravidlo
   - Lichoběžníkové pravidlo
2. Algebraická rovnice
   - Tvrzení a příklady
   - Metoda bisekce (půlení)
3. Taylorův polynom
   - Definice a výpočet
   - Příklad
4. Polynomiální interpolace
   - Lagrangeův interpolační polynom
5. Lineární regrese
   - Metoda nejmenších čtverců
6. Příklady
7. Wolfram|Alpha

Pomocí jednoduché lineární regrese popisujeme vztah mezi proměnnými x a y. Snažíme se najít funkci f tak, aby vztah $y = f(x)$ co nejlépe vystihoval závislost mezi x a y.

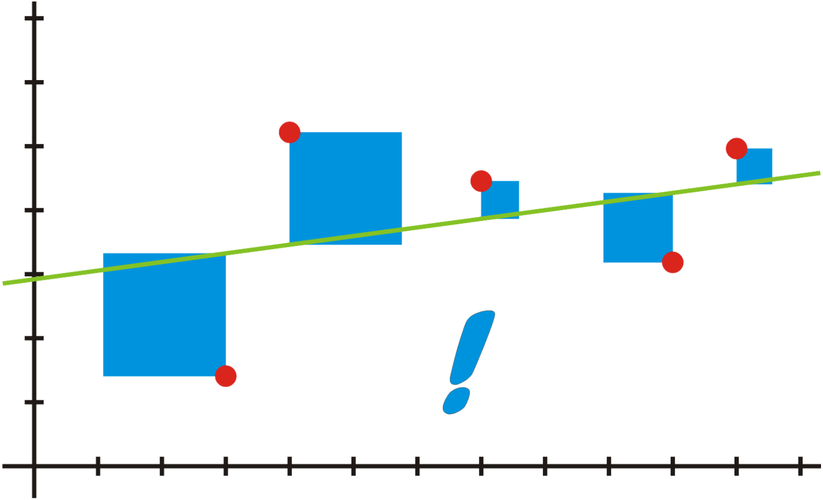
Pomocí jednoduché lineární regrese popisujeme vztah mezi proměnnými x a y. Snažíme se najít funkci f tak, aby vztah $y = f(x)$ co nejlépe vystihoval závislost mezi x a y.



Měřítkem kvality vybrané funkce f je nejmenší hodnota součtu čtverců vzdáleností

$$\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - f(x_i)\right]^2 \to \min .$$

Odtud plyne její název: *metoda nejmenších čtverců*.



Regresní přímka $f(x) = ax + b$ vyjadřuje nejjednodušší závislost x na y. Pomocí metody nejmenších čtverců určíme její parametry a a b:

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i,$$

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Například při dávkování léků ovcím je někdy nezbytné vážit ovce, což je ovšem spjato s praktickými problémy. Proto je snaha najít jednodušší způsob, takovým může být například odhad hmotnosti na základě obvodu hrudníku.

Například při dávkování léků ovcím je někdy nezbytné vážit ovce, což je ovšem spjato s praktickými problémy. Proto je snaha najít jednodušší způsob, takovým může být například odhad hmotnosti na základě obvodu hrudníku.

Příklad

Deset ovcí bylo zváženo a byl jim změřen obvod hrudníku. Najděte vztah, který nejlépe popisuje závislost hmotnosti na obvodu hrudníku.

obvod [cm]	80	88	88	83	86	80	83	87	86	88
hmotnost [kg]	30	35	35	33	33	31	31	35	34	35

$x =$ obvod hrudníku, $y =$ hmotnost

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 849, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 72171, \quad \sum_{i=1}^{10} y_i = 332, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 28239.$$

$x =$ obvod hrudníku, $y =$ hmotnost

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 849, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 72171, \quad \sum_{i=1}^{10} y_i = 332, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 28239.$$

Odtud

$$\begin{aligned} 72171a + 849b &= 28239 \\ 849a + 10b &= 332 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= 58/101 \doteq 0.57 \\ b &= -1571/101 \doteq -15.55 \end{aligned}$$

