

Aplikace derivace a průběh funkce

Petr Hasil

Přednáška z matematiky



Obsah

- 1 Použití derivací
 - L'Hospitalovo pravidlo
 - Tečna a normála ke grafu funkce
- 2 Průběh funkce
 - Monotonie a lokální extrémny
 - Konvexnost, konkávnost a inflexní body
 - Asymptoty
 - Průběh funkce – shrnutí
- 3 Příklad
- 4 Globální extrémny
- 5 Wolfram|Alpha

Obsah

1 Použití derivací

- L'Hospitalovo pravidlo
- Tečna a normála ke grafu funkce

2 Průběh funkce

- Monotonie a lokální extrém
- Konvexnost, konkávnost a inflexní body
- Asymptoty
- Průběh funkce – shrnutí

3 Příklad

4 Globální extrém

5 Wolfram|Alpha

Věta (L'Hospitalovo pravidlo)

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^$ a necht' funkce f a g jsou definované v nějakém ryzím okolí bodu α , mají zde derivaci a $g'(x) \neq 0$. Necht' dále platí buď*

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0,$$

nebo

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} |g(x)| = \infty.$$

Věta (L'Hospitalovo pravidlo)

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^$ a nechť funkce f a g jsou definované v nějakém ryzím okolí bodu α , mají zde derivaci a $g'(x) \neq 0$. Nechť dále platí buď*

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0,$$

nebo

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} |g(x)| = \infty.$$

Pak platí

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pokud limita na pravé straně existuje. Stejně tvrzení platí i pro obě jednostranné limity.

Poznámka

- L'Hospitalovo pravidlo můžeme použít opakovaně.

Poznámka

- L'Hospitalovo pravidlo můžeme použít opakovaně.
- Lze ho použít přímo na limity typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$.

Poznámka

- L'Hospitalovo pravidlo můžeme použít opakovaně.
- Lze ho použít přímo na limity typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$.
- Vhodnou úpravou lze převést neurčité výrazy typu $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^∞ a ∞^0 na jeden z typů $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Poznámka

- L'Hospitalovo pravidlo můžeme použít opakovaně.
- Lze ho použít přímo na limity typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$.
- Vhodnou úpravou lze převést neurčité výrazy typu $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^∞ a ∞^0 na jeden z typů $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

POZOR!

Při použití L'Hospitalova pravidla nederivujeme výraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ jako podíl, ale derivujeme zvlášť funkci v čitateli a zvlášť funkci ve jmenovateli.

Obsah

1 Použití derivací

- L'Hospitalovo pravidlo
- Tečna a normála ke grafu funkce

2 Průběh funkce

- Monotonie a lokální extrém
- Konvexnost, konkávnost a inflexní body
- Asymptoty
- Průběh funkce – shrnutí

3 Příklad

4 Globální extrém

5 Wolfram|Alpha

Definice

Nechť je $f(x)$ funkce spojitá a má derivaci v bodě $x_0 \in D(f)$. Potom přímkou

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

nazýváme **tečna** ke grafu funkce f v bodě x_0

Definice

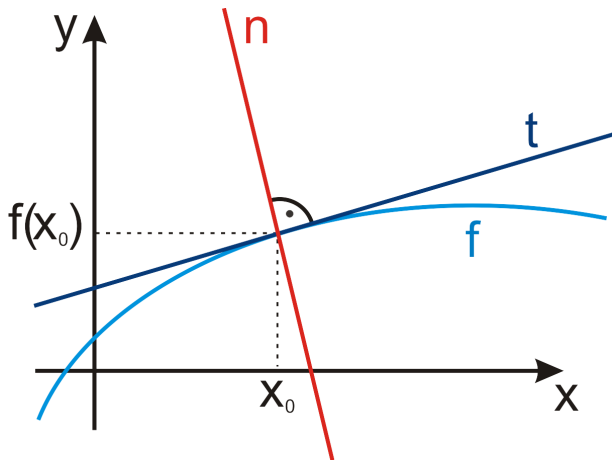
Nechť je $f(x)$ funkce spojitá a má derivaci v bodě $x_0 \in D(f)$. Potom přímkou

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

nazýváme **tečna** ke grafu funkce f v bodě x_0 a přímkou

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

nazýváme **normála** ke grafu funkce f v bodě x_0 (v případě, že $f'(x_0) \neq 0$).



Obsah

- 1 Použití derivací
 - L'Hospitalovo pravidlo
 - Tečna a normála ke grafu funkce
- 2 Průběh funkce
 - **Monotonie a lokální extrémy**
 - Konvexnost, konkávnost a inflexní body
 - Asymptoty
 - Průběh funkce – shrnutí
- 3 Příklad
- 4 Globální extrémy
- 5 Wolfram|Alpha

Věta

Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$ a má derivaci na intervalu (a, b) . Pak platí

- Funkce f je v $[a, b]$ **konstantní** právě tehdy, když $\forall x \in (a, b) : f'(x) = 0$.

