Aplikace derivace a průběh funkce

Petr Hasil

Přednáška z matematiky

MENDELU Agronomická fakulta

Mendelova univerzita v Brně

MENDELU Lesnická a dřevařská fakulta

Obsah

Věta (L'Hospitalovo pravidlo)

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^*$ *a nechť funkce* f *a* g *jsou definované v nějakém ryzím okolí bodu* α*, mají zde derivaci a* $g'(x) \neq 0$*. Nechť dále platí buď*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0,$$

nebo

$$\lim_{x\to\alpha} |g(x)| = \infty.$$

Pak platí

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pokud limita na pravé straně existuje. Stejné tvrzení platí i pro obě jednostranné limity.

Poznámka

- L'Hospitalovo pravidlo můžeme použít opakovaně.
- Lze ho použít přímo na limity typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$.
- Vhodnou úpravou lze převést neurčité výrazy typu $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^∞ a ∞^0 na jeden z typů $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

POZOR!

Při použití L'Hospitalova pravidla nederivujeme výraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ jako podíl, ale derivujeme zvlášť funkci v čitateli a zvlášť funkci ve jmenovateli.

Definice

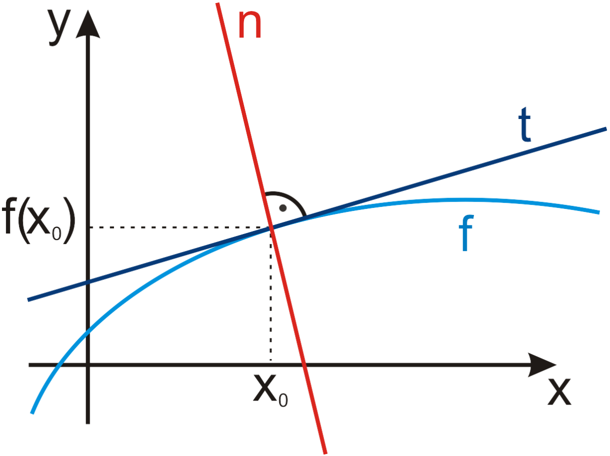
Nechť je $f(x)$ funkce spojitá a má derivaci v bodě $x_0 \in D(f)$. Potom přímku

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

nazýváme *tečna* ke grafu funkce f v bodě x_0 a přímku

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

nazýváme *normála* ke grafu funkce f v bodě x_0 (v případě, že $f'(x_0) \neq 0$).


y
n
t
f(x0)
f
x0
x

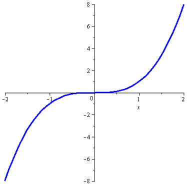
Věta

Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$ a má derivaci na intervalu (a, b). Pak platí

- *Funkce f je v $[a, b]$ konstantní právě tehdy, když $\forall x \in (a, b) : f'(x) = 0$.*
- *Je-li $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, pak je funkce f na intervalu $[a, b]$ rostoucí.*
- *Je-li $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$, pak je funkce f na intervalu $[a, b]$ klesající.*

Pozor!

Obrácené tvrzení neplatí. Např. funkce $f(x) = x^3$ je na celém $\mathbb{R}$ rostoucí, ale v bodě $x = 0$ má nulovou derivaci.



Definice

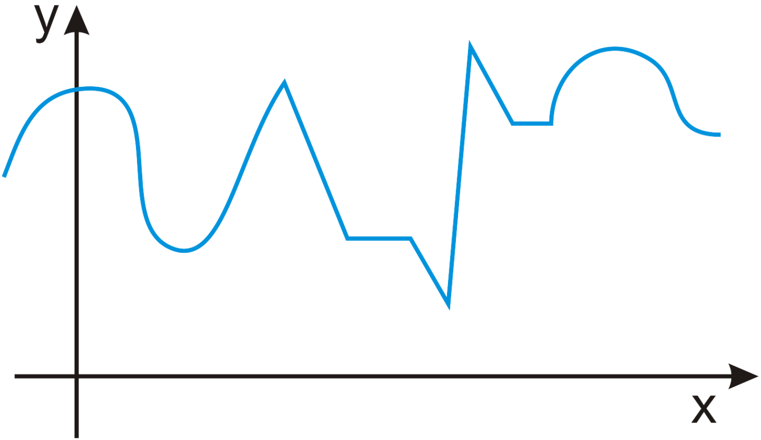
Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *lokální maximum (minimum)*, jestliže pro každé x v nějakém okolí bodu x_0 platí

$$f(x) \leq f(x_0), \qquad \big(f(x) \geq f(x_0)\big).$$

Pokud pro $x \neq x_0$ platí předchozí nerovnosti ostře, mluvíme o ostrém lokálním maximu (minimu).
Souhrnně nazýváme (ostré) lokální maximum a minimum *(ostré) lokální extrémy*.