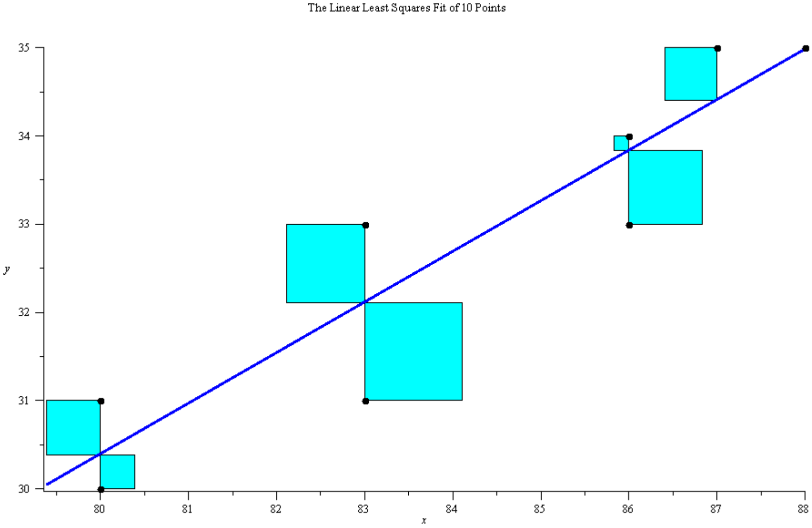
$x =$ obvod hrudníku, $y =$ hmotnost

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 849, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 72171, \quad \sum_{i=1}^{10} y_i = 332, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 28239.$$

Odtud

$$\begin{aligned} 72171a + 849b &= 28239 \\ 849a + 10b &= 332 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= 58/101 \doteq 0.57 \\ b &= -1571/101 \doteq -15.55 \end{aligned}$$

Rovnice přímky vyjadřující závislost hmotnosti na obvodu hrudníku je $y = 0.57x - 15.55$.


The Linear Least Squares Fit of 10 Points
35
34
33
32
31
30
y
80
81
82
83
84
85
86
87
88
x

Obsah

1 Numerická integrace
- Obdélníkové pravidlo
- Lichoběžníkové pravidlo

2 Algebraická rovnice
- Tvrzení a příklady
- Metoda bisekce (půlení)

3 Taylorův polynom
- Definice a výpočet
- Příklad

4 Polynomiální interpolace
- Lagrangeův interpolační polynom

5 Lineární regrese
- Metoda nejmenších čtverců

6 Příklady

7 Wolfram|Alpha

Příklad

Experimentálně jsme zjistili hodnoty funkce f v následující tabulce.

x_i	-2	-1	1	2	3	4
$f(x_i)$	3	2	4	3	5	4

Odhadněte $\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$ pomocí

(i) obdélníkového pravidla s 5 dělicími intervaly a výškou obdélníku danou vždy v levém krajním bodě dělicího intervalu,

(ii) obdélníkového pravidla s 5 dělicími intervaly a výškou obdélníku danou vždy v pravém krajním bodě dělicího intervalu,

(iii) lichoběžníkového pravidla s 5 dělicími intervaly.

(i) 19, (ii) 22, (iii) 20,5.

Příklad

Sestrojte Lagrangeův interpolační polynom pro funkci, pro niž platí

$$f(-1) = 2, \quad f(1) = -2, \quad f(3) = 1.$$

$$P(x) = \frac{7}{8}x^2 - 2x - \frac{7}{8}.$$

Příklad

Sestrojte Lagrangeův interpolační polynom procházející body

$$[-2, 5], [-1, 3], [0, 1], [1, 0].$$

$$P(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x + 1.$$

Příklad

Metodou nejmenších čtverců proložte přímku body

1. $[0,1],[1,3],[2,-1],[3,3]$,
2. $[1,1],[2,0],[0,3],[-2,5]$.

1. $y=\frac{x}{5}+\frac{6}{5}$.
2. $y=-\frac{9}{7}x+\frac{18}{7}$.

Příklad

Aproximujte všechny kořeny rovnice $x^3-7x+5=0$ s chybou menší než $0,1$.

Odhady vyjdou přibližně $-2,948828358; 0,7828156787$ a $2,166012680$. Výsledky se mohou lišit dle zvoleného prvního dělení intervalu. (Nikdy ale o víc, než o příslušnou chybu).

Obsah

1. Numerická integrace
   - Obdélníkové pravidlo
   - Lichoběžníkové pravidlo
2. Algebraická rovnice
   - Tvrzení a příklady
   - Metoda bisekce (půlení)
3. Taylorův polynom
   - Definice a výpočet
   - Příklad
4. Polynomiální interpolace
   - Lagrangeův interpolační polynom
5. Lineární regrese
   - Metoda nejmenších čtverců
6. Příklady
7. Wolfram|Alpha

- Kořeny algebraické rovnice. ⊛

```
solve x^5+5x^4-4x^3+12x-1=0
```

- Taylorův polynom. ⊛

```
series of xln(x) at x=1, order 7
```

- Lagrangeův interpolační polynom. ⊛

```
interpolating polynomial [0,1],[1,2],[2,4],[3,8]
```

- Metoda nejmenších čtverců. ⊛

```
linear fit [-1,3],[0,-1],[1,0],[2,2]
```