Věta

Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$ a má derivaci na intervalu (a, b) . Pak platí

- Funkce f je v $[a, b]$ **konstantní** právě tehdy, když $\forall x \in (a, b) : f'(x) = 0$.
- Je-li $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$, pak je funkce f na intervalu $[a, b]$ **rostoucí**.

Věta

Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$ a má derivaci na intervalu (a, b) . Pak platí

- Funkce f je v $[a, b]$ **konstantní** právě tehdy, když $\forall x \in (a, b) : f'(x) = 0$.
- Je-li $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$, pak je funkce f na intervalu $[a, b]$ **rostoucí**.
- Je-li $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$, pak je funkce f na intervalu $[a, b]$ **klesající**.

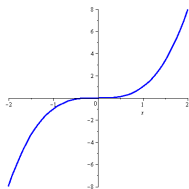
Věta

Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$ a má derivaci na intervalu (a, b) . Pak platí

- Funkce f je v $[a, b]$ **konstantní** právě tehdy, když $\forall x \in (a, b) : f'(x) = 0$.
- Je-li $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$, pak je funkce f na intervalu $[a, b]$ **rostoucí**.
- Je-li $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$, pak je funkce f na intervalu $[a, b]$ **klesající**.

Pozor!

Obrácené tvrzení neplatí. Např. funkce $f(x) = x^3$ je na celém \mathbb{R} rostoucí, ale v bodě $x = 0$ má nulovou derivaci.



Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *lokální maximum (minimum)*, jestliže pro každé x v nějakém okolí bodu x_0 platí

$$f(x) \leq f(x_0), \quad (f(x) \geq f(x_0)).$$

Pokud pro $x \neq x_0$ platí předchozí nerovnosti ostře, mluvíme o ostrém lokálním maximu (minimu).

Souhrnně nazýváme (ostré) lokální maximum a minimum *(ostré) lokální extrémy*.

Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *lokální maximum (minimum)*, jestliže pro každé x v nějakém okolí bodu x_0 platí

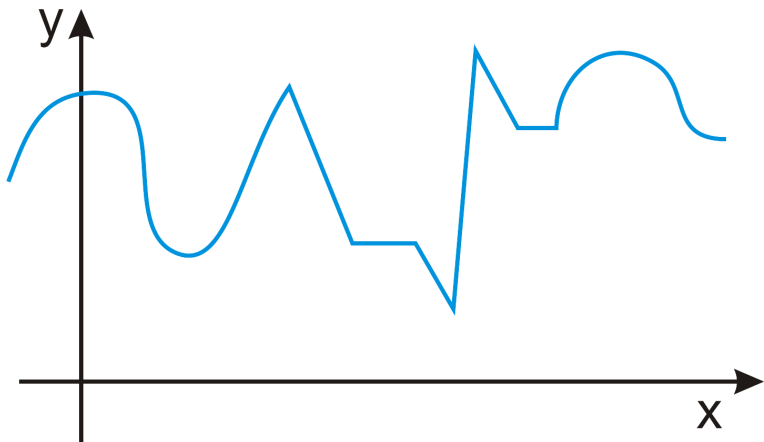
$$f(x) \leq f(x_0), \quad (f(x) \geq f(x_0)).$$

Pokud pro $x \neq x_0$ platí předchozí nerovnosti ostře, mluvíme o ostrém lokálním maximu (minimu).

Souhrnně nazýváme (ostré) lokální maximum a minimum *(ostré) lokální extrémy*.

Věta

Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém, pak $f'(x_0) = 0$, nebo $f'(x_0)$ neexistuje.



Definice

Je-li $f'(x_0) = 0$, pak bod x_0 nazýváme *stacionární bod* funkce f .

Definice

Je-li $f'(x_0) = 0$, pak bod x_0 nazýváme *stacionární bod* funkce f .

Věta

Nechť je funkce f spojitá v bodě x_0 a necht' existuje její derivace v nějakém prstencovém okolí tohoto bodu. Označme L levé prstencové okolí bodu x_0 a R pravé prstencové okolí bodu x_0 .

- *Jestliže platí*

$$f'(x) > 0 \text{ pro } x \in L \text{ a } f'(x) < 0 \text{ pro } x \in R,$$

pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Definice

Je-li $f'(x_0) = 0$, pak bod x_0 nazýváme *stacionární bod* funkce f .

