Určitý integrál a diferenciální rovnice

Petr Hasil

Přednáška z matematiky

MENDELU Agronomická fakulta

Mendelova univerzita v Brně

MENDELU Lesnická a dřevařská fakulta

Obsah

Obsah

Definice (Dělení intervalu)

Uvažujme uzavřený interval $I = [a, b], -\infty < a < b < \infty$. *Dělením intervalu* I rozumíme konečnou posloupnost $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ bodů z intervalu I takových, že

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

čísla $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nazýváme *dělicí body*.

Definice (Dělení intervalu)

Uvažujme uzavřený interval $I = [a, b], -\infty < a < b < \infty$. *Dělením intervalu* I rozumíme konečnou posloupnost $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ bodů z intervalu I takových, že

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

čísla $x_0, x_1, \dots, x_n$ nazýváme *dělicí body*.

Normou $\nu(D)$ dělení D rozumíme maximální vzdálenost sousedních dělicích bodů, tedy

$$\nu(D) = \max\{x_i - x_{i-1}, i = 1, \dots, n\}.$$

Definice (Integrální součet)

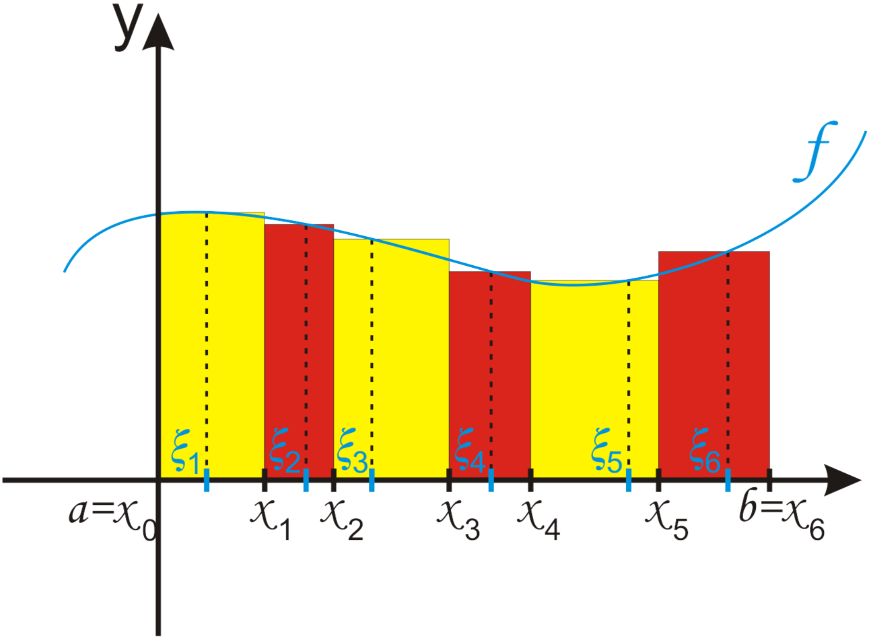
Nechť f je funkce definovaná a ohraničená na uzavřeném intervalu $I = [a, b]$ a nechť $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ je dělení intervalu I a $R = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ je posloupnost čísel z intervalu I takových, že

$$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Potom součet

$$\sigma(f, D, R) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

nazýváme *integrální součet* funkce f příslušný dělení D a výběru reprezentantů R.


y
f
ξ_1
ξ_2
ξ_3
ξ_4
ξ_5
ξ_6
$a=x_0$
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
$b=x_6$

Jak je vidět na předchozím obrázku, geometricky je integrální součet kladné funkce roven součtu obsahů obdélníků , jejichž základny mají délku rovnu délce jednotlivých podintervalů v dělení D a jejichž výška je rovna funkční hodnotě v reprezentantu z příslušného podintervalu.

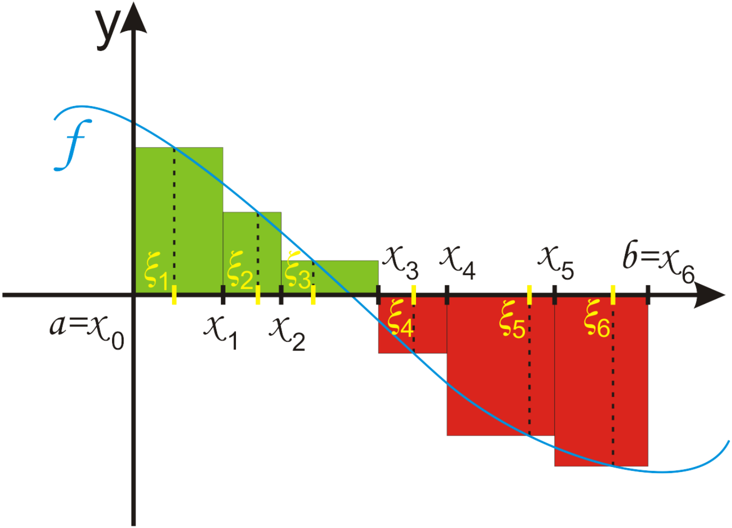
Jak je vidět na předchozím obrázku, geometricky je integrální součet kladné funkce roven součtu obsahů obdélníků , jejichž základny mají délku rovnu délce jednotlivých podintervalů v dělení D a jejichž výška je rovna funkční hodnotě v reprezentantu z příslušného podintervalu.

Je-li funkční hodnota v reprezentantu záporná, tedy obdélníček je pod osou x, potom je samozřejmě příspěvek tohoto obdélníčku (podintervalu) do integrálního součtu záporný.

