Neurčitý integrál

Petr Hasil

Přednáška z matematiky

MENDELU
Agronomická
fakulta

Mendelova
univerzita
v Brně

MENDELU
Lesnická
a dřevařská
fakulta

Obsah

Obsah

Definice (Neurčitý integrál)

Nechť jsou F a f funkce definované na otevřeném intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Jestliže platí

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in I,$$

pak funkci F nazýváme *primitivní funkce* k funkci f, nebo *neurčitý integrál* funkce f na intervalu I. Píšeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x).$$

Existuje-li k funkce f primitivní funkce na intervalu I, pak říkáme, že funkce f je na I *integrovatelná*.

Z definice je vidět, že integrál je jakási antiderivace, tj. integrováním získáme ze známé derivace zpět původní funkci. Proto je také většina vzorců pro integrování elementárních funkcí shodná se vzorci pro derivace, jen čteno zprava doleva (a upraveno).

Věta

Je-li funkce f spojitá v intervalu I, pak je zde integrovatelná.

Věta

Je-li funkce f spojitá v intervalu I, pak je zde integrovatelná.

Poznámka

Primitivní funkce (tedy výsledek po integraci) je vždy spojitá, neboť k ní existuje derivace (je diferencovatelná).

Věta

Je-li funkce f spojitá v intervalu I, pak je zde integrovatelná.

Poznámka

Primitivní funkce (tedy výsledek po integraci) je vždy spojitá, neboť k ní existuje derivace (je diferencovatelná).

Věta (Jednoznačnost)

Primitivní funkce je určena jednoznačně až na aditivní konstantu.

Např. protože platí $\left(x^2\right)' = 2x$, je funkce x^2 primitvní funkcí k funkci $2x$.

Např. protože platí $\left(x^2\right)' = 2x$, je funkce x^2 primitvní funkcí k funkci $2x$.

Podobně ale také $\left(x^2+4\right)' = \left(x^2-8\right)' = 2x$.

Např. protože platí $\left(x^2\right)' = 2x$, je funkce x^2 primitvní funkcí k funkci $2x$.

Podobně ale také $\left(x^2 + 4\right)' = \left(x^2 - 8\right)' = 2x$.

Tedy $x^2 + c$ je primitvní funkce k funkci $2x$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$.

Např. protože platí $\left(x^2\right)' = 2x$, je funkce x^2 primitvní funkcí k funkci $2x$.

Podobně ale také $\left(x^2 + 4\right)' = \left(x^2 - 8\right)' = 2x$.

Tedy $x^2 + c$ je primitvní funkce k funkci $2x$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$.

Konstantu c nazýváme *aditivní (integrační) konstanta*.

Např. protože platí $\left(x^2\right)' = 2x$, je funkce x^2 primitivní funkcí k funkci $2x$.

Podobně ale také $\left(x^2 + 4\right)' = \left(x^2 - 8\right)' = 2x$.

Tedy $x^2 + c$ je primitivní funkce k funkci $2x$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$.

Konstantu c nazýváme *aditivní (integrační) konstanta*.

Z toho je zřejmé, že primitivní funkce není jediná funkce, ale celá množina funkcí lišících se o konstantu.

Vzorce

Nechť $A, B, a, c, k, n \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $n \neq -1$.

1. $\int k \, dx = kx + c,$
2. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$
3. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c,$
4. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,$
5. $\int \mathrm{e}^x \, dx = \mathrm{e}^x + c,$
6. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c,$
7. $\int \cos x \, dx = \sin x + c,$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c,$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + c,$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{A} + c,$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}} \, dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm B}| + c,$
12. $\int \frac{1}{A^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{x}{A} + c,$
13. $\int \frac{1}{A^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{A+x}{A-x} \right| + c.$

Věta (Linearita)

Nechť f a g jsou funkce integrovatelné na intervalu I a a, b jsou reálná čísla. Pak na I platí

$$\int af(x) + bg(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta (Linearita)

Nechť f a g jsou funkce integrovatelné na intervalu I a a, b jsou reálná čísla. Pak na I platí

$$\int af(x) + bg(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka

Při derivování šlo jen o správné použití vzorců a jejich znalost. Integrace je často mnohem obtížnější. Především proto, že neexistují vzorce pro integrál součinu, podílu a složené funkce.