Věta

Nechť je funkce f spojitá v bodě x_0 a necht' existuje její derivace v nějakém prstencovém okolí tohoto bodu. Označme L levé prstencové okolí bodu x_0 a R pravé prstencové okolí bodu x_0 .

- Jestliže platí

$$f'(x) > 0 \text{ pro } x \in L \text{ a } f'(x) < 0 \text{ pro } x \in R,$$

pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

- Jestliže platí

$$f'(x) < 0 \text{ pro } x \in L \text{ a } f'(x) > 0 \text{ pro } x \in R,$$

pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Věta

Nechť $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) \neq 0$. Pak má funkce f v bodě x_0 lokální extrém a to

- lokální maximum, jestliže $f''(x_0) < 0$,*

Věta

Nechť $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) \neq 0$. Pak má funkce f v bodě x_0 lokální extrém a to

- lokální maximum, jestliže $f''(x_0) < 0$,*
- lokální minimum, jestliže $f''(x_0) > 0$.*

Příklad

Najděte lokální extrémy funkce $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Příklad

Najděte lokální extrémy funkce $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Řešení:



$$(i) f'(x) = -2x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$$

Příklad

Najděte lokální extrémy funkce $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Řešení:

$$(i) f'(x) = -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

x	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$\text{sgn } f'$	+	-
f		

Příklad

Najděte lokální extrémy funkce $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Řešení:

$$(i) f'(x) = -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

x	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$\text{sgn } f'$	+	-
f	\nearrow	\searrow

Funkce f má tedy v $x = 2$ lokální maximum s hodnotou $f(2) = 1$.

$$(ii) f'(x) = -2x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$$

$$(ii) f'(x) = -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$f''(x) = -2 \Rightarrow f''(2) = -2 < 0.$$

$$(ii) f'(x) = -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

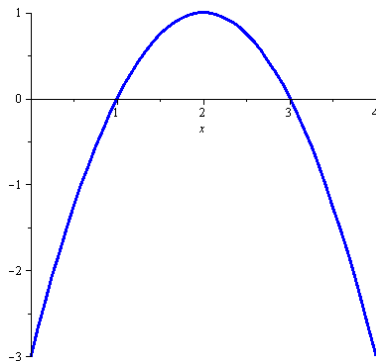
$$f''(x) = -2 \Rightarrow f''(2) = -2 < 0.$$

Funkce f má tedy v $x = 2$ lokální maximum s hodnotou $f(2) = 1$.

$$(ii) f'(x) = -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$f''(x) = -2 \Rightarrow f''(2) = -2 < 0.$$

Funkce f má tedy v $x = 2$ lokální maximum s hodnotou $f(2) = 1$.



Obsah

- 1 Použití derivací
 - L'Hospitalovo pravidlo
 - Tečna a normála ke grafu funkce
- 2 Průběh funkce
 - Monotonie a lokální extrém
 - **Konvexnost, konkávnost a inflexní body**
 - Asymptoty
 - Průběh funkce – shrnutí
- 3 Příklad
- 4 Globální extrém
- 5 Wolfram|Alpha

Definice

Funkci nazveme *konvexní (konkávní)* v bodě x_0 , jestliže její graf leží v prstencovém okolí bodu x_0 nad (pod) tečnou v tomto bodě.

Funkci nazveme konvexní (konkávní) na intervalu I , jestliže je konvexní (konkávní) v každém bodě tohoto intervalu.

Definice

Funkci nazveme *konvexní (konkávní)* v bodě x_0 , jestliže její graf leží v prstencovém okolí bodu x_0 nad (pod) tečnou v tomto bodě.

Funkci nazveme konvexní (konkávní) na intervalu I , jestliže je konvexní (konkávní) v každém bodě tohoto intervalu.

Věta

Nechť funkce $f(x)$ má derivaci na intervalu (a, b) . Pak platí

- *jestliže $\forall x \in (a, b)$ platí $f''(x) > 0$, pak je funkce f konvexní na intervalu (a, b) ,*

Definice

Funkci nazveme *konvexní (konkávní)* v bodě x_0 , jestliže její graf leží v prstencovém okolí bodu x_0 nad (pod) tečnou v tomto bodě.

Funkci nazveme konvexní (konkávní) na intervalu I , jestliže je konvexní (konkávní) v každém bodě tohoto intervalu.

Věta

Nechť funkce $f(x)$ má derivaci na intervalu (a, b) . Pak platí

- *jestliže $\forall x \in (a, b)$ platí $f''(x) > 0$, pak je funkce f konvexní na intervalu (a, b) ,*
- *jestliže $\forall x \in (a, b)$ platí $f''(x) < 0$, pak je funkce f konkávní na intervalu (a, b) .*

Definice

Funkci nazveme *konvexní (konkávní)* v bodě x_0 , jestliže její graf leží v prstencovém okolí bodu x_0 nad (pod) tečnou v tomto bodě.

