Určitý integrál a diferenciální rovnice

Petr Hasil

Přednáška z matematiky

MENDELU
Agronomická
fakulta

Mendelova
univerzita
v Brně

MENDELU
Lesnická
a dřevařská
fakulta

Obsah

Definice (Dělení intervalu)

Uvažujme uzavřený interval $I = [a, b], -\infty < a < b < \infty$. *Dělením intervalu* I rozumíme konečnou posloupnost $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ bodů z intervalu I takových, že

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

čísla $x_0, x_1, \dots, x_n$ nazýváme *dělicí body*.

Normou $\nu(D)$ dělení D rozumíme maximální vzdálenost sousedních dělicích bodů, tedy

$$\nu(D) = \max\{x_i - x_{i-1}, i = 1, \dots, n\}.$$

Definice (Integrální součet)

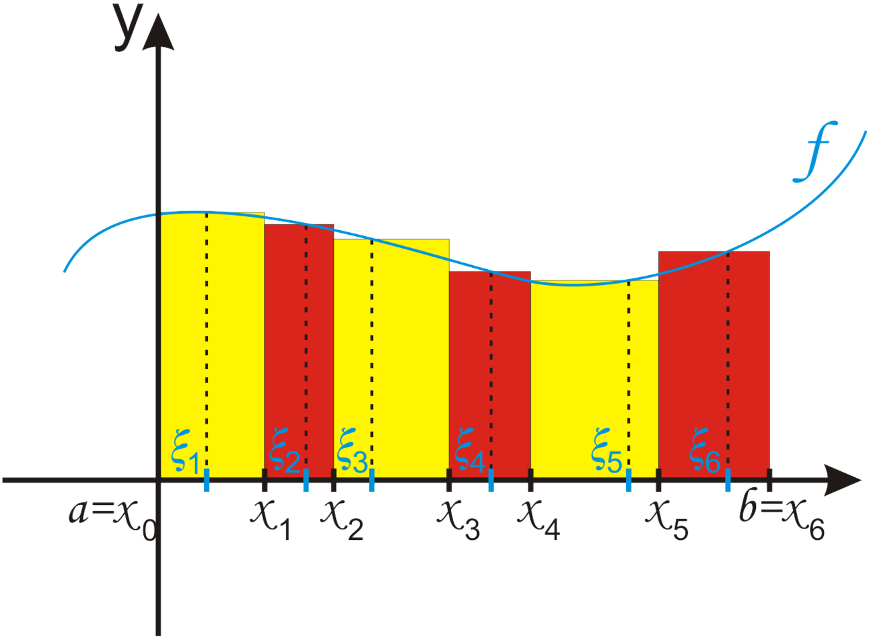
Nechť f je funkce definovaná a ohraničená na uzavřeném intervalu $I = [a, b]$ a nechť $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ je dělení intervalu I a $R = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ je posloupnost čísel z intervalu I takových, že

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Potom součet

$$\sigma(f, D, R) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

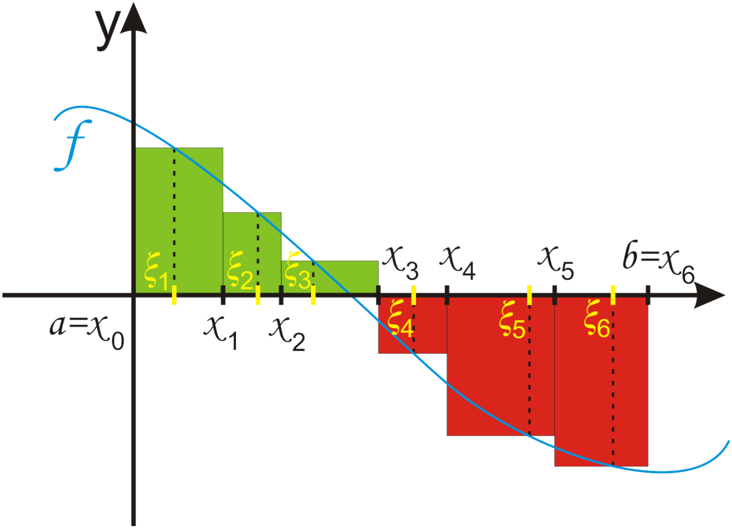
nazýváme *integrální součet* funkce f příslušný dělení D a výběru reprezentantů R.


y
f
ξ1
ξ2
ξ3
ξ4
ξ5
ξ6
a=x0
x1
x2
x3
x4
x5
b=x6

Jak je vidět na předchozím obrázku, geometricky je integrální součet kladné funkce roven součtu obsahů obdélníků , jejichž základny mají délku rovnu délce jednotlivých podintervalů v dělení D a jejichž výška je rovna funkční hodnotě v reprezentantu z příslušného podintervalu.

Je-li funkční hodnota v reprezentantu záporná, tedy obdélníček je pod osou x, potom je samozřejmě příspěvek tohoto obdélníčku (podintervalu) do integrálního součtu záporný.

