Soustavy lineárních rovnic a determinanty

Petr Hasil

Přednáška z matematiky

MENDELU Agronomická fakulta

Mendelova univerzita v Brně

MENDELU Lesnická a dřevařská fakulta

Obsah

Obsah

Definice (Soustava lineárních rovnic)

Nechť $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rozumíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{SLR}$$

Definice (Soustava lineárních rovnic)

Nechť $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$ rozumíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{SLR}$$

Věta

Řešení soustavy lineárních rovnic (SLR) *rozumíme uspořádanou n-tici reálných čísel $r_1, r_2, \dots, r_n$, po jejichž dosazení za neznámé $x_1, x_2, \dots, x_n$ (v tomto pořadí) do soustavy lineárních rovnic dostaneme ve všech rovnicích identity.*

Definice (Matice soustavy)

- Matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazýváme *maticí soustavy* (SLR).

Definice (Matice soustavy)

- Matici
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
nazýváme *maticí soustavy* (SLR).
- Matici
$$A_r = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$
nazýváme *rozšířenou maticí soustavy* (SLR).

Poznámka

Soustavu (SLR) můžeme zapsat v maticové formě:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

po příslušném označení $Ax = b$.

Definice (Homogenní soustava lineárních rovnic)

Jestliže v soustavě (SLR) platí

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0,$$

nazýváme tuto soustavu *homogenní*.

Definice (Homogenní soustava lineárních rovnic)

Jestliže v soustavě (SLR) platí

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0,$$

nazýváme tuto soustavu *homogenní*. V opačném případě se nazývá soustava *nehomogenní*.

Definice (Homogenní soustava lineárních rovnic)

Jestliže v soustavě (SLR) platí

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0,$$

nazýváme tuto soustavu *homogenní*. V opačném případě se nazývá soustava *nehomogenní*.

Poznámka

Homogenní soustava lineárních rovnic má buď pouze triviální řešení (jestliže $h(A) = n$), nebo nekonečně mnoho řešení (jestliže $h(A) < n$), která lze vyjádřit pomocí $n - h(A)$ nezávislých parametrů.

Definice (Homogenní soustava lineárních rovnic)

Jestliže v soustavě (SLR) platí

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0,$$

nazýváme tuto soustavu *homogenní*. V opačném případě se nazývá soustava *nehomogenní*.

Poznámka

Homogenní soustava lineárních rovnic má buď pouze triviální řešení (jestliže $h(A) = n$), nebo nekonečně mnoho řešení (jestliže $h(A) < n$), která lze vyjádřit pomocí $n - h(A)$ nezávislých parametrů.

Věta (Frobeniova)

Soustava lineárních rovnic $Ax = b$ je řešitelná právě tehdy, když matice soustavy A a rozšířená matice soustavy $A_r = (A|b)$ mají stejnou hodnost.

Počet řešení SLR

Počet řešení SLR

- Jestliže $h(A) \neq h(A_r)$, soustava *nemá řešení*.

Počet řešení SLR

- Jestliže $h(A) \neq h(A_r)$, soustava *nemá řešení*.
- Jestliže $h(A) = h(A_r) = n$, soustava *má právě jedno řešení*.

Počet řešení SLR

- Jestliže $h(A) \neq h(A_r)$, soustava *nemá řešení*.
- Jestliže $h(A) = h(A_r) = n$, soustava *má právě jedno řešení*.
- Jestliže $h(A) = h(A_r) < n$, soustava *má nekonečně mnoho řešení*, která lze vyjádřit pomocí $n - h(A)$ nezávislých parametrů.

Obsah

Definice (Ekvivalentní soustavy lineárních rovnic)

Dvě soustavy lineárních rovnic se nazývají *ekvivalentní*, jestliže mají shodné řešení.

Definice (Ekvivalentní soustavy lineárních rovnic)

Dvě soustavy lineárních rovnic se nazývají *ekvivalentní*, jestliže mají shodné řešení.

Postup

(i) Pomocí GEM převedeme rozšířenou matici soustavy $A_r = (A|b)$ na schodovitý tvar.

Definice (Ekvivalentní soustavy lineárních rovnic)

Dvě soustavy lineárních rovnic se nazývají *ekvivalentní*, jestliže mají shodné řešení.

Postup

(i) Pomocí GEM převedeme rozšířenou matici soustavy $A_r = (A|b)$ na schodovitý tvar.

(ii) Pomocí Frobeniovy věty rozhodneme, zda má soustava řešení.