Věta

Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém, pak $f'(x_0) = 0$, nebo $f'(x_0)$ neexistuje.


y
x

Definice

Je-li $f'(x_0) = 0$, pak bod x_0 nazýváme *stacionární bod* funkce f.

Věta

Nechť je funkce f spojitá v bodě x_0 a nechť existuje její derivace v nějakém prstencovém okolí tohoto bodu. Označme L levé prstencové okolí bodu x_0 a R pravé prstencové okolí bodu x_0.

- *Jestliže platí*

$$f'(x) > 0 \text{ pro } x \in L \text{ a } f'(x) < 0 \text{ pro } x \in R,$$

  pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

- *Jestliže platí*

$$f'(x) < 0 \text{ pro } x \in L \text{ a } f'(x) > 0 \text{ pro } x \in R,$$

  pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Věta

Nechť $f'(x_0) = 0$ *a* $f''(x_0) \neq 0$. *Pak má funkce* f *v bodě* x_0 *lokální extrém a to*

- *lokální maximum, jestliže* $f''(x_0) < 0$,
- *lokální minimum, jestliže* $f''(x_0) > 0$.

Příklad

Najděte lokální extrémy funkce $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Řešení:

(i) $f'(x) = -2x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$

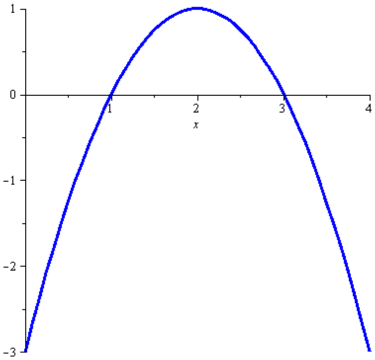
x	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
sgn f'	$+$	$-$
f	$\nearrow$	$\searrow$

Funkce f má tedy v $x = 2$ lokální maximum s hodnotou $f(2) = 1$.

(ii) $f'(x) = -2x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$

$f''(x) = -2 \quad \Rightarrow f''(2) = -2 < 0.$

Funkce f má tedy v $x = 2$ lokální maximum s hodnotou $f(2) = 1$.



Definice

Funkci nazveme *konvexní (konkávní)* v bodě x_0, jestliže její graf leží v prstencovém okolí bodu x_0 nad (pod) tečnou v tomto bodě.
Funkci nazveme konvexní (konkávní) na intervalu I, jestliže je konvexní (konkávní) v každém bodě tohoto intervalu.

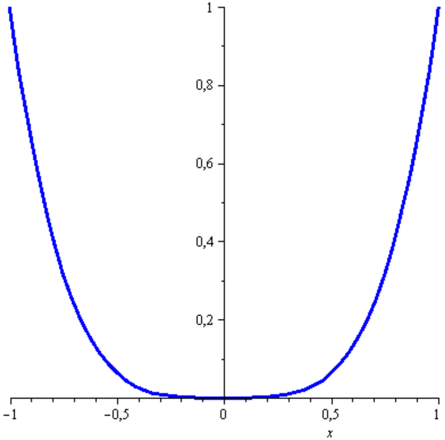
Věta

Nechť funkce $f(x)$ má derivaci na intervalu (a, b). Pak platí

- *jestliže $\forall x \in (a, b)$ platí $f''(x) > 0$, pak je funkce f konvexní na intervalu (a, b),*
- *jestliže $\forall x \in (a, b)$ platí $f''(x) < 0$, pak je funkce f konkávní na intervalu (a, b).*

Poznámka

Opačné tvrzení neplatí. Např. funkce $f(x) = x^4$ je konvexní na $\mathbb{R}$, ale $f''(0) = 0$.



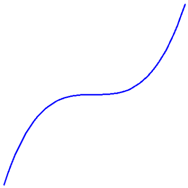
Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *inflexní bod*, jestliže v bodě x_0 existuje tečna ke grafu funkce a f'' zde mění znaménko (tj. graf funkce se mění z konvexního na konkávní, nebo opačně).

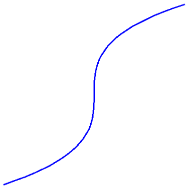
Poznámka

Funkce f může mít inflexní bod v bodě x_0, ve kterém

- $f''(x_0) = 0$,
- $f''(x_0)$ neexistuje.