Obecně je tedy integrální součet roven součtu obsahů obdélníků nad osou x zmenšený o obsah obdélníků pod ní.


y
f
$a=x_0$
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
$b=x_6$
ξ_1
ξ_2
ξ_3
ξ_4
ξ_5
ξ_6

Definice (Určitý (Riemannův) integrál)

Nechť f je funkce definovaná a ohraničená na uzavřeném intervalu $I = [a, b]$. Dále nechť D_n je posloupnost dělení intervalu I taková, že $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$ a R_n posloupnost reprezentantů z těchto dělení. Řekneme, že funkce f je Riemannovsky integrovatelná na I, jestliže existuje číslo $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, D_n, R_n) = \mathcal{R}.$$

Číslo $\mathcal{R}$ nazýváme *Riemannův (určitý) integrál* funkce f na intervalu I a značíme jej

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Číslo a nazýváme *dolní mez* a číslo b *horní mez* Riemannova integrálu.

Riemannův integrál tedy pro funkci f spojitou na intervalu $I = [a, b]$ získáme takto:

- Interval rozdělíme na podintervaly. Z každého podintervalu vybereme reprezentanta určíme integrální součet.
- Dělení zjemníme (vybereme nové dělení s menší normou) a postup opakujeme.
- Dělení zjemňujeme dokud se integrální součty neustálí. Hodnota, na které se ustálí je Riemannův integrál funkce f na intervalu I.

Věta (Aditivita vzhledem k mezím)

Nechť f je funkce integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a nechť $c \in (a, b)$. Potom je f integrovatelná na intervalech $[a, c]$ a $[c, b]$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta (Linearita vzhledem k funkci)

Nechť f a g jsou funkce integrovatelné na intervalu $[a, b]$ a nechť $c \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right] \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definice

Nechť $a < b$.

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Věta (Monotonie vzhledem k funkci)

Nechť f a g jsou funkce integrovatelné na intervalu $[a, b]$ takové, že pro $x \in (a, b)$ je $f(x) \leq g(x)$. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důsledek (Integrál z nezáporné funkce)

Uvažujeme-li v předchozí větě $f \equiv 0$ dostaneme, že integrál z funkce nezáporné na celém intervalu, přes nejž integrujeme, je nezáporný.

Poznámka

Obdobné tvrzení snadno obdržíme pro funkci nekladnou.

Věta (Postačující podmínky integrovatelnosti)

Funkce f je Riemannovsky integrovatelná na intervalu $I = [a, b]$, jestliže splňuje aspoň jednu z následujících podmínek.

- *Funkce f je na I spojitá.*
- *Funkce f je na I ohraničená a monotonní.*
- *Funkce f je na I ohraničená a má na I konečný počet bodů nespojitosti.*

Věta (Newton–Leibnizova formule)

Nechť je funkce f Riemannovsky integrovatelná na intervalu $I = [a, b]$. Dále nechť je funkce F na intervalu (a, b) primitivní funkce k funkci f a je spojitá na I. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

$$\int_{-2}^{5} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{5} = \frac{5^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{133}{3}.$$

Věta (Metoda per partes pro určitý integrál)

Nechť jsou funkce u, v a jejich derivace spojité na intervalu $[a, b]$. Pak platí

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_1^3 x\ln x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{matrix}\right| = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{9}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 1\right) - \frac{1}{2}\int_1^3 x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{9}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}\ln 3 - 2$$

Věta (Substituční metoda pro určitý integrál)

Nechť jsou funkce f, φ a φ' spojité na příslušných intervalech a nechť je funkce φ ryze monotonní. Pak platí

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_1^5 \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} t = 2x-1 & x = 5 \Rightarrow t = 9 \\ \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x & x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t & \end{array} \right|$$

$$= \int_1^9 \sqrt{t}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^9 t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^9$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_1^9 = \frac{1}{3}(27-1) = \frac{26}{3}$$

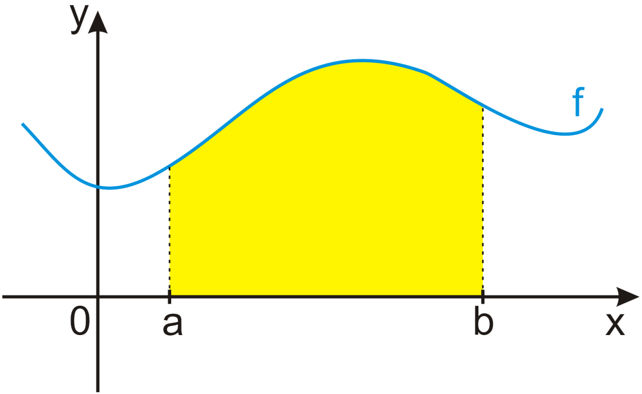
$$\int_0^1 x^2(5-2x^3)^4\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} t = 5-2x^3 & x=1 \Rightarrow t=3 \\ \mathrm{d}t = -6x^2\,\mathrm{d}x & x=0 \Rightarrow t=5 \\ x^2\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\,\mathrm{d}t & \end{array} \right|$$

$$= \int_5^3 t^4\left(-\frac{1}{6}\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{6}\int_5^3 t^4\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\int_3^5 t^4\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{t^5}{5}\right]_3^5 = \frac{1}{30}(5^5-3^5) = \frac{2882}{30} = \frac{1441}{15}$$