Jak je vidět na předchozím obrázku, geometricky je integrální součet kladné funkce roven součtu obsahů obdélníků , jejichž základny mají délku rovnu délce jednotlivých podintervalů v dělení D a jejichž výška je rovna funkční hodnotě v reprezentantu z příslušného podintervalu.

Je-li funkční hodnota v reprezentantu záporná, tedy obdélníček je pod osou x, potom je samozřejmě příspěvek tohoto obdélníčku (podintervalu) do integrálního součtu záporný.

Obecně je tedy integrální součet roven součtu obsahů obdélníků nad osou x zmenšený o obsah obdélníků pod ní.


y
f
ξ_1
ξ_2
ξ_3
ξ_4
ξ_5
ξ_6
$a=x_0$
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
$b=x_6$

Definice (Určitý (Riemannův) integrál)

Nechť f je funkce definovaná a ohraničená na uzavřeném intervalu $I = [a, b]$. Dále nechť D_n je posloupnost dělení intervalu I taková, že $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$ a R_n posloupnost reprezentantů z těchto dělení. Řekneme, že funkce f je Riemannovsky integrovatelná na I, jestliže existuje číslo $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, D_n, R_n) = \mathcal{R}.$$

Číslo $\mathcal{R}$ nazýváme *Riemannův (určitý) integrál* funkce f na intervalu I a značíme jej

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Číslo a nazýváme *dolní mez* a číslo b *horní mez* Riemannova integrálu.

Riemannův integrál tedy pro funkci f spojitou na intervalu $I = [a, b]$ získáme takto:

Riemannův integrál tedy pro funkci f spojitou na intervalu $I = [a, b]$ získáme takto:

- Interval rozdělíme na podintervaly. Z každého podintervalu vybereme reprezentanta určíme integrální součet.

Riemannův integrál tedy pro funkci f spojitou na intervalu $I = [a, b]$ získáme takto:

- Interval rozdělíme na podintervaly. Z každého podintervalu vybereme reprezentanta určíme integrální součet.
- Dělení zjemníme (vybereme nové dělení s menší normou) a postup opakujeme.

Riemannův integrál tedy pro funkci f spojitou na intervalu $I = [a, b]$ získáme takto:

- Interval rozdělíme na podintervaly. Z každého podintervalu vybereme reprezentanta určíme integrální součet.
- Dělení zjemníme (vybereme nové dělení s menší normou) a postup opakujeme.
- Dělení zjemňujeme dokud se integrální součty neustálí. Hodnota, na které se ustálí je Riemannův integrál funkce f na intervalu I.

Věta (Aditivita vzhledem k mezím)

Nechť f je funkce integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a nechť $c \in (a, b)$. Potom je f integrovatelná na intervalech $[a, c]$ a $[c, b]$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta (Linearita vzhledem k funkci)

Nechť f a g jsou funkce integrovatelné na intervalu $[a,b]$ a nechť $c \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right] \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Meze integrálu

Nechť $a < b$.

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Věta (Monotonie vzhledem k funkci)

Nechť f a g jsou funkce integrovatelné na intervalu $[a, b]$ takové, že pro $x \in (a, b)$ je $f(x) \leq g(x)$. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důsledek (Integrál z nezáporné funkce)

Uvažujeme-li v předchozí větě $f \equiv 0$ dostaneme, že integrál z funkce nezáporné na celém intervalu, přes nejž integrujeme, je nezáporný.

Poznámka

Obdobné tvrzení snadno obdržíme pro funkci nekladnou.

Věta (Postačující podmínky integrovatelnosti)

Funkce f je Riemannovsky integrovatelná na intervalu $I = [a, b]$, jestliže splňuje aspoň jednu z následujících podmínek.

- *Funkce f je na I spojitá.*
- *Funkce f je na I ohraničená a monotonní.*
- *Funkce f je na I ohraničená a má na I konečný počet bodů nespojitosti.*

Obsah

Věta (Newton–Leibnizova formule)

Nechť je funkce f Riemannovsky integrovatelná na intervalu $I = [a, b]$. Dále nechť je funkce F na intervalu (a, b) primitivní funkce k funkci f a je spojitá na I. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Věta (Newton–Leibnizova formule)

Nechť je funkce f Riemannovsky integrovatelná na intervalu $I = [a, b]$. Dále nechť je funkce F na intervalu (a, b) primitivní funkce k funkci f a je spojitá na I. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

$$\int_{-2}^{5} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{5} = \frac{5^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{133}{3}.$$

Věta (Metoda per partes pro určitý integrál)

Nechť jsou funkce u, v *a jejich derivace spojité na intervalu* $[a, b]$. *Pak platí*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta (Metoda per partes pro určitý integrál)

Nechť jsou funkce u, v a jejich derivace spojité na intervalu $[a, b]$. Pak platí

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_1^3 x\ln x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{9}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 1\right) - \frac{1}{2}\int_1^3 x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{9}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}\ln 3 - 2$$

Věta (Substituční metoda pro určitý integrál)

Nechť jsou funkce f, φ a φ' spojité na příslušných intervalech a nechť je funkce φ ryze monotonní. Pak platí

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_1^5 \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} t = 2x-1 & x = 5 \Rightarrow t = 9 \\ \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x & x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t & \end{array} \right|$$

$$= \int_1^9 \sqrt{t}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^9 t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^9$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_1^9 = \frac{1}{3}(27-1) = \frac{26}{3}$$

$$\int_0^1 x^2(5-2x^3)^4\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} t = 5-2x^3 & x=1 \Rightarrow t=3 \\ \mathrm{d}t = -6x^2\,\mathrm{d}x & x=0 \Rightarrow t=5 \\ x^2\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\,\mathrm{d}t & \end{array} \right|$$