Obr.: x^3



Obr.: $\sqrt[3]{x}$

Věta

Nechť má funkce f v bodě x_0 spojitou první derivaci a nechť existuje ryzí okolí bodu x_0, v němž existuje druhá derivace funkce f. Označme L levé ryzí okolí bodu x_0 a R pravé ryzí okolí bodu x_0. Pak jestliže

$$f''(x) > 0 \forall x \in L \text{ a } f''(x) < 0 \quad \forall x \in R \qquad \textit{nebo naopak,}$$

pak má funkce f v bodě x_0 inflexní bod.

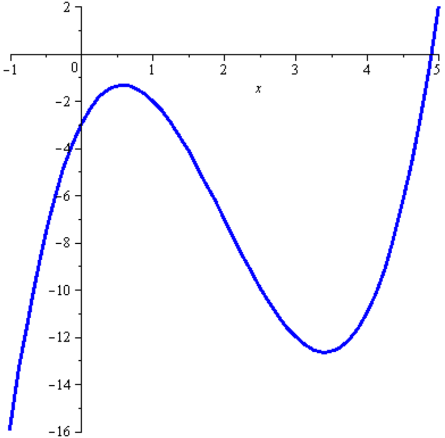
Příklad

Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ je funkce $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x - 3$ konkávní/konvexní a najděte její inflexní body.

Řešení: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 6, \quad f''(x) = 6x - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$

x	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
sgn f''	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$

Funkce je konkávní pro $x \in (-\infty, 2)$ konvexní pro $x \in (2, \infty)$ a v $x = 2$ má inflexní bod s hodnotou $f(2) = -7$.


2
-1
0
1
2
3
4
5
x
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16

Definice

Přímku, která je tečnou ke grafu funkce f v některém nevlastním bodě, nazýváme *asymptota* funkce f.

Věta

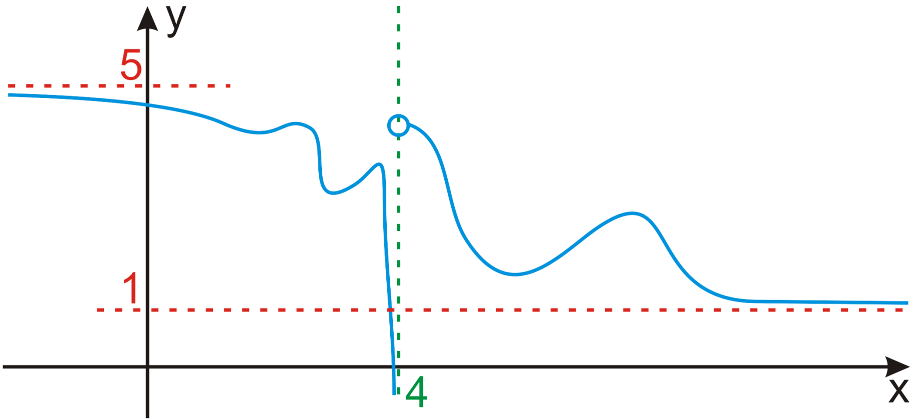
Funkce má

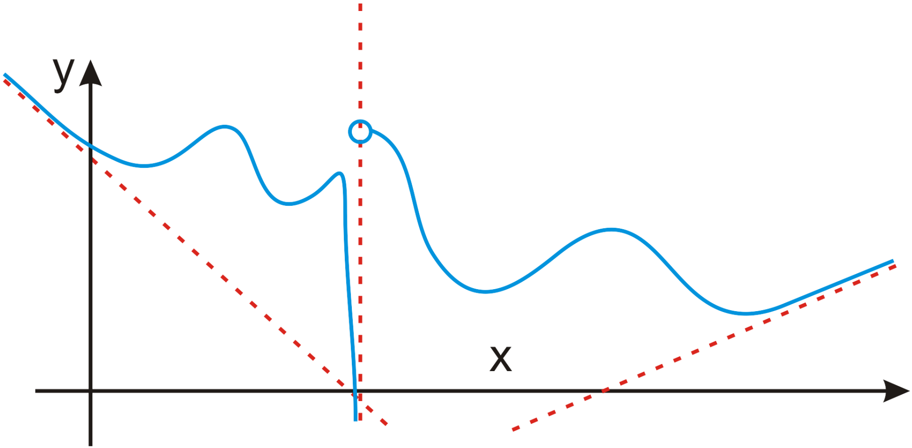
- *asymptotu bez směrnice* $x = x_0$ *právě tehdy, když má v bodě* x_0 *nevlastní limitu zleva nebo zprava,*
- *asymptotu se směrnicí* $y = ax + b$ *pro* $x \to \pm\infty$ *právě tehdy, když*

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \quad a \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) \in \mathbb{R}.$$

Poznámka

Je-li limita $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$, pak je svislá přímka $x = x_0$ asymptotou bez směrnice funkce f v bodě x_0. Tedy asymptoty bez směrnice hledáme "v dírách" nebo na okraji definičního oboru.


y
5
1
4
x


y
x

Postup při vyšetřování průběhu funkce

(i) *Přímo z funkce*:
- $D(f)$, sudost/lichost, periodičnost, průsečíky s osami, kladnost/zápornost,
- asymptoty (se směrnicí, bez směrnice).