Příklad

$$\int \left(3x^3 - \sin x + \sqrt[5]{x}\right) \mathrm{d}x = 3\int x^3 \,\mathrm{d}x - \int \sin x \,\mathrm{d}x + \int x^{1/5} \,\mathrm{d}x$$

$$= 3\frac{x^4}{4} + c_1 + \cos x + c_2 + \frac{x^{6/5}}{6/5} + c_3$$

$$= \frac{3}{4}x^4 + \cos x + \frac{5}{6}\sqrt[5]{x^6} + c.$$

Obsah

Metoda per partes částečně nahrazuje chybějící pravidlo pro integraci součinu.

Věta

Nechť jsou funkce u a v diferencovatelné na intervalu I. Pak na I platí

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x,$$

jestliže integrály na pravé straně rovnosti existují.

Poznámka

Jako funkci u, tedy tu, kterou při použití věty derivujeme, volíme zpravidla funkci, která se při derivování "více zlepší".

Poznámka

Jako funkci u, tedy tu, kterou při použití věty derivujeme, volíme zpravidla funkci, která se při derivování "více zlepší".

$$\int P(x) f(x) \, \mathrm{d}x,$$

kde $P(x)$ je polynom, řešíme pomocí metody per partes takto:

Poznámka

Jako funkci u, tedy tu, kterou při použití věty derivujeme, volíme zpravidla funkci, která se při derivování "více zlepší".

$$\int P(x)f(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $P(x)$ je polynom, řešíme pomocí metody per partes takto:

Je-li $f(x)$ jedna z funkcí $\mathrm{e}^{kx}, \sin(kx), \cos(kx)$, pak volíme $u = P(x)$.

Poznámka

Jako funkci u, tedy tu, kterou při použití věty derivujeme, volíme zpravidla funkci, která se při derivování "více zlepší".

$$\int P(x)f(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $P(x)$ je polynom, řešíme pomocí metody per partes takto:

Je-li $f(x)$ jedna z funkcí $\mathrm{e}^{kx}, \sin(kx), \cos(kx)$, pak volíme $u = P(x)$.

Je-li $f(x)$ jedna z funkcí $\ln x, \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arccotg} x$, pak volíme $u = f(x)$.

Poznámka

Jako funkci u, tedy tu, kterou při použití věty derivujeme, volíme zpravidla funkci, která se při derivování “více zlepší”.

$$\int P(x)f(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $P(x)$ je polynom, řešíme pomocí metody per partes takto:

Je-li $f(x)$ jedna z funkcí $\mathrm{e}^{kx}, \sin(kx), \cos(kx)$, pak volíme $u = P(x)$.

Je-li $f(x)$ jedna z funkcí $\ln x, \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arccotg} x$, pak volíme $u = f(x)$.

Metodu per partes lze použít opakovaně.

Příklad

$$\int x \sin x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right|$$

$$= x \cdot (-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x)\,\mathrm{d}x = -x \cos x + \int \cos x \,\mathrm{d}x$$

$$= -x \cos x + \sin x + c.$$

Příklad

$$\int x \sin x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{matrix} \right|$$
$$= x \cdot (-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x)\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x \,\mathrm{d}x$$
$$= -x\cos x + \sin x + c.$$

Poznámka

Zkoušku provedeme zderivováním výsledku.

Příklad

$$
\begin{aligned}
\int 3x^2 \ln^2 x \,\mathrm{d}x &= \left| \begin{matrix} u = \ln^2 x & u' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \\ v' = 3x^2 & v = x^3 \end{matrix} \right| \\
&= x^3 \ln^2 x - \int 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x^3 \,\mathrm{d}x \\
&= x^3 \cdot \ln^2 x - 2 \int x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^2 & v = \frac{x^3}{3} \end{matrix} \right| \\
&= x^3 \cdot \ln^2 x - 2 \left[\ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \right] \\
&= x^3 \cdot \ln^2 x - 2\frac{x^3}{3} \ln x + \frac{2}{3} \int x^2 \,\mathrm{d}x \\
&= x^3 \cdot \ln^2 x - \frac{2}{3} x^3 \ln x + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + c \\
&= x^3 \cdot \ln^2 x - \frac{2}{3} x^3 \ln x + \frac{2}{9} x^3 + c.
\end{aligned}
$$

Obsah

Substituční metoda se používá pro výpočet některých integrálů ze složených funkcí a také pro výpočet některých integrálů ze součinu či podílu funkcí.

Substituční metoda se používá pro výpočet některých integrálů ze složených funkcí a také pro výpočet některých integrálů ze součinu či podílu funkcí.