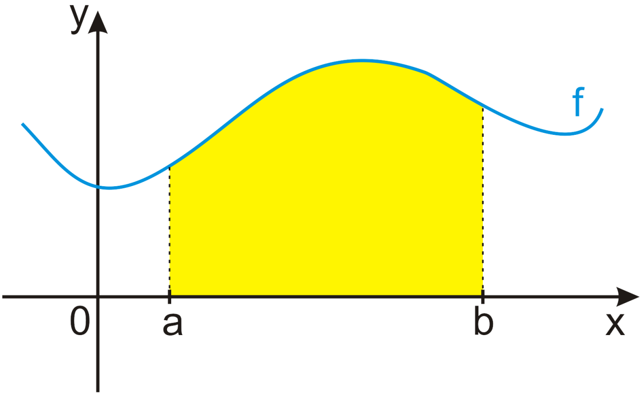
$$= \int_5^3 t^4 \left(-\frac{1}{6}\right) \mathrm{d}t = -\frac{1}{6}\int_5^3 t^4\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\int_3^5 t^4\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{t^5}{5}\right]_3^5 = \frac{1}{30}(5^5-3^5) = \frac{2882}{30} = \frac{1441}{15}$$

Obsah

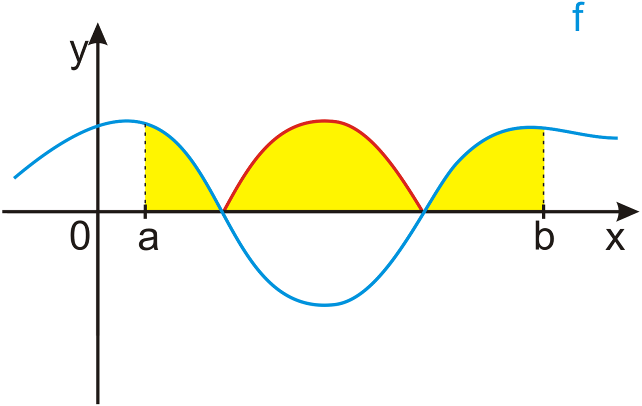
Plocha podgrafu kladné funkce na intervalu $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Plocha mezi grafem funkce f a osou x na intervalu $[a, b]$:

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

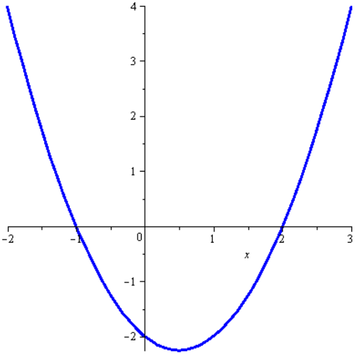


Příklad

Určete plochu ohraničenou grafem funkce $f(x) = x^2 - x - 2$ a osou x na intervalu $I = [-2, 3]$.

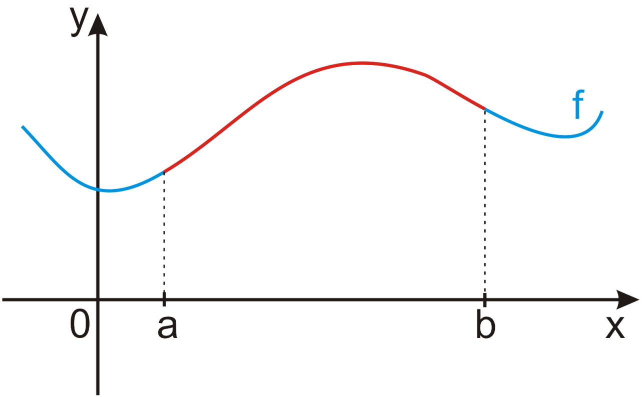
Protože $x^2 - x - 2 = 0$ má kořeny $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$, snadno zjistíme, že funkce f je na intervalu I kladná pro $x \in (-2, -1) \cup (2, 3)$ a záporná pro $x \in (-1, 2)$.

$$
\begin{aligned}
P &= \int_{-2}^{3} |f(x)| \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{-1} f(x) \,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} (-f(x)) \,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{2}^{3} f(x) \,\mathrm{d}x \\
&= \ldots = \frac{49}{6}
\end{aligned}
$$



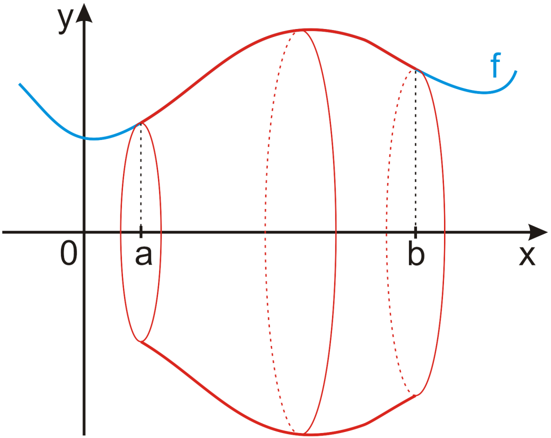
Délka křivky grafu funkce f na intervalu $[a, b]$.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$



Objem a povrch pláště rotačního tělesa
(rotace nezáporné funkce f kolem osy x na intervalu $[a, b]$).