Funkci nazveme konvexní (konkávní) na intervalu I , jestliže je konvexní (konkávní) v každém bodě tohoto intervalu.

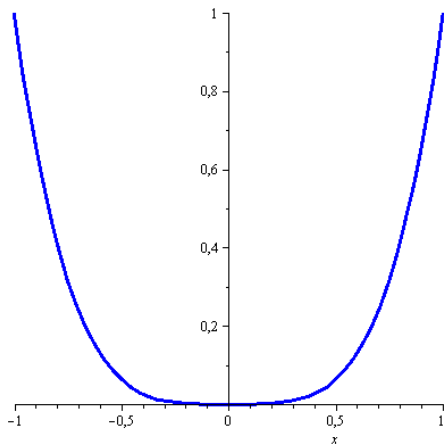
Věta

Nechť funkce $f(x)$ má derivaci na intervalu (a, b) . Pak platí

- *jestliže $\forall x \in (a, b)$ platí $f''(x) > 0$, pak je funkce f konvexní na intervalu (a, b) ,*
- *jestliže $\forall x \in (a, b)$ platí $f''(x) < 0$, pak je funkce f konkávní na intervalu (a, b) .*

Poznámka

Opačné tvrzení neplatí. Např. funkce $f(x) = x^4$ je konvexní na \mathbb{R} , ale $f''(0) = 0$.



Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *inflexní bod*, jestliže v bodě x_0 existuje tečna ke grafu funkce a f'' zde mění znaménko (tj. graf funkce se mění z konvexního na konkávní, nebo opačně).

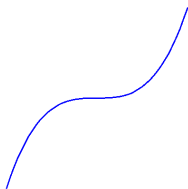
Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *inflexní bod*, jestliže v bodě x_0 existuje tečna ke grafu funkce a f'' zde mění znaménko (tj. graf funkce se mění z konvexního na konkávní, nebo opačně).

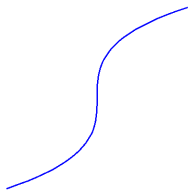
Poznámka

Funkce f může mít inflexní bod v bodě x_0 , ve kterém

- $f''(x_0) = 0$,
- $f''(x_0)$ neexistuje.



Obr.: x^3



Obr.: $\sqrt[3]{x}$

Věta

Nechť má funkce f v bodě x_0 spojitou první derivaci a necht' existuje ryzí okolí bodu x_0 , v němž existuje druhá derivace funkce f . Označme L levé ryzí okolí bodu x_0 a R pravé ryzí okolí bodu x_0 . Pak jestliže

$$f''(x) > 0 \forall x \in L \text{ a } f''(x) < 0 \quad \forall x \in R \quad \text{nebo naopak,}$$

pak má funkce f v bodě x_0 inflexní bod.

Věta

Nechť má funkce f v bodě x_0 spojitou první derivaci a necht' existuje ryzí okolí bodu x_0 , v němž existuje druhá derivace funkce f . Označme L levé ryzí okolí bodu x_0 a R pravé ryzí okolí bodu x_0 . Pak jestliže

$$f''(x) > 0 \forall x \in L \text{ a } f''(x) < 0 \quad \forall x \in R \quad \text{nebo naopak,}$$

pak má funkce f v bodě x_0 inflexní bod.

Příklad

Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ je funkce $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x - 3$ konkávní/konvexní a najděte její inflexní body.

$$\text{Řešení: } f'(x) = 3x^2 - 12x + 6, \quad f''(x) = 6x - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$$

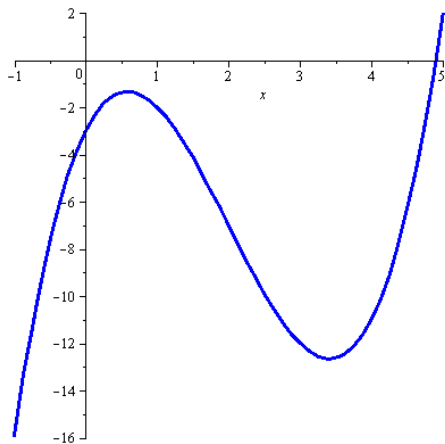
Řešení: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 6$, $f''(x) = 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

x	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$\text{sgn } f''$	$-$	$+$
f	\cap	\cup

Řešení: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 6$, $f''(x) = 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

x	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$\text{sgn } f''$	$-$	$+$
f	\cap	\cup

Funkce je konkávní pro $x \in (-\infty, 2)$ konvexní pro $x \in (2, \infty)$ a v $x = 2$ má inflexní bod s hodnotou $f(2) = -7$.