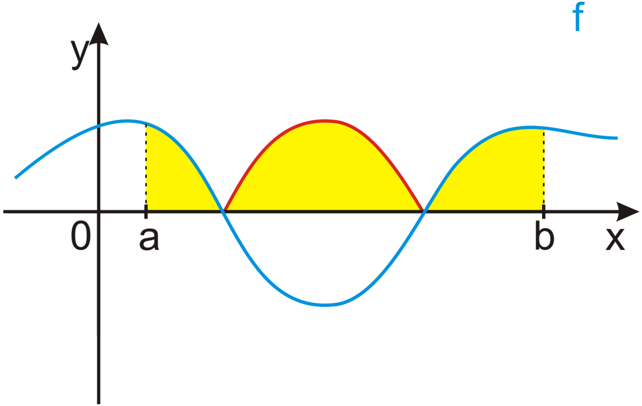
Plocha podgrafu kladné funkce na intervalu $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Plocha mezi grafem funkce f a osou x na intervalu $[a, b]$:

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

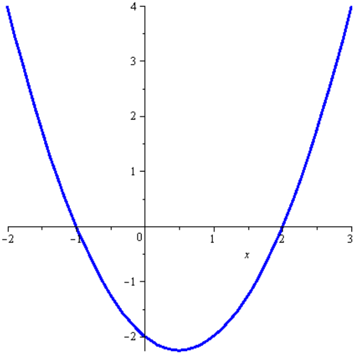


Příklad

Určete plochu ohraničenou grafem funkce $f(x) = x^2 - x - 2$ a osou x na intervalu $I = [-2, 3]$.

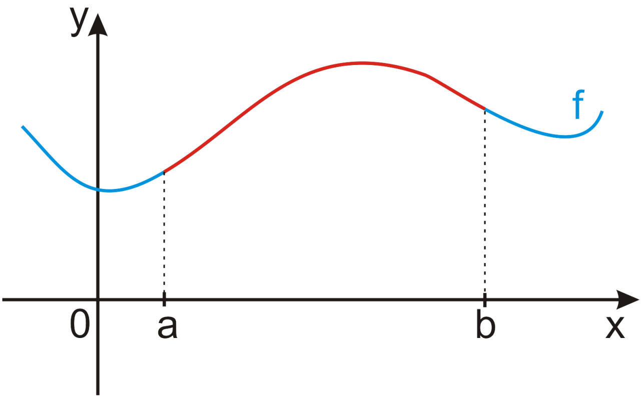
Protože $x^2 - x - 2 = 0$ má kořeny $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$, snadno zjistíme, že funkce f je na intervalu I kladná pro $x \in (-2, -1) \cup (2, 3)$ a záporná pro $x \in (-1, 2)$.

$$
\begin{aligned}
P &= \int_{-2}^{3} |f(x)| \, dx \\
&= \int_{-2}^{-1} f(x) \, dx + \int_{-1}^{2} (-f(x)) \, dx \\
&\quad + \int_{2}^{3} f(x) \, dx \\
&= \ldots = \frac{49}{6}
\end{aligned}
$$



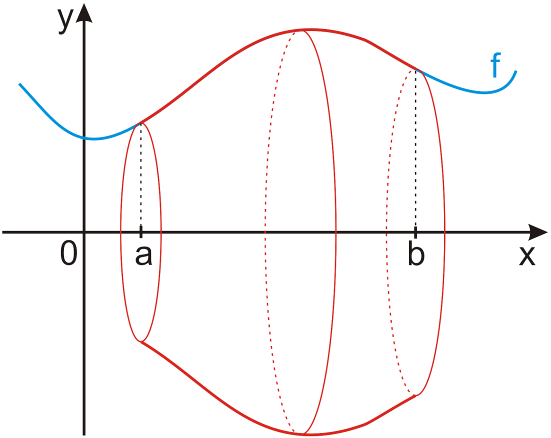
Délka křivky grafu funkce f na intervalu $[a, b]$.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$



Objem a povrch pláště rotačního tělesa
(rotace nezáporné funkce f kolem osy x na intervalu $[a, b]$).

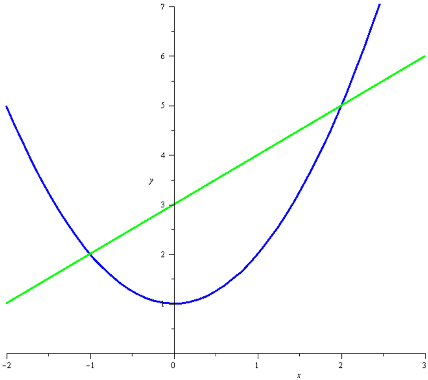
$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$



Příklad

Určete plochu ohraničenou grafy funkcí $f(x) = x^2 + 1$ a $g(x) = x + 3$.

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 + 1 = x + 3$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x_1 = -1, x_2 = 2$$

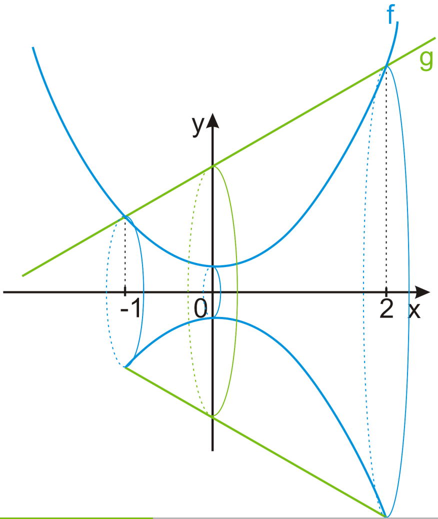


$$\int_{-1}^{2} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} (x+3) - (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} 2 + x - x^2\,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{9}{2}.$$

Příklad

Určete objem tělesa vzniklého rotací plochy omezené grafy funkcí $f(x) = x^2 + 1$ a $g(x) = x + 3$ kolem osy x.