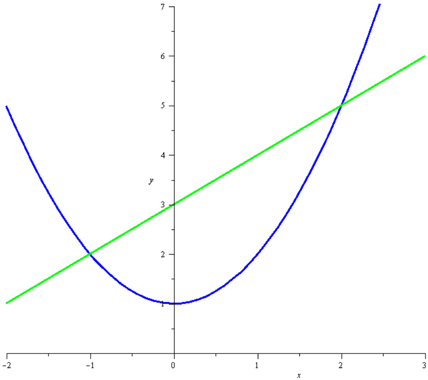
$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$



Příklad

Určete plochu ohraničenou grafy funkcí $f(x) = x^2 + 1$ a $g(x) = x + 3$.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^2 + 1 &= x + 3 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ x_1 = -1&, x_2 = 2 \end{aligned}$$

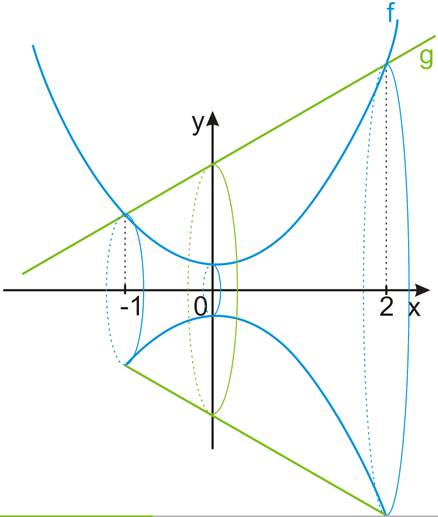


$$\int_{-1}^{2} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} (x+3) - (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} 2 + x - x^2\,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{9}{2}.$$

Příklad

Určete objem tělesa vzniklého rotací plochy omezené grafy funkcí $f(x) = x^2 + 1$ a $g(x) = x + 3$ kolem osy x.

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-1}^{2} g^2(x)\,\mathrm{d}x - \pi \int_{-1}^{2} f^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \int_{-1}^{2} (x+3)^2 - (x^2+1)^2\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \int_{-1}^{2} 8 + 6x - x^2 - x^4\,\mathrm{d}x \\
&= \ldots = \pi \frac{117}{5}.
\end{aligned}
$$



Obsah

Definice

Diferenciální rovnice je rovnice, ve které se neznámá funkce vyskytuje spolu se svými derivacemi. *Řád diferenciální rovnice* je nejvyšší derivace neznámé funkce, která se v rovnici vyskytne.

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Budeme se zabývat rovnicemi prvního řadu.

Rovnice prvního řádu

- Obecný tvar je $F(x, y, y') = 0$, kde F je funkce tří proměnných.
- Rovnice rozřešené vzhledem k derivaci je $y' = f(x, y)$, kde f je funkce dvou proměnných.

Definice

Řešení diferenciální rovnice je funkce $y = y(x)$ (popř. $y = y(t)$, $y = y(x, t)$,...), která splňuje danou diferenciální rovnici.

Řešení diferenciálních rovnic získáme obvykle pomocí integrování, proto budou obsahovat integrační konstanty (tolik integračních konstant, kolikrát budeme integrovat). Tedy tzv. *obecné řešení* (tj. všechna řešení) dostaneme jako množinu danou těmito konstantami.

Řešení dané počáteční podmínkou, např. $y(x_0) = y_0$ (předem zadaná hodnota v daném bodě), se nazývá *partikulární*.

Poznámka

- Řešení diferenciálních rovnic jsou spojité funkce (existují jejich derivace).
- Rovnice $y' = f(x)$ nemá jediné řešení (primitivní funkce tvoří množinu). Pokud uvažujeme podmínku, že $F(x)$ má procházet určitým bodem, pak má rovnice jedno řešení. Podmínka $y(x_0) = y_0$ se nazývá *počáteční podmínka* a rovnice s touto podmínkou *počáteční problém* (Cauchyho úloha).
- Výpočet primitivní funkce $y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ odpovídá řešení rovnice $y' = f(x)$.
- $y' = y$ má řešení $y = c \cdot \mathrm{e}^x$.
- $y'' + y = 0$ slouží k popisu malých kmitů matematického kyvadla. Řešení jsou $y = \sin x$, $y = \cos x$ a každá lineární kombinace těchto dvou funkcí, tedy řešení tvoří lineární prostor.

Klasifikace

- Podle počtu nezávisle proměnných na obyčejné (ODR) a parciální (PDR) diferenciální rovnice.
- Podle linearity na lineární a nelineární diferenciální rovnice.
- Podle řádu (rovnice *n*-tého řádu).

Příklad

- $ms'' = F$, kde $s = s(t)$ je poloha bodu na přímce, dráha (Newtonův zákon)
- $\alpha^2 u_{xx} = u_t$, kde $u = u(x,t)$ je teplota v čase t v bodě x na přímce (vedení tepla v tyči)
- $\alpha^2 u_{xx} = u_{tt}$, kde $u = u(x,t)$ je pozice vzhledem ke klidové poloze, vychýlení v čase t v bodě x na přímce (vlnová rovnice)
- $\theta'' + \alpha \sin\theta = 0$, kde $\theta = \theta(t)$ je úhel (matematické kyvadlo)
- $Q' = -kQ$, kde $Q = Q(t)$ je množství radioaktivní látky (radioaktivní rozpad)

Speciální případy

- $f(x, y) = f(x)$, tj. $y' = f(x)$
  Odpovídá hledání primitivní funkce k $f(x)$, tedy $y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$.
  Problém
  $$y' = f(x), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$
  má řešení
  $$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}t.$$
- $f(x, y) = g(y)$, tj. $y' = g(y)$
  Lze převést na předchozí případ využitím inverzní funkce.
  $$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{g(y)}, \quad g(y) \neq 0,$$
  tedy máme problém (1) pro funkci $x(y)$ s řešením
  $x = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t$, což implicitně udává funkci $y = y(x)$.