Definice (Ekvivalentní soustavy lineárních rovnic)

Dvě soustavy lineárních rovnic se nazývají *ekvivalentní*, jestliže mají shodné řešení.

Postup

(i) Pomocí GEM převedeme rozšířenou matici soustavy $A_r = (A|b)$ na schodovitý tvar.

(ii) Pomocí Frobeniovy věty rozhodneme, zda má soustava řešení.

(iii) Je-li soustava řešitelná, přiřadíme schodovité matici soustavu lineárních rovnic. Tato je ekvivalentní s původní soustavou.

Definice (Ekvivalentní soustavy lineárních rovnic)

Dvě soustavy lineárních rovnic se nazývají *ekvivalentní*, jestliže mají shodné řešení.

Postup

(i) Pomocí GEM převedeme rozšířenou matici soustavy $A_r = (A|b)$ na schodovitý tvar.

(ii) Pomocí Frobeniovy věty rozhodneme, zda má soustava řešení.

(iii) Je-li soustava řešitelná, přiřadíme schodovité matici soustavu lineárních rovnic. Tato je ekvivalentní s původní soustavou.

(iv) Postupně řešíme rovnice od poslední a získané výsledky dosazujeme do následujících rovnic. Má-li soustava nekonečně mnoho řešení, zvolíme vhodné proměnné za nezávislé parametry.

Poznámka

Je-li matice A soustavy $Ax = b$ regulární, pak má tato soustava vždy jediné řešení. Toto řešení je možné získat použitím inverzní matice A^{-1}.

Poznámka

Je-li matice A soustavy $Ax = b$ regulární, pak má tato soustava vždy jediné řešení. Toto řešení je možné získat použitím inverzní matice A^{-1}.

$$\begin{aligned} Ax &= b \quad \big/ \xrightarrow{A^{-1}} \\ A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\ Ix &= A^{-1}b \\ x &= A^{-1}b. \end{aligned}$$

Poznámka

Je-li matice A soustavy $Ax = b$ regulární, pak má tato soustava vždy jediné řešení. Toto řešení je možné získat použitím inverzní matice A^{-1}.

$$\begin{aligned} Ax &= b \quad /\xrightarrow{A^{-1}} \\ A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\ Ix &= A^{-1}b \\ x &= A^{-1}b. \end{aligned}$$

Pozor, obě strany rovnice musíme vynásobit maticí ze stejné strany, protože násobení matic není komutativní.

Příklad

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 3 \\
2x + 7y + z &= -2 \\
x + 2y + z &= 4
\end{aligned}
$$

Příklad

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 3\\
2x + 7y + z &= -2\\
x + 2y + z &= 4
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & 7 & 1\\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3\\ -2\\ 4 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -6\\ -1 & 0 & 1\\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}
$$

Příklad

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 3\\
2x + 7y + z &= -2\\
x + 2y + z &= 4
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & 7 & 1\\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3\\ -2\\ 4 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -6\\ -1 & 0 & 1\\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -6\\ -1 & 0 & 1\\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3\\ -2\\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11\\ 1\\ 13 \end{pmatrix}
$$

Příklad

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 7y + z &= -2 \\ x + 2y + z &= 4 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Řešení je tedy $x = -11$, $y = 1$, $z = 13$.

Obsah

Definice (Permutace)

Nechť jsou dána čísla $1, 2, \ldots, n$. *Permutací* těchto prvků rozumíme uspořádanou n-tici, která vznikla jejich přeskládáním.

Definice (Permutace)

Nechť jsou dána čísla $1, 2, \ldots, n$. *Permutací* těchto prvků rozumíme uspořádanou n-tici, která vznikla jejich přeskládáním. *Inverzí* rozumíme záměnu i-tého a j-tého prvku v permutaci.

Definice (Permutace)

Nechť jsou dána čísla $1, 2, \ldots, n$. *Permutací* těchto prvků rozumíme uspořádanou n-tici, která vznikla jejich přeskládáním. *Inverzí* rozumíme záměnu i-tého a j-tého prvku v permutaci.

Poznámka

Počet permutací n-prvkové množiny je $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Např. permutací prvků $1, 2, 3$ je $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$:

$$(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1).$$

Definice (Determinant)

Nechť A je čtvercová matice řádu n. *Determinant* matice A je číslo $\det A = |A| \in \mathbb{R}$,

$$\det A = \sum (-1)^p a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n},$$

kde sčítáme přes všechny permutace $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ sloupcových indexů. Číslo p značí počet inverzí příslušné permutace.