Věta (Substituční metoda I)

Nechť $f(t)$ je funkce spojitá na intervalu I, nechť má funkce $\varphi(x)$ derivaci na intervalu J a nechť platí $\varphi(J) = I$. Potom na J platí

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t,$$

dosadíme-li do výrazu na pravé straně $t = \varphi(x)$.

Substituční metoda se používá pro výpočet některých integrálů ze složených funkcí a také pro výpočet některých integrálů ze součinu či podílu funkcí.

Věta (Substituční metoda I)

Nechť $f(t)$ je funkce spojitá na intervalu I, nechť má funkce $\varphi(x)$ derivaci na intervalu J a nechť platí $\varphi(J) = I$. Potom na J platí

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t,$$

dosadíme-li do výrazu na pravé straně $t = \varphi(x)$.

Poznámka

Za novou proměnnou t volíme vnitřní složku složené funkce $f(\varphi(x))$, tedy $t = \varphi(x)$. Odtud diferenciací dostáváme $\mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ (porovnejte se vzorcem ve znění věty).

Příklad

$$\int \sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \ln x \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \end{array} \right|$$

$$= \int \sin t\,\mathrm{d}t = -\cos t + c = -\cos(\ln x) + c.$$

Věta (Substituční metoda II)

Nechť $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu I, nechť má funkce $\varphi(t)$ na intervalu J nenulovou derivaci a nechť platí $\varphi(J) = I$. Potom na I platí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

dosadíme-li do výrazu na pravé straně $t = \varphi^{-1}(x)$, kde $\varphi^{-1}(x)$ je funkce inverzní k funkci $\varphi(x)$.

Poznámka

- Přestože pravá strana vztahu pro substituci vypadá složitěji než levá strana, vhodnou volbou substituce dodjde často naopak k výraznému zjednodušení.

Poznámka

- Přestože pravá strana vztahu pro substituci vypadá složitěji než levá strana, vhodnou volbou substituce dodjde často naopak k výraznému zjednodušení.
- Porovnáme-li obě uvedené substituční metody, zjistíme, že jde o jediný vztah, který lze využít zprava doleva, nebo naopak.

Příklad

Přímé použití věty:

$$\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \frac{t-1}{2} \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t \end{array} \right|$$

$$= \int \sin\left(2\cdot\frac{t-1}{2}+1\right)\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}\cos t + c = \left| \begin{array}{c} x = \frac{t-1}{2} \\ t = 2x+1 \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + c.$$

Příklad

Přímé použití věty:

$$\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \frac{t-1}{2} \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right|$$

$$= \int \sin\left(2 \cdot \frac{t-1}{2} + 1\right) \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}\cos t + c = \left| \begin{array}{c} x = \frac{t-1}{2} \\ t = 2x+1 \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + c.$$

V tomto případě snadněji:

$$\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = 2x+1 \\ \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right|$$

$$= \int \sin t \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cos t + c = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + c.$$

Důsledek

Je-li F primitivní funkce k funkci f, pak platí

$$\int f(\alpha x+\beta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)+c.$$

Důsledek

Je-li F primitivní funkce k funkci f, pak platí

$$\int f(\alpha x + \beta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + c.$$

Příklad

$$\int \sqrt{4x+5}\,\mathrm{d}x = \int (4x+5)^{1/2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4} \frac{(4x+5)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{6}\sqrt{(4x+5)^3} + c.$$

Důsledek

Platí

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c.$$

Důsledek

Platí

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c.$$

Příklad

$$\int \frac{5x}{3x^2+5}\,\mathrm{d}x = 5\int \frac{x}{3x^2+5}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{6}\int \frac{6x}{3x^2+5}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{5}{6}\ln|3x^2+5| + c = \frac{5}{6}\ln(3x^2+5) + c.$$

Obsah

Příklad

Spočtěte integrály:

(i) $\int 6x^2 - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x} \, \mathrm{d}x$,

(ii) $\int \sqrt[3]{x^2} \cdot (x^2 + 1) \, \mathrm{d}x$,

(iii) $\int \dfrac{2x^3 + 4x - 8}{x^2} \, \mathrm{d}x$,

(iv) $\int \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x - 3} \, \mathrm{d}x$.