Příklad

Vyřešte rovnice

1. $y' = 3x^2 + \sin x$,
2. $y' = \frac{7}{e^y + 4y - 3}$.

1. $y = \int 3x^2 + \sin x \, dx = x^3 - \cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$
2.

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{e^y + 4y - 3}{7} \\
x &= \frac{1}{7} \int e^y + 4y - 3 \, dy = \frac{1}{7}(e^y + 2y^2 - 3y) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}, \\
7x &= e^y + 2y^2 - 3y + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Obsah

Rovnicí se separovatelnými proměnnými budeme nazývat rovnici $y' = f(x)g(y)$.

Způsob řešení

$$
\begin{aligned}
y' &= f(x) \cdot g(y) \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x) \cdot g(y) \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{g(y)} \\
\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} &= f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \Big/ \text{integrace} \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} + c_1 &= \int f(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \\
G(y) &= F(x) + c \quad (c = c_2 - c_1)
\end{aligned}
$$

Explicitní řešení pak lze často zapsat ve tvaru $y(x) = G^{-1}\big[F(x) + c\big]$.

Příklad

Vyřešme $y' = \frac{y^2-y}{x}$, tedy $f(x) = \frac{1}{x}, g(y) = y^2 - y$.

Máme

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{y^2-y}{x} \\ \frac{\mathrm{d}y}{y^2-y} &= \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pro} \quad y^2 - y \neq 0 \Rightarrow y \neq 0 \wedge y \neq 1. \end{aligned}$$

Vypočítáme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(y-1)} = \int \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \ln|y-1| - \ln|y| + c_1,$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c_2.$$

Tedy

$$
\begin{aligned}
\ln|y-1| - \ln|y| + c_1 &= \ln|x| + c_2 \\
\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| &= \ln|x| + c_3, \quad c_3 \in \mathbb{R} \\
\left|\frac{y-1}{y}\right| &= |x| \cdot \mathrm{e}^{c_3} \\
\frac{y-1}{y} &= \pm\,\mathrm{e}^{c_3} \cdot x = c \cdot x, \quad c \neq 0 \\
y &= \frac{1}{1-cx}, \quad c \neq 0.
\end{aligned}
$$

Během výpočtu jsme udělali předpoklad, že $y \neq 0 \wedge y \neq 1$. Zkontrolujeme, zda nejde také o řešení rovnice:

- $y = 1$ je řešením a dostaneme jej pro $c = 0$,
- $y = 0$ je řešením, ale nijak jej nedostaneme,

tedy

$$\underbrace{y = \frac{1}{1 - cx},}_{\text{obecné řešení}} \quad \underbrace{y = 0,}_{\text{singulární řešení}} \quad c \in \mathbb{R}$$

(Obecné řešení obsahuje tolik konstant, jako byl řád rovnice.) ■

Příklad

$$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}, \qquad y(0) = 1$$

Počáteční problém – vypočítáme obecné řešení a pak použitím počáteční podmínky určíme (vybereme) řešení, tedy

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1+y^2}{1+x^2} \\ \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} &= \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ \operatorname{arctg} y &= \operatorname{arctg} x + c. \end{aligned}$$

Podmínka $y(0) = 1$ dává $\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} 0 + c \Rightarrow c = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Odtud dostáváme řešení

$$y = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}\right)$$

a užitím vzorce $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$ ho lze upravit na

$$y = \frac{x+1}{1-x}.$$

■

Obsah

Lineární diferenciální rovnice je rovnice tvaru (linearita vzhledem k y)

$$y' = a(x)y + b(x). \tag{LDR}$$

Definice

Je-li $b(x) \equiv 0$, mluvíme o *homogenní lineární rovnici*

$$u' = a(x)u, \tag{hLDR}$$

v opačném případě o *nehomogenní lineární rovnici*.

Poznámka

Obecné řešení rovnice (LDR) (tj. řešení závisející na jedné integrační konstantě) je tvaru $y = y_p + u$, kde y_p je nějaké řešení rovnice (LDR), tzv. *partikulární řešení*, a u je *obecné řešení* rovnice (hLDR).

Obecná metoda řešení je tzv. variace konstant, kdy se nejprve vyřeší homogenní rovnice metodou separace proměnných. Poté se v jejím řešení aditivní konstanta nahradí za neznámou funkci, kterou lze najít dosazením do původní rovnice a integrováním. Tento postup v jistém zobecnění funguje i pro některé rovnice vyšších řádů.
Nás zajímají pouze rovnice prvního řádu, proto použijeme metodu *integračního faktoru*.

Integrační faktor

Pro rovnici

$$y' = a(x)y + b(x)$$

je integrační faktor

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Touto funkcí celou rovnici vynásobíme a následně upravujeme.

Postup

$$
\begin{aligned}
y' - a(x)\,y &= b(x)\\
\big[y' - a(x)\,y\big]\cdot \mu(x) &= b(x)\cdot \mu(x)\\
\underbrace{y'\cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} - y\,a(x)\cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}}_{\left(y\cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\right)'} &= b(x)\cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\\
\left(y\cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\right)' &= b(x)\cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\\
y\cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} &= \int b(x)\cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c
\end{aligned}
$$

$$
y = \mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int b(x)\cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c\right],\quad c\in\mathbb{R}
$$

Příklad

Vyřešte rovnici

$$y' = 4xy + (2x+1)\,\mathrm{e}^{2x^2}.$$

Integrační faktor je $\mu(x) = \mathrm{e}^{-\int 4x\ \mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-2x^2}$. Vynásobíme jím rovnici se ziskem (vše obsahující y je převedeno doleva)

$$y'\,\mathrm{e}^{-2x^2} - 4xy\,\mathrm{e}^{-2x^2} = 2x+1,$$

odtud

$$\left(y\,\mathrm{e}^{-2x^2}\right)' = 2x+1.$$

Obě strany zintegrujeme

$$y\,\mathrm{e}^{-2x^2} = \int 2x+1\ \mathrm{d}x = x^2+x+c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Řešením je tedy

$$y = (x^2+x+c)\,\mathrm{e}^{2x^2}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Příklad (Růst, učení,...)