(ii) *Z první derivace*: rostoucí/klesající, lokální extrémy.

(iii) *Z druhé derivace*: konvexní/konkávní, inflexní body.

(iv) *Načrtnutí grafu*: ke všem výše zmíněným bodům dopočítáme funkční hodnoty a zkombinujeme zjištěné informace.

Postupně tedy plníme následující body:

a) definiční obor,
b) sudost/lichost (periodičnost),
c) asymptoty bez směrnice,
d) asymptoty se směrnicí,
e) průsečíky s osami,
f) kladnost/zápornost,

g) první derivaci,
h) kde je f rostoucí/klesající,
i) lokální extrémy,

j) druhou derivaci,
k) kde je f konvexní/konkávní,
l) inflexní body,

m) funkční hodnoty ve významných bodech,
n) načrtneme graf.

Příklad

Vyšetřete průběh funkce
$$f(x) = -\frac{x^2}{x+1}$$

Řešení:

a) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $x + 1 \neq 0$. Proto máme
$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

b) O sudosti/lichosti funkce snadno rozhodneme dosazením $-x$. Poněvadž platí
$$f(-x) = -\frac{x^2}{-x+1} \neq \pm f(x),$$
není zadaná funkce ani lichá, ani sudá (což je vidět už z nesymetrie definičního oboru). Vzhledem k definičnímu oboru je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

c) Asymptoty bez směrnice popisují limitní chování funkce v bodech nespojitosti (nebo na okraji definičního oboru), proto přímým výpočtem ihned dostaneme

$$\lim_{x\to -1^+} -\frac{x^2}{x+1} = -\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{x+1} = -(+\infty) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to -1^-} -\frac{x^2}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} -\frac{x^2}{x+1} = -(-\infty) = \infty.$$

Funkce má jednu svislou asymptotu $x = -1$.

d) Pomocí vzorců určíme asymptoty se směrnicí (pokud existují).

$$a = \lim_{x\to \pm\infty} -\frac{x^2}{x^2+x} = -1,$$
$$b = \lim_{x\to \pm\infty} -\frac{x^2}{x+1} + x = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

Funkce $f(x)$ má tedy v $+\infty$ i $-\infty$ asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = -x + 1$.

e) Určíme průsečíky s osou x ($\Rightarrow y = 0$):

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0,$$

tedy $P_x = [0, 0]$,
a s osou y ($\Rightarrow x = 0$):

$$y = -\frac{0^2}{0+1} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = 0,$$

tedy $P_y = [0, 0] = P_x$.

f) Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
sgn f	$+$	$-$	$-$
f	kladná	záporná	záporná

g) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2}, \quad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

h) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \iff -x(x+2) = 0 \iff x_1 = 0,\ x_2 = -2.$$

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
sgn f'	$-$	$+$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

i) Z tabulky vidíme, že funkce má v $x = -2$ lokální minimum a v $x = 0$ lokální maximum.

j) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{-2x-2}{(x+1)^4} = \frac{-2}{(x+1)^3},$$
$$D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

k) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

$$f''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -2 = 0,$$

což je nesmysl. Druhá derivace tedy nemá žádný nulový bod. Nesmíme ovšem zapomenout, že její znaménko se může změnit i v bodech, ve kterých není definována (tj. v „dírách" jejího definičního oboru).

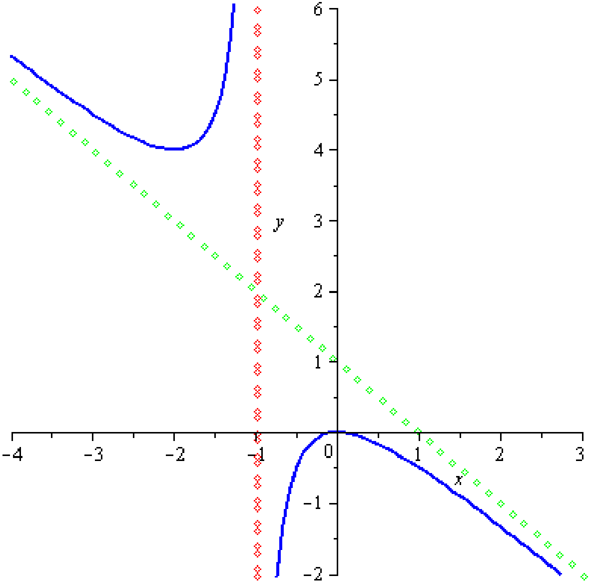
x	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
sgn f''	$+$	$-$
f	$\cup$	$\cap$

l) Funkce nemá žádný inflexní bod ($-1 \notin D(f)$).

m) Zrekapitulujme význačné body a spočtěme v nich funkční hodnoty.