Příklad

Spočtěte integrály:

(i) $\int 6x^2 - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\int \sqrt[3]{x^2} \cdot (x^2 + 1)\,\mathrm{d}x$,

(iii) $\int \dfrac{2x^3 + 4x - 8}{x^2}\,\mathrm{d}x$,

(iv) $\int \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x - 3}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

(i) $2x^3 - 8\sqrt{x} + 2\ln|x| + c$,

(ii) $\frac{3}{11}\sqrt[3]{x^{11}} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c$,

(iii) $x^2 + 4\ln|x| + \frac{8}{x} + c$,

(iv) $\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x + 28\ln|x-3| + c$.

Příklad

Integrujte pomocí subsituce

(i) $\int \cos\left(\frac{3}{2}x\right)\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\int \frac{3}{\sqrt{2-8x}}\,\mathrm{d}x$,

(iii) $\int \frac{4}{2x-1}\,\mathrm{d}x$,

(iv) $\int 5^{3x}\,\mathrm{d}x$,

(v) $\int \frac{1}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x$

Příklad

Integrujte pomocí subsituce

(i) $\int \cos\left(\frac{3}{2}x\right) \mathrm{d}x$,

(ii) $\int \frac{3}{\sqrt{2-8x}} \mathrm{d}x$,

(iii) $\int \frac{4}{2x-1} \mathrm{d}x$,

(iv) $\int 5^{3x} \mathrm{d}x$,

(v) $\int \frac{1}{4x^2+1} \mathrm{d}x$

Řešení:

(i) $\frac{2}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right) + c$,

(ii) $-\frac{3}{4}\sqrt{2-8x} + c$,

(iii) $2\ln|2x-1| + c$,

(iv) $\frac{5^{3x}}{3\ln 5} + c$,

(v) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x) + c$.

Příklad

Pomocí metody per partes integrujte

(i) $\int x^2 \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$,

(ii) $\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$.

Příklad

Pomocí metody per partes integrujte

(i) $\int x^2 \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$,

(ii) $\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$.

Řešení:

(i) $\mathrm{e}^x \left(x^2 - 2x + 2\right) + c$,

(ii) $\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c$.

Příklad

Integrujte:

(i) $\int \frac{4x}{2x^2-8}\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\int \frac{x}{2x^2-8}\,\mathrm{d}x$,

(iii) $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$.

Příklad

Integrujte:

(i) $\int \frac{4x}{2x^2-8}\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\int \frac{x}{2x^2-8}\,\mathrm{d}x$,

(iii) $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$.

$$\left(\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c\right)$$

Příklad

Integrujte:

(i) $\int \frac{4x}{2x^2-8}\,dx$,

(ii) $\int \frac{x}{2x^2-8}\,dx$,

(iii) $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

$$\left(\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c\right)$$

Řešení:

(i) $\ln|2x^2-8| + c$,

(ii) $\frac{1}{4} \cdot \ln|2x^2-8| + c$,

(iii) $= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c$.

Příklad

S použitím vzorce

$$\int \frac{1}{A^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{x}{A} + c$$

spočítejte integrál

$$\int \frac{1}{16 + 9x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad

S použitím vzorce

$$\int \frac{1}{A^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{x}{A} + c$$

spočítejte integrál

$$\int \frac{1}{16 + 9x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

$$\int \frac{1}{16 + 9x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4^2 + (3x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \operatorname{arctg}\frac{3x}{4} + c = \frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{3x}{4} + c.$$

Příklad

S použitím vzorce

$$\int \frac{1}{A^2 - x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{A+x}{A-x} \right| + c$$

spočítejte integrál

$$\int \frac{3}{16 - 9x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Příklad

S použitím vzorce

$$\int \frac{1}{A^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{A+x}{A-x} \right| + c$$

spočítejte integrál

$$\int \frac{3}{16 - 9x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

$$\int \frac{3}{16 - 9x^2}\,\mathrm{d}x = 3 \int \frac{1}{4^2 - (3x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \ln \left| \frac{4+3x}{4-3x} \right| + c = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{4+3x}{4-3x} \right| + c.$$

Příklad

S použitím vzorce

$$\int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{A} + c$$

spočítejte integrál

$$\int \frac{-7}{\sqrt{16 - 3x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad

S použitím vzorce

$$\int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{A} + c$$

spočítejte integrál

$$\int \frac{-7}{\sqrt{16 - 3x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

$$\int \frac{-7}{\sqrt{16 - 3x^2}}\,\mathrm{d}x = -7\int \frac{1}{\sqrt{4^2 - (\sqrt{3}x)^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= -7\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{4} + c = \frac{-7\sqrt{3}}{3}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{4} + c.$$