Jistý druh roste tak, že má jistou maximální délku a rychlost růstu je přímo úměrná délce, kterou ještě mají dorůst. Sestavte rovnici modelující tuto situaci.

Označíme-li délku v čase t jako funkci $\ell(t)$ a maximální délku L, pak příslušná rovnice je

$$\ell'(t) = k[L - \ell(t)],$$

kde konstantu úměrnosti k by bylo nutné určit experimentálně (měření a výpočet pro konkrétní druh/situaci).

Příklad (Výměna tepla mezi tělesem a okolím)

Je nalezena mrtvola, jejíž teplota je změřena na 26.6 °C. O 3 hodiny později je její teplota 21.1 °C, přičemž teplota okolí je 18.3 °C. Určete čas úmrtí za předpokladu, že teplota lidského těla je 37 °C.

Povrchová teplota tělesa se mění rychlostí, která je přímo úměrná rozdílu teploty tělesa a okolního prostředí (Newtonův teplotní zákon).

Označme teplotu tělesa v čase t jako $\Theta(t)$ [°C] a teplotu okolního prostředí jako T [°C]. Potom musí platit rovnice

$$\Theta'(t) = -k\,[\Theta(t) - T], \qquad \text{kde } k > 0 \text{ je konstanta úměrnosti.}$$

Všimněte si, že pokud bude teplota okolního prostředí *vyšší*, než je teplota tělesa (tj. pokud je $\Theta(t) < T$), potom je $\Theta' > 0$ a těleso se bude zahřívat. Zatímco pokud bude teplota okolního prostředí *nižší*, než je teplota tělesa (tj. pokud $\Theta(t) > T$), potom je $\Theta' < 0$ a těleso se bude ochlazovat.

Při použití výše uvedeného značení (pro čas t v jednotkách [hodin]) máme

$$T = 18.3, \ \Theta(0) = 26.6 \text{ (teplota v čase nalezení mrtvoly)}, \ \Theta(3) = 21.1,$$

přičemž funkce $\Theta(t)$ splňuje rovnici

$$\Theta' = -k\,(\Theta - T) \quad \Rightarrow \quad \Theta' = -k\,\Theta + k\,T.$$

Poslední rovnice je lineární diferenciální rovnice pro neznámou funkci $\Theta(t)$. Tuto rovnici vyřešíme např. metodou integračního faktoru $\mu(t) = \mathrm{e}^{kt}$, potom

$$\Theta = T + c\ \mathrm{e}^{-kt} = 18.3 + c\ \mathrm{e}^{-kt}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Konstanty c a k určíme z informací o počáteční teplotě a o teplotě v čase $t = 3$ [hodiny], tj.

$$26.6 = \Theta(0) = 18.3 + c\ \mathrm{e}^{0} = 18.3 + c \ \Rightarrow \ c = 8.3 \ \Rightarrow \ \Theta = 18.3 + 8.3\ \mathrm{e}^{-kt},$$

a dále

$$21.1 = \Theta(3) = 18.3 + 8.3\ \mathrm{e}^{-3k} \;\Rightarrow\; \mathrm{e}^{-3k} = \frac{21.1 - 18.3}{8.3} \approx 0.337$$

$$\Rightarrow\; -3k = \ln 0.337 \;\Rightarrow\; k = -\frac{\ln 0.337}{3} \approx 0.362.$$

Tedy hledané řešení je funkce

$$\Theta(t) = 18.3 + 8.3\ \mathrm{e}^{-0.362t}\,.$$

Najdeme čas úmrtí, tj. určíme čas t, pro který je $\Theta(t) = 37\ ^\circ\mathrm{C}$. Tedy

$$18.3 + 8.3\ \mathrm{e}^{-0.362t} = 37 \;\Rightarrow\; \mathrm{e}^{-0.362t} = \frac{37 - 18.3}{8.3} \approx 2.253$$

$$\Rightarrow\; -0.362t = \ln 2.253 \;\Rightarrow\; t = -\frac{\ln 2.253}{0.362} \approx -2.24.$$

Mrtvola byla nalezena přibližně 2 hodiny a 15 minut po smrti. ■

Příklad (Míchání dvou látek)

Vodní nádrž o celkovém objemu $L = 1000$ [litrů] obsahuje $Q_0 = 0$ [gramů] soli v počátečním čase $t_0 = 0$ [minut]. Do nádrže přitéká roztok o koncentraci soli $c = 50$ [gramů/litr] rychlostí $v = 20$ [litrů/min] a po řádném promíchání s vodou v nádrži z ní vytéká stejnou rychlostí. Určete množství soli $Q(t)$ v nádrži v libovolném čase t a limitní množství pro $t \to \infty$.