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-1}^{2} g^2(x)\,\mathrm{d}x - \pi \int_{-1}^{2} f^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \int_{-1}^{2} (x+3)^2 - (x^2+1)^2\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \int_{-1}^{2} 8 + 6x - x^2 - x^4\,\mathrm{d}x \\
&= \ldots = \pi \frac{117}{5}.
\end{aligned}
$$



Definice

Diferenciální rovnice je rovnice, ve které se neznámá funkce vyskytuje spolu se svými derivacemi. *Řád diferenciální rovnice* je nejvyšší derivace neznámé funkce, která se v rovnici vyskytne.

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Budeme se zabývat rovnicemi prvního řadu.

Rovnice prvního řádu

- Obecný tvar je $F(x, y, y') = 0$, kde F je funkce tří proměnných.
- Rovnice rozřešené vzhledem k derivaci je $y' = f(x, y)$, kde f je funkce dvou proměnných.

Definice

Řešení diferenciální rovnice je funkce $y = y(x)$ (popř. $y = y(t)$, $y = y(x, t)$,...), která splňuje danou diferenciální rovnici.

Řešení diferenciálních rovnic získáme obvykle pomocí integrování, proto budou obsahovat integrační konstanty (tolik integračních konstant, kolikrát budeme integrovat). Tedy tzv. *obecné řešení* (tj. všechna řešení) dostaneme jako množinu danou těmito konstantami.

Řešení dané počáteční podmínkou, např. $y(x_0) = y_0$ (předem zadaná hodnota v daném bodě), se nazývá *partikulární*.

Poznámka

- Řešení diferenciálních rovnic jsou spojité funkce (existují jejich derivace).
- Rovnice $y' = f(x)$ nemá jediné řešení (primitivní funkce tvoří množinu). Pokud uvažujeme podmínku, že $F(x)$ má procházet určitým bodem, pak má rovnice jedno řešení. Podmínka $y(x_0) = y_0$ se nazývá *počáteční podmínka* a rovnice s touto podmínkou *počáteční problém* (Cauchyho úloha).
- Výpočet primitivní funkce $y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ odpovídá řešení rovnice $y' = f(x)$.
- $y' = y$ má řešení $y = c \cdot \mathrm{e}^x$.
- $y'' + y = 0$ při popisu malých kmitů matematického kyvadla. Řešení jsou $y = \sin x$, $y = \cos x$ a každá lineární kombinace těchto dvou funkcí, tedy řešení tvoří lineární prostor.

Klasifikace

- Podle počtu nezávisle proměnných na obyčejné (ODR) a parciální (PDR) diferenciální rovnice.
- Podle linearity na lineární a nelineární diferenciální rovnice.
- Podle řádu (rovnice n-tého řádu).

Příklad

- $ms'' = F$, kde $s = s(t)$ je poloha bodu na přímce, dráha (Newtonův zákon)
- $\alpha^2 u_{xx} = u_t$, kde $u = u(x,t)$ je teplota v čase t v bodě x na přímce (vedení tepla v tyči)
- $\alpha^2 u_{xx} = u_{tt}$, kde $u = u(x,t)$ je pozice vzhledem ke klidové poloze, vychýlení v čase t v bodě x na přímce (vlnová rovnice)
- $\theta'' + \alpha \sin\theta = 0$, kde $\theta = \theta(t)$ je úhel (matematické kyvadlo)
- $Q' = -kQ$, kde $Q = Q(t)$ je množství radioaktivní látky (radioaktivní rozpad)

Speciální případy

- $f(x,y) = f(x)$, tj. $y' = f(x)$
  Odpovídá hledání primitivní funkce k $f(x)$, tedy $y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$.
  Problém
  $$y' = f(x), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$
  má řešení
  $$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}t.$$
- $f(x,y) = g(y)$, tj. $y' = g(y)$
  Lze převést na předchozí řípad využitím inverzní funkce.
  $$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{g(y)}, \quad g(y) \neq 0,$$
  tedy máme problém (1) pro funkci $x(y)$ s řešením
  $x = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t$, což implicitně udává funkci $y = y(x)$.

Příklad

Vyřešte rovnice

1. $y' = 3x^2 + \sin x$,
2. $y' = \frac{7}{e^y + 4y - 3}$.

1. $y = \int 3x^2 + \sin x \, dx = x^3 - \cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$
2.

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{e^y + 4y - 3}{7} \\
x &= \frac{1}{7} \int e^y + 4y - 3 \, dy = \frac{1}{7}(e^y + 2y^2 - 3y) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}, \\
7x &= e^y + 2y^2 - 3y + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Rovnicí se separovatelnými proměnnými budeme nazývat rovnici $y' = f(x)g(y)$.

Způsob řešení

$$
\begin{aligned}
y' &= f(x) \cdot g(y) \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x) \cdot g(y) \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{g(y)} \\
\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} &= f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \Big/ \text{integrace} \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} + c_1 &= \int f(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \\
G(y) &= F(x) + c \quad (c = c_2 - c_1)
\end{aligned}
$$

Explicitní řešení pak lze často zapsat ve tvaru $y(x) = G^{-1}\big[F(x) + c\big]$.