Příklad

S použitím vzorce

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm B}\right| + c$$

spočítejte integrál

$$\int \frac{2}{\sqrt{4x^2 - 3}}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad

S použitím vzorce

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}}\,\mathrm{d}x = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm B}| + c$$

spočítejte integrál

$$\int \frac{2}{\sqrt{4x^2 - 3}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

$$\int \frac{2}{\sqrt{4x^2 - 3}}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{\sqrt{(2x)^2 - 3}}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\frac{1}{2}\ln|2x + \sqrt{4x^2 - 3}| + c = \ln|2x + \sqrt{4x^2 - 3}| + c.$$

Příklad

Použitím doplnění na čtverec spočítejte integrál

$$\int \frac{3}{2x^2 + 8x - 10}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad

Použitím doplnění na čtverec spočítejte integrál

$$\int \frac{3}{2x^2+8x-10}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

$$\int \frac{3}{2x^2+8x-10}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+4x-5}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x+2)^2-9}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\int \frac{1}{9-(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{3+x+2}{3-x-2}\right| + c = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+5}{1-x}\right| + c.$$

Obsah

Poznámka

Již víme, že každou racionální lomenou funkci, která není ryze lomená, lze pomocí dělení polynomů převést na součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Budeme se tedy zajímat pouze o integrály z ryze lomených racionálních funkcí.

Poznámka

Již víme, že každou racionální lomenou funkci, která není ryze lomená, lze pomocí dělení polynomů převést na součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Budeme se tedy zajímat pouze o integrály z ryze lomených racionálních funkcí.

Zaměříme se na 4 typy integrálů:

1. $\int \frac{A}{ax+b}\,\mathrm{d}x$,
2. $\int \frac{A}{(ax+b)^n}\,\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N}$,
3. $\int \frac{A}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$,
4. $\int \frac{Ax+B}{ax^2+px+q}\,\mathrm{d}x$,

kde A, B, a, b, c, p, q jsou reálná čísla.

Typ 1 a 2 řešíme substitucí $t = ax + b$.

Typ 1 a 2 řešíme substitucí $t = ax + b$.

Příklad (Typ 1)

$$\int \frac{3}{2x-8}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = 2x - 8 \\ \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{3}{t} \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2} \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{2} \ln|t| + c = \frac{3}{2} \ln|2x-8| + c.$$

Příklad (Typ 2)

$$\int \frac{3}{(2x-8)^3}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = 2x-8 \\ \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{3}{t^3}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{2}\int t^{-3}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\frac{t^{-2}}{-2} + c$$

$$= \frac{3}{-4}\frac{1}{t^2} + c = \frac{-3}{4(2x-8)^2} + c.$$

Typ 3 řešíme doplněním jmenovatele na čtverec a použitím vzorce pro $\int \frac{1}{A^2+x^2}\,\mathrm{d}x$, nebo $\int \frac{1}{A^2-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Typ 3 řešíme doplněním jmenovatele na čtverec a použitím vzorce pro $\int \frac{1}{A^2+x^2}\,\mathrm{d}x$, nebo $\int \frac{1}{A^2-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Příklad (Typ 3)

$$\int \frac{3}{2x^2-4x+10}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2+4}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left| \begin{matrix} t = x-1 \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+2^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot \operatorname{arctg}\frac{t}{2} + c = \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + c.$$

Typ 4 řešíme převedením na součet integrálu typu $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ a integrálu typu 3.

Typ 4 řešíme převedením na součet integrálu typu $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ a integrálu typu 3.

Příklad (Typ 4)

$$\int \frac{3x-6}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{x-2}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2-2-4}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x-3} + \frac{-6}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x$$

Typ 4 řešíme převedením na součet integrálu typu $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ a integrálu typu 3.