Označili jsme jako $Q(t)$ [g] množství soli v nádrži v libovolném čase t [min]. Potom $Q'(t)$ udává, jak rychle se toto množství mění a přitom musí platit, že

$$Q'(t) = \left(\begin{array}{c} \text{rychlost, s jakou sůl} \\ \text{do nádrže přitéká} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{rychlost, s jakou sůl} \\ \text{z nádrže vytéká} \end{array} \right).$$

Sůl do nádrže *přitéká* rychlostí

$$c \cdot v = 50 \ \ [\mathrm{g/l}] \ \cdot 20 \ \ [\mathrm{l/min}] \ = 1000 \ \ [\mathrm{g/min}].$$

A protože v nádrži je vždy koncentrace soli rovna $\frac{Q(t)}{L} = \frac{Q(t)}{1000}$ [g/l], sůl z nádrže *vytéká* rychlostí

$$\frac{Q(t)}{L} \cdot v = \frac{Q(t)}{1000} \ \ [\mathrm{g/l}] \ \cdot 20 \ \ [\mathrm{l/min}] \ = \frac{Q(t)}{50} \ \ [\mathrm{g/min}].$$

Tedy hledaná funkce $Q(t)$ splňuje rovnici

$$Q'(t) = c \cdot v - \frac{Q(t)}{L} \cdot v \qquad \Rightarrow \qquad Q' = 1000 - \frac{Q}{50},$$

což je lineární diferenciální rovnice 1. řádu, a dále splňuje počáteční podmínku

$$Q(t_0) = Q_0 \qquad \Rightarrow \qquad Q(0) = 0. \tag{2}$$

Uvedenou rovnici vyřešíme metodou integračního faktoru

$$\mu(t) = \mathrm{e}^{\int \frac{v}{L}\,dt} = \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t} \qquad \Rightarrow \qquad \mu(t) = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{50}\,dt} = \mathrm{e}^{0.02\,t}$$

a potom máme (obecně)

$$\begin{aligned} Q' + \frac{v}{L}\,Q &= c\,v \\ Q'\,\mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t} + \frac{v}{L}\,\mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t}\,Q &= c\,v\,\mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t} \\ \left(Q\,\mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t}\right)' &= c\,v\,\mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t} \\ Q\,\mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t} &= \int c\,v\,\mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t}\,dt = c\,v\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t}}{\frac{v}{L}} + C \\ Q &= c\,L + C\,\mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\,t}, \quad C \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

a pro náš konkrétní příklad

$$
\begin{aligned}
Q' + 0.02\,Q &= 1000,\\
Q'\ \mathrm{e}^{0.02\,t} + 0.02\ \mathrm{e}^{0.02\,t}\ Q &= 1000\ \mathrm{e}^{0.02\,t},\\
\left(Q\ \mathrm{e}^{0.02\,t}\right)' &= 1000\ \mathrm{e}^{0.02\,t},\\
Q\ \mathrm{e}^{0.02\,t} = \int 1000\ \mathrm{e}^{0.02\,t}\ dt &= 1000\,\frac{\mathrm{e}^{0.02\,t}}{0.02} + C,\\
Q &= 50000 + C\ \mathrm{e}^{-0.02\,t}, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

A protože je počáteční množství známo v (2), pro integrační konstantu C platí

$$Q_0 = Q(t_0) = c\,L + C\ \mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\,t_0} \qquad \Rightarrow \qquad 0 = Q(0) = 50000 + C\ \mathrm{e}^{0},$$
$$C = (Q_0 - c\,L)\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t_0} \qquad \Rightarrow \qquad C = -50000,$$

a tedy výsledné partikulární řešení (udávající kolik gramů soli bude v nádrži v okamžiku t minut) je tvaru

$$Q = c\,L + (Q_0 - c\,L)\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t_0}\ \mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\,t} \qquad \Rightarrow \qquad Q = 50000 - 50000\ \mathrm{e}^{-0.02\,t},$$
$$Q = c\,L + (Q_0 - c\,L)\ \mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\,(t-t_0)} \qquad \Rightarrow \qquad Q = 50000\left(1 - \mathrm{e}^{-0.02\,t}\right).$$

Tedy v závislosti na tom, jestli je $Q_0 > c\,L$ nebo $Q_0 < c\,L$, množství soli v nádrži (záporně exponenciálně) klesá nebo roste, a při $Q_0 = c\,L$ zůstává stále stejné.

Pro $t \to \infty$ je potom

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to\infty} \left\{ c\,L + (Q_0 - c\,L)\, \underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{v}{L}(t-t_0)}}_{\to 0} \right\}$$

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = c\,L \quad [\mathrm{g}]\ ,$$

tedy

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to\infty} 50000\, \Big(1 - \underbrace{\mathrm{e}^{-0.02\,t}}_{\to 0}\Big)$$

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = 50000 \quad [\mathrm{g}]\ .$$

Po dostatečně dlouhé době bude tedy koncentrace soli v nádrži rovna

$$Q_\infty = \frac{c\,L}{L} = c \quad [\mathrm{g/l}], \text{neboli} Q_\infty = \frac{50000}{1000} = 50 \quad [\mathrm{g/l}],$$

což je přesně koncentrace přitékajícího roztoku (samozřejmě, po „nekonečně dlouhé době“ přitékající roztok „nahradí“ původní roztok v nádrži, přičemž vůbec nezáleží na původním množství Q_0, tj. na tom, kolik soli bylo v nádrži na počátku). ■

Příklad (Míchání dvou látek II)

Jak se změní model v Příkladu 11, pokud bude roztok po řádném promíchání s vodou v nádrži vytékat rychlostí pouze $w = 19$ [litrů/min]? Předpokládáme-li, že nádrž má celkový objem 1600 litrů, jaká bude koncentrace roztoku v nádrži v okamžiku jejího naplnění?