Příklad

Vyřešme $y' = \frac{y^2-y}{x}$, tedy $f(x) = \frac{1}{x}, g(y) = y^2 - y$.

Máme

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{y^2-y}{x} \\ \frac{\mathrm{d}y}{y^2-y} &= \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pro} \quad y^2 - y \neq 0 \Rightarrow y \neq 0 \wedge y \neq 1. \end{aligned}$$

Vypočítáme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(y-1)} = \int \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \ln|y-1| - \ln|y| + c_1,$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c_2.$$

Tedy

$$
\begin{aligned}
\ln|y-1| - \ln|y| + c_1 &= \ln|x| + c_2 \\
\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| &= \ln|x| + c_3, \quad c_3 \in \mathbb{R} \\
\left|\frac{y-1}{y}\right| &= |x| \cdot \mathrm{e}^{c_3} \\
\frac{y-1}{y} &= \pm\,\mathrm{e}^{c_3} \cdot x = c \cdot x, \quad c \neq 0 \\
y &= \frac{1}{1-cx}, \quad c \neq 0.
\end{aligned}
$$

Během výpočtu jsme udělali předpoklad, že $y \neq 0 \wedge y \neq 1$. Zkontrolujeme, zda nejde také o řešení rovnice:

- $y = 1$ je řešením a dostaneme jej pro $c = 0$,
- $y = 0$ je řešením, ale nijak jej nedostaneme,

tedy

$$\underbrace{y = \frac{1}{1 - cx},}_{\text{obecné řešení}} \quad \underbrace{y = 0,}_{\text{singulární řešení}} \quad c \in \mathbb{R}$$

(Obecné řešení obsahuje tolik konstant, jako byl řád rovnice.) ■

Příklad

$$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}, \qquad y(0) = 1$$

Počáteční problém – vypočítáme obecné řešení a pak použitím počáteční podmínky určíme (vybereme) řešení, tedy

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1+y^2}{1+x^2} \\ \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} &= \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ \operatorname{arctg} y &= \operatorname{arctg} x + c. \end{aligned}$$

Podmínka $y(0) = 1$ dává $\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} 0 + c \Rightarrow c = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Odtud dostáváme řešení

$$y = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}\right)$$

a užitím vzorce $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$ ho lze upravit na

$$y = \frac{x+1}{1-x}.$$

$\blacksquare$

Lineární diferenciální rovnice je rovnice tvaru (linearita vzhledem k y)

$$y' = a(x)y + b(x). \tag{LDR}$$

Definice

Je-li $b(x) \equiv 0$, mluvíme o *homogenní lineární rovnici*

$$u' = a(x)u, \tag{hLDR}$$

v opačném případě o *nehomogenní lineární rovnici*.

Poznámka

Obecné řešení rovnice (LDR) (tj. řešení závisející na jedné integrační konstantě) je tvaru $y = y_p + u$, kde y_p je nějaké řešení rovnice (LDR), tzv. *partikulární řešení*, a u je *obecné řešení* rovnice (hLDR).

Obecná metoda řešení je tzv. variace konstant, kdy se nejprve vyřeší homogenní rovnice metodou separace proměnných. Poté se v jejím řešení aditivní konstanta nahradí za neznámou funkci, kterou lze najít dosazením do původní rovnice a integrováním. Tento postup v jistém zobecnění funguje i pro některé rovnice vyšších řádů.
Nás zajímají pouze rovnice prvního řádu, proto použijeme metodu *integračního faktoru*.

Integrační faktor

Pro rovnici

$$y' = a(x)y + b(x)$$

je integrační faktor

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{-\int a(x)\, \mathrm{d}x}.$$

Touto funkcí celou rovnici vynásobíme a následně upravujeme.

Postup

$$y' - a(x)\,y = b(x)$$

$$\big[y' - a(x)\,y\big] \cdot \mu(x) = b(x) \cdot \mu(x)$$

$$\underbrace{y' \cdot e^{-\int a(x)\ dx} - y\,a(x) \cdot e^{-\int a(x)\ dx}}_{\left(y \cdot e^{-\int a(x)\ dx}\right)'} = b(x) \cdot e^{-\int a(x)\ dx}$$

$$\left(y \cdot e^{-\int a(x)\ dx}\right)' = b(x) \cdot e^{-\int a(x)\ dx}$$

$$y \cdot e^{-\int a(x)\ dx} = \int b(x) \cdot e^{-\int a(x)\ dx}\ dx + c$$

$$y = e^{\int a(x)\ dx}\left[\int b(x) \cdot e^{-\int a(x)\ dx}\ dx + c\right], \quad c \in \mathbb{R}$$

Příklad

Vyřešte rovnici
$$y' = 4xy + (2x+1)\,\mathrm{e}^{2x^2}.$$

Integrační faktor je $\mu(x) = \mathrm{e}^{-\int 4x \,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-2x^2}$. Vynásobíme jím rovnici se ziskem (vše obsahující y je převedeno doleva)

$$y'\,\mathrm{e}^{-2x^2} - 4xy\,\mathrm{e}^{-2x^2} = 2x+1,$$

odtud

$$\left(y\,\mathrm{e}^{-2x^2}\right)' = 2x+1.$$

Obě strany zintegrujeme

$$y\,\mathrm{e}^{-2x^2} = \int 2x+1 \;\mathrm{d}x = x^2 + x + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Řešením je tedy

$$y = (x^2 + x + c)\,\mathrm{e}^{2x^2}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Příklad (Růst, učení,...)