Příklad (Typ 4)

$$\int \frac{3x-6}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{x-2}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2-2-4}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x-3} + \frac{-6}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x$$

$$I_1 = \int \frac{2x+2}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = \ln|x^2+2x-3| + c$$

$$I_2 = -6\int \frac{1}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = -6\int \frac{1}{(x+1)^2-4}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = x+1 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right|$$

$$= -6\int \frac{1}{t^2-4}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{1}{4-t^2}\,\mathrm{d}t = 6\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| + c$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x+3}{1-x}\right| + c$$

$$I_2 = -6\int \frac{1}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = -6\int \frac{1}{(x+1)^2-4}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = x+1 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right|$$

$$= -6\int \frac{1}{t^2-4}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{1}{4-t^2}\,\mathrm{d}t = 6\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| + c$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x+3}{1-x}\right| + c$$

Celkem

$$\int \frac{3x-6}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\left(\ln\left|x^2+2x-3\right| + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x+3}{1-x}\right|\right) + c$$

Obsah

Racionální lomenou funkci v proměnných $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ budeme značit $R(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$. Např. $R(x, \sin x)$ jsou funkce $\frac{x^2 - 2\sin^3 x}{\sin^2 x}$, $2x + \sin x$, $\frac{\sin x - x^4}{x^2 - 2\sin^3 x}$ apod.

Obsah

Volba substituce

Nechť je integrand (integrovaná funkce) typu $R(\sin x, \cos x)$. Je-li integrand lichá funkce vůči sinu, volíme substituci $t = \cos x$. Je-li lichá vůči kosinu, volíme $t = \sin x$.

Volba substituce

Nechť je integrand (integrovaná funkce) typu $R(\sin x, \cos x)$. Je-li integrand lichá funkce vůči sinu, volíme substituci $t = \cos x$. Je-li lichá vůči kosinu, volíme $t = \sin x$.

Poznámka

Připomeňme

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \Rightarrow \sin^2 x &= 1 - \cos^2 x \\ \Rightarrow \cos^2 x &= 1 - \sin^2 x. \end{aligned}$$

Příklad

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x \, \mathrm{d}x$$

$$= \int \sin^2 x (\cos^2 x)^2 \cos x \, \mathrm{d}x = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, \mathrm{d}x$$

$$= \int t^2 (1 - t^2)^2 \, \mathrm{d}t = \int t^2 - 2t^4 + t^6 \, \mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + c$$

$$= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + c.$$

Obsah

Volba substituce I

Je-li je integrand typu $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$, $n \in \mathbb{N}$, volíme substituci

$$t^n = ax + b, \qquad \left(t = \sqrt[n]{ax+b}\right).$$

Tím převedeme integrál na integrál z racionální lomené funkce.

Příklad

$$\int \frac{2x}{\sqrt[3]{4x-1}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t^3 = 4x-1 \Rightarrow x = \frac{t^3+1}{4} \\ 3t^2\,\mathrm{d}t = 4\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{3}{4}t^2\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{2\cdot\frac{t^3+1}{4}}{t}\cdot\frac{3}{4}t^2\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{4}\cdot\frac{3}{4}\int \frac{(t^3+1)t^2}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{8}\int (t^3+1)t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{8}\int t^4 + t\,\mathrm{d}t = \frac{3}{8}\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^2}{2}\right)+c$$

$$= \frac{3}{8}\left[\frac{1}{5}\left(\sqrt[3]{4x-1}\right)^5 + \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{4x-1}\right)^2\right]+c$$

$$= \frac{3}{80}\sqrt[3]{(4x-1)^2}\Big[2(4x-1)+5\cdot 1\Big]+c$$

$$= \frac{3}{80}\sqrt[3]{(4x-1)^2}\cdot(8x+3)+c.$$

Volba substituce II

Je-li je integrand typu $R(x, \sqrt[n_1]{x}, \sqrt[n_2]{x}, \dots, \sqrt[n_k]{x})$, $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, volíme substituci

$$t^s = x, \qquad \big(t = \sqrt[s]{x}\big),$$

kde s je nejmenším společným násobkem čísel $n_1, \dots, n_k$. Tím převedeme integrál z iracionální funkce na integrál z racionální lomené funkce.

Příklad

$$\int \frac{\sqrt[5]{x} - 3\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t^{10} = x \Rightarrow t = \sqrt[10]{x} \\ 10t^9\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{t^{10/5} - 3 \cdot t^{10/2}}{t^{10}} \cdot 10t^9\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{t^2 - 3t^5}{t^{10}} 10t^9\,\mathrm{d}t = 10 \int t - 3t^4\,\mathrm{d}t$$

$$= 10\left(\frac{t^2}{2} - 3\frac{t^5}{5}\right) + c$$

$$= 5\sqrt[10]{x^2} - 6\sqrt[10]{x^5} + c = 5\sqrt[5]{x} - 6\sqrt{x} + c.$$

Obsah

- Neurčitý integrál. ⊛ ⊛

```
integrate x^5 ln(x)
```

```
integrate sqrt(ln(x))/x
```