Obsah

- 1 Použití derivací
 - L'Hospitalovo pravidlo
 - Tečna a normála ke grafu funkce
- 2 Průběh funkce
 - Monotonie a lokální extrém
 - Konvexnost, konkávnost a inflexní body
 - **Asymptoty**
 - Průběh funkce – shrnutí
- 3 Příklad
- 4 Globální extrém
- 5 Wolfram|Alpha

Definice

Přímku, která je tečnou ke grafu funkce f v některém nevlastním bodě, nazýváme *asymptota* funkce f .

Definice

Přímku, která je tečnou ke grafu funkce f v některém nevlastním bodě, nazýváme *asymptota* funkce f .

Věta

Funkce má

- *asymptotu bez směrnice $x = x_0$ právě tehdy, když má v bodě x_0 nevlastní limitu zleva nebo zprava,*

Definice

Přímku, která je tečnou ke grafu funkce f v některém nevlastním bodě, nazýváme *asymptota* funkce f .

Věta

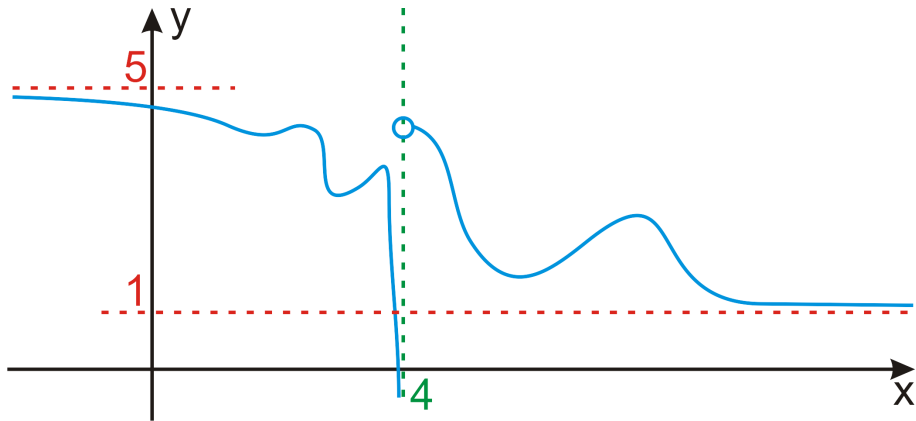
Funkce má

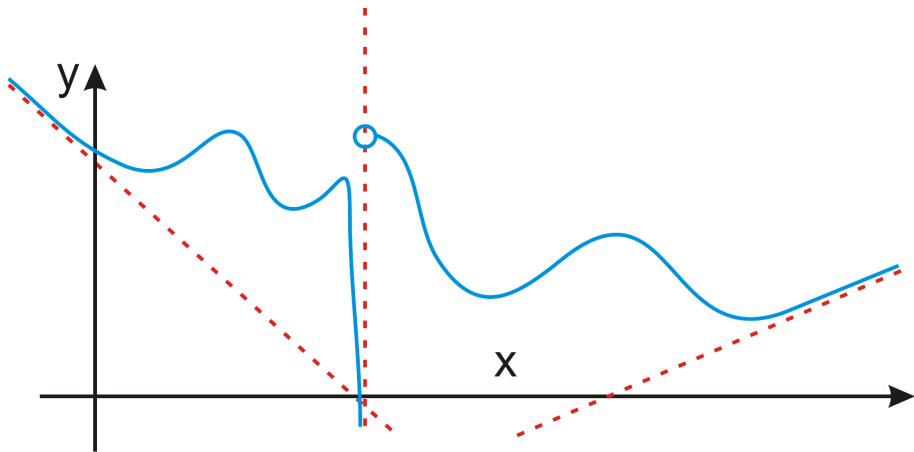
- *asymptotu bez směrnice* $x = x_0$ právě tehdy, když má v bodě x_0 nevlastní limitu zleva nebo zprava,
- *asymptotu se směrnicí* $y = ax + b$ pro $x \rightarrow \pm\infty$ právě tehdy, když

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \quad a \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) \in \mathbb{R}.$$

Poznámka

Je-li limita $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$, pak je svislá přímka $x = x_0$ asymptotou bez směrnice funkce f v bodě x_0 . Tedy asymptoty bez směrnice hledáme "v dírách" nebo na okraji definičního oboru.





Obsah

- 1 Použití derivací
 - L'Hospitalovo pravidlo
 - Tečna a normála ke grafu funkce
- 2 Průběh funkce
 - Monotonie a lokální extrém
 - Konvexnost, konkávnost a inflexní body
 - Asymptoty
 - Průběh funkce – shrnutí
- 3 Příklad
- 4 Globální extrém
- 5 Wolfram|Alpha

Postup při vyšetřování průběhu funkce

(i) *Přímo z funkce:*

- $D(f)$, sudost/lichost, periodičnost, průsečíky s osami, kladnost/zápornost,
- asymptoty (se směrnicí, bez směrnice).