Jistý druh roste tak, že má jistou maximální délku a rychlost růstu je přímo úměrná délce, kterou ještě mají dorůst. Sestavte rovnici modelující tuto situaci.

Označíme-li délku v čase t jako funkci $\ell(x)$ a maximální délku L, pak příslušná rovnice je

$$\ell'(t) = k[L - \ell(t)],$$

kde konstantu úměrnosti k by bylo nutné určit experimentálně (měření a výpočet pro konkrétní druh/situaci).

Příklad (Výměna tepla mezi tělesem a okolím)

Je nalezena mrtvola, jejíž teplota je změřena na 26.6 °C. O 3 hodiny později je její teplota 21.1 °C, přičemž teplota okolí je 18.3 °C. Určete čas úmrtí za předpokladu, že teplota lidkého těla je 37 °C.

Povrchová teplota tělesa se mění rychlostí, která je přímo úměrná rozdílu teploty tělesa a okolního prostředí (Newtonův teplotní zákon).

Označme teplotu tělesa v čase t jako $\Theta(t)$ [°C] a teplotu okolního prostředí jako T [°C]. Potom musí platit rovnice

$$\Theta'(t) = -k\,[\Theta(t) - T], \qquad \text{kde } k > 0 \text{ je konstanta úměrnosti.}$$

Všimněte si, že pokud bude teplota okolního prostředí *vyšší*, než je teplota tělesa (tj. pokud je $\Theta(t) < T$), potom je $\Theta' > 0$ a těleso se bude zahřívat. Zatímco pokud bude teplota okolního prostředí *nižší*, než je teplota tělesa (tj. pokud $\Theta(t) > T$), potom je $\Theta' < 0$ a těleso se bude ochlazovat.

Při použití výše uvedeného značení (pro čas t v jednotkách [hodin]) máme

$$T = 18.3,\ \Theta(0) = 26.6 \text{ (teplota v čase nalezení mrtvoly)},\ \Theta(3) = 21.1,$$

přičemž funkce $\Theta(t)$ splňuje rovnici

$$\Theta' = -k\,(\Theta - T) \quad \Rightarrow \quad \Theta' = -k\,\Theta + k\,T.$$

Poslední rovnice je lineární diferenciální rovnice pro neznámou funkci $\Theta(t)$. Tuto rovnici vyřešíme např. metodou integračního faktoru $\mu(t) = \mathrm{e}^{kt}$, potom

$$\Theta = T + c\ \mathrm{e}^{-kt} = 18.3 + c\ \mathrm{e}^{-kt}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Konstanty c a k určíme z informací o počáteční teplotě a o teplotě v čase $t = 3$ [hodiny], tj.

$$26.6 = \Theta(0) = 18.3 + c\ \mathrm{e}^{0} = 18.3 + C \ \Rightarrow\ c = 8.3 \ \Rightarrow\ \Theta = 18.3 + 8.3\ \mathrm{e}^{-kt},$$

a dále

$$21.1 = \Theta(3) = 18.3 + 8.3\ \mathrm{e}^{-3k} \ \Rightarrow\ \mathrm{e}^{-3k} = \frac{21.1 - 18.3}{8.3} \approx 0.337$$

$$\Rightarrow\ -3k = \ln 0.337 \ \Rightarrow\ k = -\frac{\ln 0.337}{3} \approx 0.362.$$

Tedy hledané řešení je funkce

$$\Theta(t) = 18.3 + 8.3\ \mathrm{e}^{-0.362t}\,.$$

Najdeme čas úmrtí, tj. určíme čas t, pro který je $\Theta(t) = 37\ ^\circ\mathrm{C}$. Tedy

$$18.3 + 8.3\ \mathrm{e}^{-0.362t} = 37 \ \Rightarrow\ \mathrm{e}^{-0.362t} = \frac{37 - 18.3}{8.3} \approx 2.253$$

$$\Rightarrow\ -0.362t = \ln 2.253 \ \Rightarrow\ t = -\frac{\ln 2.253}{0.362} \approx -2.24.$$

Mrtvola byla nalezena přibližně 2 hodiny a 15 minut po smrti. ■

Příklad (Míchání dvou látek)

Vodní nádrž o celkovém objemu $L = 1000$ [litrů] obsahuje $Q_0 = 0$ [gramů] soli v počátečním čase $t_0 = 0$ [minut]. Do nádrže přitéká roztok o koncentraci soli $c = 50$ [gramů/litr] rychlostí $v = 20$ [litrů/min] a po řádném promíchání s vodou v nádrži z ní vytéká stejnou rychlostí. Určete množství soli $Q(t)$ v nádrži v libovolném čase t a limitní množství pro $t \to \infty$.