- Průsečíky s osami $P_x = P_y = [0, 0]$.
- Lokální minimum v $x = -2, f(-2) = 4$, tedy jde o bod $[-2, 4]$.
- Lokální maximum v $x = 0, f(0) = 0$, tedy jde o bod $[0, 0]$.

n) Nyní zkombinujeme všechny získané informace a obdržíme graf funkce



Definice (Absolutní (globální) extrémy)

Buď $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in [a, b]$ *absolutní maximum (minimum) na intervalu* $[a, b]$, jestliže pro všechna $x \in [a, b]$ platí, že

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)).$$

Jsou-li nerovnosti pro $x \neq x_0$ ostré, mluvíme o *ostrých* absolutních extrémech funkce na $[a, b]$.

Věta

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Pak funkce f nabývá svého absolutního maxima i minima na intervalu $[a, b]$ a to buď v bodě lokálního extrému ležícího v (a, b) nebo v jednom z krajních bodů $x = a$, $x = b$.

Tvrzení je důsledkem Weierstrassovy věty a obsahuje návod k hledání globálních extrémů spojitých funkcí.

Poznámka

Globální extrémy spojité funkce f na intervalu $[a, b]$ hledáme takto:

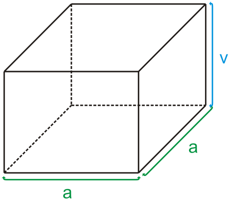
Určíme stacionární body a body uvnitř intervalu $[a, b]$, v nichž neexistuje derivace, pak porovnáme funkční hodnoty v těchto bodech s hodnotami $f(a)$ a $f(b)$.

Příklad

Určete rozměry otevřeného zahradního bazénu se čtvercovým dnem daného objemu $32\,\mathrm{m}^3$ tak, aby se na vyzdění jeho dna a stěn spotřebovalo minimum materiálu. Délka bazénu musí být v rozmezí 2–8 metrů.

Ze zadaného objemu vyjádříme výšku bazénu

$$V = a^2 \cdot v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{V}{a^2}.$$



Funkce určující obsah dna a stěn je

$$S = a^2 + 4 \cdot v \cdot a \quad \Rightarrow \quad S(a) = a^2 + \frac{4V}{a},$$

kterou chceme minimalizovat pro $a \in [2, 8]$.

Nejprve najdeme stacionární bod

$$S'(a) = 2a - \frac{4V}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{2V} \quad \overset{V=32}{\Rightarrow} \quad a = 4, \; v = 2.$$

Nyní porovnáme hodnotu funkce objemu v nalezeném bodě $a = 4$ s hodnotami v krajních bodech, tj.

$$S(a) = a^2 + \frac{4 \cdot 32}{a} \quad \Rightarrow \quad V(2) = 68, \quad V(4) = 48, \quad V(8) = 80.$$

Globální minimum je tedy v nalezeném stacionárním bodě a optimální rozměry bazénu splňujícího zadání jsou $4 \times 4 \times 2$.

Ověření, že jde skutečně o globální extrém, je samozřejmě možné i postupem z průbehu funkce, ten ale bývá většinou zdlouhavější. Zde např. ověříme, že objem na obě strany od stacionárního bodu roste a nižší hodnota tedy jinde být nemůže.

a	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
$\operatorname{sgn} S'$	$-$	$+$
S	$\searrow$	$\nearrow$

- Tečna. ⊛

```
tangent to y=x^2 at 2
```

- Normála. ⊛

```
normal to y=x^(2/3) at 8
```

- Limita. ⊛

```
limit (ln^5(x))/(x-3) as x->infinity
```

- Lokální extrémy. ⊛

```
local extrema of (x-1)/(x^2+1)
```

- Inflexní body. ⊛

```
inflection points of (x-1)/(x^2+1)
```

- Asymptoty. ⊛

```
asymptotes y=(x^2-1)/(5-x)
```

- Graf funkce. ⊛ ⊛

```
plot y=(x^2-3)/(x^2+9)
plot y=(x-1)/(x^2+1) for x from -3 to 4 and y from -1 to 0.5
```