Postup při vyšetřování průběhu funkce

(i) *Přímo z funkce*:

- $D(f)$, sudost/lichost, periodičnost, průsečíky s osami, kladnost/zápornost,
- asymptoty (se směrnicí, bez směrnice).

(ii) *Z první derivace*: rostoucí/klesající, lokální extrémy.

Postup při vyšetřování průběhu funkce

(i) *Přímo z funkce*:

- $D(f)$, sudost/lichost, periodičnost, průsečíky s osami, kladnost/zápornost,
- asymptoty (se směrnicí, bez směrnice).

(ii) *Z první derivace*: rostoucí/klesající, lokální extrémy.

(iii) *Z druhé derivace*: konvexní/konkávní, inflexní body.

Postup při vyšetřování průběhu funkce

(i) *Přímo z funkce*:

- $D(f)$, sudost/lichost, periodičnost, průsečíky s osami, kladnost/zápornost,
- asymptoty (se směrnicí, bez směrnice).

(ii) *Z první derivace*: rostoucí/klesající, lokální extrémy.

(iii) *Z druhé derivace*: konvexní/konkávní, inflexní body.

(iv) *Načrtnutí grafu*: ke všem výše zmíněným bodům dopočítáme funkční hodnoty a zkombinujeme zjištěné informace.

Postupně tedy plníme následující body:

- a) definiční obor,
- b) sudost/lichost (periodičnost),
- c) asymptoty bez směrnice,
- d) asymptoty se směrnicí,
- e) průsečíky s osami,
- f) kladnost/zápornost,
- g) první derivaci,
- h) kde je f rostoucí/klesající,
- i) lokální extrémy,
- j) druhou derivaci,
- k) kde je f konvexní/konkávní,
- l) inflexní body,
- m) funkční hodnoty ve významných bodech,
- n) načrtneme graf.

Obsah

- 1 Použití derivací
 - L'Hospitalovo pravidlo
 - Tečna a normála ke grafu funkce
- 2 Průběh funkce
 - Monotonie a lokální extrém
 - Konvexnost, konkávnost a inflexní body
 - Asymptoty
 - Průběh funkce – shrnutí
- 3 Příklad
- 4 Globální extrém
- 5 Wolfram|Alpha

Příklad

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = -\frac{x^2}{x+1}$$

Příklad

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = -\frac{x^2}{x+1}$$

Řešení:

- a) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $x + 1 \neq 0$. Proto máme

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Příklad

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = -\frac{x^2}{x+1}$$

Řešení:

- a) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $x + 1 \neq 0$. Proto máme

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

- b) O sudosti/lichosti funkce snadno rozhodneme dosazením $-x$.
Poněvadž platí

$$f(-x) = -\frac{x^2}{-x+1} \neq \pm f(x),$$

není zadaná funkce ani lichá, ani sudá (což je vidět už z nesymetrie definičního oboru). Vzhledem k definičnímu oboru je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

- c) Asymptoty bez směrnice popisují limitní chování funkce v bodech nespojitosti (nebo na okraji definičního oboru), proto přímým výpočtem ihned dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} -\frac{x^2}{x+1} = -\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x+1} = -(+\infty) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} -\frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} -\frac{x^2}{x+1} = -(-\infty) = \infty.$$

Funkce má jednu svislou asymptotu $x = -1$.

- d) Pomocí vzorců určíme asymptoty se směrnicí (pokud existují).

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{x^2}{x^2 + x} = -1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{x^2}{x+1} + x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

- c) Asymptoty bez směrnice popisují limitní chování funkce v bodech nespojitosti (nebo na okraji definičního oboru), proto přímým výpočtem ihned dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} -\frac{x^2}{x+1} = -\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x+1} = -(+\infty) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} -\frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} -\frac{x^2}{x+1} = -(-\infty) = \infty.$$

Funkce má jednu svislou asymptotu $x = -1$.

- d) Pomocí vzorců určíme asymptoty se směrnicí (pokud existují).