Označili jsme jako $Q(t)$ [g] množství soli v nádrži v libovolném čase t [min]. Potom $Q'(t)$ udává, jak rychle se toto množství mění a přitom musí platit, že

$$Q'(t) = \left(\begin{array}{c} \text{rychlost, s jakou sůl} \\ \text{do nádrže přitéká} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{rychlost, s jakou sůl} \\ \text{z nádrže vytéká} \end{array} \right).$$

Sůl do nádrže *přitéká* rychlostí

$$c \cdot v = 50 \;\; [\mathrm{g/l}] \;\cdot\; 20 \;\; [\mathrm{l/min}] \;\; = 1000 \;\; [\mathrm{g/min}].$$

A protože v nádrži je vždy koncentrace soli rovna $\frac{Q(t)}{L} = \frac{Q(t)}{1000}$ [g/l], sůl z nádrže *vytéká* rychlostí

$$\frac{Q(t)}{L} \cdot v = \frac{Q(t)}{1000} \;\; [\mathrm{g/l}] \;\cdot\; 20 \;\; [\mathrm{l/min}] \;\; = \frac{Q(t)}{50} \;\; [\mathrm{g/min}].$$

Tedy hledaná funkce $Q(t)$ splňuje rovnici

$$Q'(t) = c \cdot v - \frac{Q(t)}{L} \cdot v \qquad \Rightarrow \qquad Q' = 1000 - \frac{Q}{50},$$

což je lineární diferenciální rovnice 1. řádu, a dále splňuje počáteční podmínku

$$Q(t_0) = Q_0 \qquad \Rightarrow \qquad Q(0) = 0. \tag{2}$$

Uvedenou rovnici vyřešíme metodou integračního faktoru

$$\mu(t) = \mathrm{e}^{\int \frac{v}{L}\,dt} = \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t} \qquad \Rightarrow \qquad \mu(t) = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{50}\,dt} = \mathrm{e}^{0.02\,t}$$

a potom máme (obecně)

$$\begin{aligned}
Q' + \frac{v}{L}\,Q &= c\,v \\
Q'\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t} + \frac{v}{L}\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t}\ Q &= c\,v\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t} \\
\left(Q\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t}\right)' &= c\,v\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t} \\
Q\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t} &= \int c\,v\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t}\ dt = c\,v\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t}}{\frac{v}{L}} + C \\
Q &= c\,L + C\ \mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\,t}, \quad C \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

a pro náš konkrétní příklad

$$
\begin{aligned}
Q' + 0.02\, Q &= 1000,\\
Q'\ \mathrm{e}^{0.02\,t} + 0.02\ \mathrm{e}^{0.02\,t}\ Q &= 1000\ \mathrm{e}^{0.02\,t},\\
\left(Q\ \mathrm{e}^{0.02\,t}\right)' &= 1000\ \mathrm{e}^{0.02\,t},\\
Q\ \mathrm{e}^{0.02\,t} = \int 1000\ \mathrm{e}^{0.02\,t}\ dt &= 1000\,\frac{\mathrm{e}^{0.02\,t}}{0.02} + C,\\
Q &= 50000 + C\ \mathrm{e}^{-0.02\,t}, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

A protože je počáteční množství známo v (2), pro integrační konstantu C platí

$$
\begin{aligned}
Q_0 = Q(t_0) = c\,L + C\,\mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\,t_0} \quad &\Rightarrow \quad 0 = Q(0) = 50000 + C\,\mathrm{e}^0,\\
C = (Q_0 - c\,L)\,\mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t_0} \quad &\Rightarrow \quad C = -50000,
\end{aligned}
$$

a tedy výsledné partikulární řešení (udávající kolik gramů soli bude v nádrži v okamžiku t minut) je tvaru

$$
\begin{aligned}
Q = c\,L + (Q_0 - c\,L)\,\mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t_0}\,\mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\,t} \quad &\Rightarrow \quad Q = 50000 - 50000\,\mathrm{e}^{-0.02\,t},\\
Q = c\,L + (Q_0 - c\,L)\,\mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\,(t-t_0)} \quad &\Rightarrow \quad Q = 50000\left(1 - \mathrm{e}^{-0.02\,t}\right).
\end{aligned}
$$

Tedy v závislosti na tom, jestli je $Q_0 > c\,L$ nebo $Q_0 < c\,L$, množství soli v nádrži (záporně exponenciálně) klesá nebo roste, a při $Q_0 = c\,L$ zůstává stále stejné.

Pro $t \to \infty$ je potom

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to\infty} \left\{ c\,L + (Q_0 - c\,L)\,\underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\,(t-t_0)}}_{\to 0} \right\}$$

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = c\,L \quad [\mathrm{g}]\;,$$

tedy

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to\infty} 50000\,\bigl(1 - \underbrace{\mathrm{e}^{-0.02\,t}}_{\to 0}\bigr)$$

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = 50000 \quad [\mathrm{g}]\;.$$

Po dostatečně dlouhé době bude tedy koncentrace soli v nádrži rovna

$$Q_\infty = \frac{c\,L}{L} = c \quad [\mathrm{g/l}], \text{neboli} Q_\infty = \frac{50000}{1000} = 50 \quad [\mathrm{g/l}],$$

což je přesně koncentrace přitékajícího roztoku (samozřejmě, po „nekonečně dlouhé době“ přitékající roztok „nahradí“ původní roztok v nádrži, přičemž vůbec nezáleží na původním množství Q_0, tj. na tom, kolik soli bylo v nádrži na počátku). ■

Příklad (Míchání dvou látek II)

Jak se změní model v Příkladu 11, pokud bude roztok po řádném promíchání s vodou v nádrži vytékat rychlostí pouze $w = 19$ [litrů/min]? Předpokládáme-li, že nádrž má celkový objem 1600 litrů, jaká bude koncentrace roztoku v nádrži v okamžiku jejího naplnění?