Všimněte si, že se nyní *objem* roztoku *v nádrži mění* (roste) a to rychlostí $v - w = 1$ [litr/min]. To znamená, že nyní sůl z nádrže *vytéká* rychlostí

$$\frac{Q(t)}{L + (v - w)\,(t - t_0)} \cdot w = \frac{Q(t)}{1000 + t} \;\; [\mathrm{g/l}] \cdot 19 \;\; [\mathrm{l/min}] \;\; = \frac{19\,Q(t)}{1000 + t} \;\; [\mathrm{g/min}].$$

Výsledná diferenciální rovnice má tedy tvar

$$Q'(t) = c \cdot v - \frac{Q(t)}{L + (v - w)\,(t - t_0)} \cdot w \qquad \Rightarrow \qquad Q' = 1000 - \frac{19\,Q(t)}{1000 + t},$$

což je opět lineární diferenciální rovnice 1. řádu, přičemž řešení $Q(t)$ splňuje počáteční podmínku (2).

Příslušný integrační faktor je

$$\mu(t) = \mathrm{e}^{\int \frac{19}{1000+t}\,dt} = \mathrm{e}^{19\,\ln(1000+t)} = \mathrm{e}^{\ln(1000+t)^{19}} = (1000+t)^{19}.$$

Tedy platí

$$\begin{aligned}
Q' + \frac{19\,Q(t)}{1000+t} &= 1000 \\
Q'\,(1000+t)^{19} + 19\,Q(t)\,(1000+t)^{18} &= 1000\,(1000+t)^{19} \\
\left[Q\,(1000+t)^{19}\right]' &= 1000\,(1000+t)^{19} \\
Q\,(1000+t)^{19} &= 1000\,\frac{(1000+t)^{20}}{20} + C \\
Q = \frac{50\,(1000+t)^{20} + C}{(1000+t)^{19}} &= 50\,(1000+t) + \frac{C}{(1000+t)^{19}}.
\end{aligned}$$

Z počáteční podmínky (2) pak určíme hodnotu C, tj.

$$0 = Q(0) = 50 \cdot 1000 + \frac{C}{1000^{19}} \;\Rightarrow\; C = -50000 \cdot 1000^{19} = -5 \cdot 10^{61}.$$

Tedy výsledné partikulární řešení je tvaru

$$Q = 50\,(1000 + t) - \frac{5 \cdot 10^{61}}{(1000 + t)^{19}}.$$

Protože v nádrži bylo původně 1000 litrů vody a nádrž se nyní naplňuje rychlostí 1 litr/min, bude nádrž naplněna za 600 minut (tj. za 10 hodin). Tedy v okamžiku $t = 600$ bude v nádrži

$$Q(600) = 50\,(1600) - \frac{5 \cdot 10^{61}}{(1600)^{19}} \approx 79993.4 \quad \text{[g] soli,}$$

tj. koncentrace soli bude

$$\frac{Q(600)}{1600} \approx \frac{79993.4}{1600} \approx 49.996 \quad \text{[g/l],}$$

tedy tato koncentrace bude téměř stejná jako u přitékajícího roztoku. ■

Obsah

Příklad

Vyřešte rovnice

(i) $y' = 3\cos x + \sin 2x$,

(ii) $y' = \frac{1}{y}$.

Příklad

Vyřešte rovnice

(i) $y' = 3\cos x + \sin 2x$,

(ii) $y' = \frac{1}{y}$.

Řešení:

(i) $y = 3\sin x - \frac{\cos 2x}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$,

(ii) $x = \frac{y^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

Příklad

Vyřešte počáteční problémy

(i) $y' = 3\cos x + \sin 2x, \quad y(0) = 5,$

(ii) $y' = \frac{1}{y}, \quad y(2) = 4,$

(iii) $y' = \frac{1}{y}, \quad y(2) = -4.$

Příklad

Vyřešte počáteční problémy

(i) $y' = 3\cos x + \sin 2x, \quad y(0) = 5,$

(ii) $y' = \frac{1}{y}, \quad y(2) = 4,$

(iii) $y' = \frac{1}{y}, \quad y(2) = -4.$

Řešení:

(i) $y = 3\sin x - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{11}{2},$

(ii) $x = \frac{y^2}{2} - 6 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{2x + 12},$

(ii) $x = \frac{y^2}{2} - 6 \quad \Rightarrow \quad y = -\sqrt{2x + 12}.$

Příklad

Vyřešte rovnice

(i) $2y = x^3 y'$,

(ii) $y' = 6x - 2y$.

Příklad

Vyřešte rovnice

(i) $2y = x^3 y'$,

(ii) $y' = 6x - 2y$.

Řešení:

(i) $y = c\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, \quad c \in \mathbb{R}$,

(ii) $y = 3x - \frac{3}{2} + c\,\mathrm{e}^{-2x}, \quad c \in \mathbb{R}$.

Příklad

Vyřešte počáteční problémy

(i) $2y = x^3 y', \quad y(1) = -2,$

(ii) $y' = 6x - 2y, \quad y(0) = -2.$

Příklad

Vyřešte počáteční problémy

(i) $2y = x^3 y', \quad y(1) = -2,$

(ii) $y' = 6x - 2y, \quad y(0) = -2.$

Řešení:

(i) $y = -2\,\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x^2}},$

(ii) $y = 3x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2\,\mathrm{e}^{2x}}.$

Obsah

- Určitý integrál. ⊛ ⊛

```
integrate (x^3-2)^2 cos(x) for x from 2 to 5
integrate sin(x)/(cos(x)+2) for x from -pi to 0
```

- Diferenciální rovnice. ⊛ ⊛

```
y'=5xy+3x
y'=5xy+3x,y(0)=1
```