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{x^2}{x^2 + x} = -1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{x^2}{x+1} + x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

Funkce $f(x)$ má tedy v $+\infty$ i $-\infty$ asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = -x + 1$.

e) Určíme průsečíky s osou x ($\Rightarrow y = 0$):

$$f(x) = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0,$$

tedy $P_x = [0, 0]$,

e) Určíme průsečíky s osou x ($\Rightarrow y = 0$):

$$f(x) = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0,$$

tedy $P_x = [0, 0]$,

a s osou y ($\Rightarrow x = 0$):

$$y = -\frac{0^2}{0+1} = 0 \iff y = 0,$$

tedy $P_y = [0, 0] = P_x$.

f) Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
$\text{sgn } f$	+	-	-
f	kladná	záporná	záporná

g) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x}{(x + 1)^2}, \quad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

g) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x}{(x + 1)^2}, \quad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

h) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \iff -x(x + 2) = 0 \iff x_1 = 0, x_2 = -2.$$

g) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2}, \quad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

h) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \iff -x(x+2) = 0 \iff x_1 = 0, x_2 = -2.$$

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
$\text{sgn } f'$	$-$	$+$	$+$	$-$
f	\searrow	\nearrow	\nearrow	\searrow

g) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2}, \quad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

h) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \iff -x(x+2) = 0 \iff x_1 = 0, x_2 = -2.$$

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
$\text{sgn } f'$	-	+	+	-
f	\searrow	\nearrow	\nearrow	\searrow

i) Z tabulky vidíme, že funkce má v $x = -2$ lokální minimum a v $x = 0$ lokální maximum.

j) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{-2x - 2}{(x + 1)^4} = \frac{-2}{(x + 1)^3},$$

$$D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

j) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{-2x - 2}{(x + 1)^4} = \frac{-2}{(x + 1)^3},$$
$$D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

k) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

$$f''(x) = 0 \quad \iff \quad -2 = 0,$$

což je nesmysl. Druhá derivace tedy nemá žádný nulový bod.

Nesmíme ovšem zapomenout, že její znaménko se může změnit i v bodech, ve kterých není definována (tj. v „dírách“ jejího definičního oboru).

j) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{-2x - 2}{(x + 1)^4} = \frac{-2}{(x + 1)^3},$$

$$D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

k) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

$$f''(x) = 0 \iff -2 = 0,$$

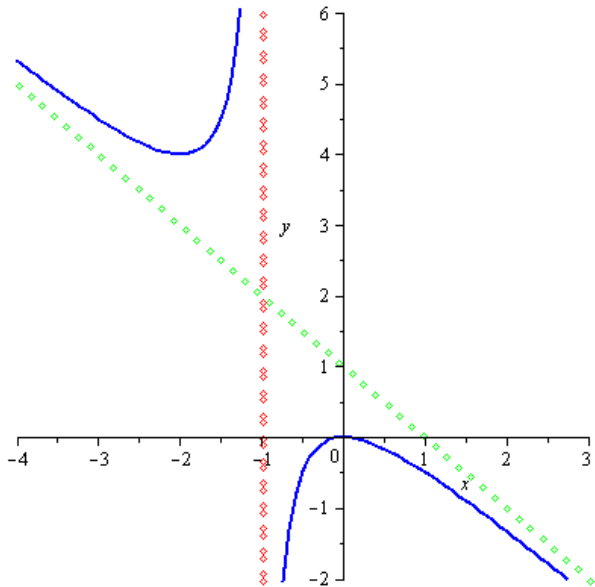
což je nesmysl. Druhá derivace tedy nemá žádný nulový bod.

Nesmíme ovšem zapomenout, že její znaménko se může změnit i v bodech, ve kterých není definována (tj. v „dírách“ jejího definičního oboru).

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$\text{sgn } f''$	+	-
f	∪	∩

- l) Funkce nemá žádný inflexní bod ($-1 \notin D(f)$).
- m) Zrekapitulujme význačné body a spočtěme v nich funkční hodnoty.
- Průsečíky s osami $P_x = P_y = [0, 0]$.
 - Lokální minimum v $x = -2$, $f(-2) = 4$, tedy jde o bod $[-2, 4]$.
 - Lokální maximum v $x = 0$, $f(0) = 0$, tedy jde o bod $[0, 0]$.

n) Nyní zkombinujeme všechny získané informace a obdržíme graf funkce



Obsah

- 1 Použití derivací
 - L'Hospitalovo pravidlo
 - Tečna a normála ke grafu funkce
- 2 Průběh funkce
 - Monotonie a lokální extrémy
 - Konvexnost, konkávnost a inflexní body
 - Asymptoty
 - Průběh funkce – shrnutí
- 3 Příklad
- 4 Globální extrémy
- 5 Wolfram|Alpha

Definice (Absolutní (globální) extrémy)

Bud' $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in [a, b]$ *absolutní maximum (minimum) na intervalu $[a, b]$* , jestliže pro všechna $x \in [a, b]$ platí, že

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)).$$

Definice (Absolutní (globální) extrémy)

Bud' $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in [a, b]$ *absolutní maximum (minimum) na intervalu $[a, b]$* , jestliže pro všechna $x \in [a, b]$ platí, že

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)).$$

Jsou-li nerovnosti pro $x \neq x_0$ ostré, mluvíme o *ostrých* absolutních extrémech funkce na $[a, b]$.