Všimněte si, že se nyní *objem* roztoku *v nádrži mění* (roste) a to rychlostí $v - w = 1$ [litr/min]. To znamená, že nyní sůl z nádrže *vytéká* rychlostí

$$\frac{Q(t)}{L + (v-w)\,(t - t_0)} \cdot w = \frac{Q(t)}{1000 + t}\ \ [\mathrm{g/l}] \cdot 19\ \ [\mathrm{l/min}] \ = \frac{19\,Q(t)}{1000 + t}\ \ [\mathrm{g/min}].$$

Výsledná diferenciální rovnice má tedy tvar

$$Q'(t) = c \cdot v - \frac{Q(t)}{L + (v-w)\,(t - t_0)} \cdot w \qquad \Rightarrow \qquad Q' = 1000 - \frac{19\,Q(t)}{1000 + t},$$

což je opět lineární diferenciální rovnice 1. řádu, přičemž řešení $Q(t)$ splňuje počáteční podmínku (2).

Příslušný integrační faktor je

$$\mu(t) = \mathrm{e}^{\int \frac{19}{1000+t}\,dt} = \mathrm{e}^{19\,\ln(1000+t)} = \mathrm{e}^{\ln(1000+t)^{19}} = (1000+t)^{19}.$$

Tedy platí

$$\begin{aligned}
Q' + \frac{19\,Q(t)}{1000+t} &= 1000\\
Q'\,(1000+t)^{19} + 19\,Q(t)\,(1000+t)^{18} &= 1000\,(1000+t)^{19}\\
\left[Q\,(1000+t)^{19}\right]' &= 1000\,(1000+t)^{19}\\
Q\,(1000+t)^{19} &= 1000\,\frac{(1000+t)^{20}}{20} + C\\
Q = \frac{50\,(1000+t)^{20} + C}{(1000+t)^{19}} &= 50\,(1000+t) + \frac{C}{(1000+t)^{19}}.
\end{aligned}$$

Z počáteční podmínky (2) pak určíme hodnotu C, tj.

$$0 = Q(0) = 50\cdot 1000 + \frac{C}{1000^{19}} \;\Rightarrow\; C = -50000\cdot 1000^{19} = -5\cdot 10^{61}.$$

Tedy výsledné partikulární řešení je tvaru

$$Q = 50\,(1000 + t) - \frac{5 \cdot 10^{61}}{(1000 + t)^{19}}.$$

Protože v nádrži bylo původně 1000 litrů vody a nádrž se nyní naplňuje rychlostí 1 litr/min, bude nádrž naplněna za 600 minut (tj. za 10 hodin). Tedy v okamžiku $t = 600$ bude v nádrži

$$Q(600) = 50\,(1600) - \frac{5 \cdot 10^{61}}{(1600)^{19}} \approx 79993.4 \quad [\mathrm{g}] \text{ soli},$$

tj. koncentrace soli bude

$$\frac{Q(600)}{1600} \approx \frac{79993.4}{1600} \approx 49.996 \quad [\mathrm{g}/\mathrm{l}],$$

tedy tato koncentrace bude téměř stejná jako u přitékajícího roztoku. ∎

Příklad

Vyřešte rovnice

(i) $y' = 3\cos x + \sin 2x$,

(ii) $y' = \frac{1}{y}$.

Řešení:

(i) $y = 3\sin x - \frac{\cos 2x}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$,

(ii) $x = \frac{y^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

Příklad

Vyřešte počáteční problémy

(i) $y' = 3\cos x + \sin 2x, \quad y(0) = 5,$

(ii) $y' = \frac{1}{y}, \quad y(2) = 4,$

(iii) $y' = \frac{1}{y}, \quad y(2) = -4.$

Řešení:

(i) $y = 3\sin x - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{11}{2},$

(ii) $x = \frac{y^2}{2} - 6 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{2x + 12},$

(ii) $x = \frac{y^2}{2} - 6 \quad \Rightarrow \quad y = -\sqrt{2x + 12}.$

Příklad

Vyřešte rovnice

(i) $2y = x^3 y'$,

(ii) $y' = 6x - 2y$.

Řešení:

(i) $y = c\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, \quad c \in \mathbb{R}$,

(ii) $y = 3x - \frac{3}{2} + c\,\mathrm{e}^{-2x}, \quad c \in \mathbb{R}$.

Příklad

Vyřešte počáteční problémy

(i) $2y = x^3 y', \quad y(1) = -2,$

(ii) $y' = 6x - 2y, \quad y(0) = -2.$

Řešení:

(i) $y = -2\,\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x^2}},$

(ii) $y = 3x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2\,\mathrm{e}^{2x}}.$

- Určitý integrál. ⊛ ⊛

```
integrate (x^3-2)^2 cos(x) for x from 2 to 5
integrate sin(x)/(cos(x)+2) for x from -pi to 0
```

- Diferenciální rovnice. ⊛ ⊛

```
y'=5xy+3x
y'=5xy+3x,y(0)=1
```