Věta

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Pak funkce f nabývá svého absolutního maxima i minima na intervalu $[a, b]$ a to buď v bodě lokálního extrému ležícího v (a, b) nebo v jednom z krajních bodů $x = a$, $x = b$.

Věta

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Pak funkce f nabývá svého absolutního maxima i minima na intervalu $[a, b]$ a to buď v bodě lokálního extrému ležícího v (a, b) nebo v jednom z krajních bodů $x = a$, $x = b$.

Tvrzení je důsledkem Weierstrassovy věty a obsahuje návod k hledání globálních extrémů spojitých funkcí.

Věta

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Pak funkce f nabývá svého absolutního maxima i minima na intervalu $[a, b]$ a to buď v bodě lokálního extrému ležícího v (a, b) nebo v jednom z krajních bodů $x = a$, $x = b$.

Tvrzení je důsledkem Weierstrassovy věty a obsahuje návod k hledání globálních extrémů spojitých funkcí.

Poznámka

Globální extrémy spojitě funkce f na intervalu $[a, b]$ hledáme takto:

Určíme stacionární body a body uvnitř intervalu $[a, b]$, v nichž neexistuje derivace, pak porovnáme funkční hodnoty v těchto bodech s hodnotami $f(a)$ a $f(b)$.

Příklad

Určete rozměry otevřeného zahradního bazénu se čtvercovým dnem daného objemu 32 m^3 tak, aby se na vyzdění jeho dna a stěn spotřebovalo minimum materiálu. Délka bazénu musí být v rozmezí 2–8 metrů.

Příklad

Určete rozměry otevřeného zahradního bazénu se čtvercovým dnem daného objemu 32 m^3 tak, aby se na vyzdění jeho dna a stěn spotřebovalo minimum materiálu. Délka bazénu musí být v rozmezí 2–8 metrů.

Ze zadaného objemu vyjádříme výšku bazénu

$$V = a^2 \cdot v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{V}{a^2}.$$

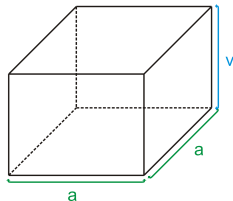
Funkce určující obsah dna a stěn je

$$S = a^2 + 4 \cdot v \cdot a \quad \Rightarrow \quad S(a) = a^2 + \frac{4V}{a},$$

kterou chceme minimalizovat pro $a \in [2, 8]$.

Nejprve najdeme stacionární bod

$$S'(a) = 2a - \frac{4V}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{2V} \quad \stackrel{V=32}{\Rightarrow} \quad a = 4, \quad v = 2.$$





Nyní porovnáme hodnotu funkce objemu v nalezeném bodě $a = 4$ s hodnotami v krajních bodech, tj.

$$S(a) = a^2 + \frac{4 \cdot 32}{a} \Rightarrow V(2) = 68, \quad V(4) = 48, \quad V(8) = 80.$$

Globální minimum je tedy v nalezeném stacionárním bodě a optimální rozměry bazénu splňujícího zadání jsou $4 \times 4 \times 2$.

Ověření, že jde skutečně o globální extrém, je samozřejmě možné i postupem z průběhu funkce, ten ale bývá většinou zdlouhavější. Zde např. ověříme, že objem na obě strany od stacionárního bodu roste a nižší hodnota tedy jinde být nemůže.

a	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
$\text{sgn } S'$	$-$	$+$
S		

Obsah

- 1 Použití derivací
 - L'Hospitalovo pravidlo
 - Tečna a normála ke grafu funkce
- 2 Průběh funkce
 - Monotonie a lokální extrém
 - Konvexnost, konkávnost a inflexní body
 - Asymptoty
 - Průběh funkce – shrnutí
- 3 Příklad
- 4 Globální extrém
- 5 Wolfram|Alpha

● Tečna. ⊗

tangent to $y=x^2$ at 2

● Normála. ⊗

normal to $y=x^{2/3}$ at 8

● Limita. ⊗

limit $(\ln^5(x))/(x-3)$ as $x \rightarrow \text{infinity}$

● Lokální extrémy. ⊗

local extrema of $(x-1)/(x^2+1)$

● Inflexní body. ⊗

inflection points of $(x-1)/(x^2+1)$

● Asymptoty. ⊗

asymptotes $y=(x^2-1)/(5-x)$

● Graf funkce. ⊗ ⊗

plot $y=(x^2-3)/(x^2+9)$ plot $y=(x-1)/(x^2+1)$ for x from -3 to 4 and y from -1 to 0.5