Definice (Determinant)

Nechť A je čtvercová matice řádu n. *Determinant* matice A je číslo $\det A = |A| \in \mathbb{R}$,

$$\det A = \sum (-1)^p a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n},$$

kde sčítáme přes všechny permutace $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ sloupcových indexů. Číslo p značí počet inverzí příslušné permutace.

Poznámka

Podle definice tedy „stačí“ vzít po jednom prvku z každého řádku tak, aby žádné dva nebyly ze stejného sloupce. Tyto prvky mezi sebou vynásobit. Determinant je právě součtem všech těchto součinů. Z toho je vidět, že definice není vhodná pro počítání determinantů matic větších rozměrů.

Výpočet determinantů nižších řádů

- Determinant řádu 1:

$$\det(a_{11}) = a_{11}.$$

Výpočet determinantů nižších řádů

- Determinant řádu 1:

$$\det(a_{11}) = a_{11}.$$

- Determinant řádu 2 – křížové pravidlo:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

Výpočet determinantů nižších řádů

- Determinant řádu 1:

$$\det(a_{11}) = a_{11}.$$

- Determinant řádu 2 – křížové pravidlo:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22}$$

Výpočet determinantů nižších řádů

- Determinant řádu 1:

$$\det(a_{11}) = a_{11}.$$

- Determinant řádu 2 – křížové pravidlo:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Výpočet determinantů nižších řádů

- Determinant řádu 3 – Sarrusova pravidlo

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Výpočet determinantů nižších řádů

- Determinant řádu 3 – Sarrusova pravidlo

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Výpočet determinantů nižších řádů

- Determinant řádu 3 – Sarrusova pravidlo

$$
\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \end{array}
$$

Výpočet determinantů nižších řádů

- Determinant řádu 3 – Sarrusova pravidlo

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}$$

Výpočet determinantů nižších řádů

- Determinant řádu 3 – Sarrusova pravidlo

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13}$$

Výpočet determinantů nižších řádů

- Determinant řádu 3 – Sarrusova pravidlo

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{|ccc|} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$

Výpočet determinantů nižších řádů

- Determinant řádu 3 – Sarrusova pravidlo

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| \\ \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \end{array}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13}$$

Výpočet determinantů nižších řádů

- Determinant řádu 3 – Sarrusova pravidlo

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & \color{blue}{a_{13}} \\ a_{21} & \color{blue}{a_{22}} & \color{red}{a_{23}} \\ \color{blue}{a_{31}} & \color{red}{a_{32}} & a_{33} \end{array} \right| \\ \begin{array}{ccc} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \end{array}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$

$$\color{blue}{-a_{31}a_{22}a_{13}}\color{red}{-a_{11}a_{32}a_{23}}$$

Výpočet determinantů nižších řádů

- Determinant řádu 3 – Sarrusova pravidlo

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \end{array}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Obsah

Definice

Nechť A je čtvercová matice řádu n. Vynecháme-li v matici A i-tý řádek j-tý sloupec, označujeme derminant vzniklé submatice M_{ij} a nazýváme jej *minor* příslušný prvku a_{ij}. Číslo

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

nazýváme *algebraický doplněk* prvku a_{ij}.

Definice

Nechť A je čtvercová matice řádu n. Vynecháme-li v matici A i-tý řádek j-tý sloupec, označujeme derminant vzniklé submatice M_{ij} a nazýváme jej *minor* příslušný prvku a_{ij}. Číslo

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

nazýváme *algebraický doplněk* prvku a_{ij}.

Věta (Laplaceův rozvoj)

Nechť A je čtvercová matice řádu n. Pro libovolný řádek (sloupec) determinantu $\det A$ *platí*

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

$$\left(\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\right).$$

Příklad

Je dán determinant

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}.$$

Příklad

Je dán determinant
$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}.$$

Protože druhý řádek a třetí sloupec obsahuje nulu, je vhodné zvolit pro Laplaceův rozvoj jeden z nich.

Příklad

Je dán determinant

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}.$$

Protože druhý řádek a třetí sloupec obsahuje nulu, je vhodné zvolit pro Laplaceův rozvoj jeden z nich. Zvolme druhý řádek a počítejme:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ \boxed{4} & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix},$$

Příklad

Je dán determinant

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}.$$

Protože druhý řádek a třetí sloupec obsahuje nulu, je vhodné zvolit pro Laplaceův rozvoj jeden z nich. Zvolme druhý řádek a počítejme:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ \boxed{4} & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}, \quad a_{21} = 4,$$

Příklad

Je dán determinant
$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}.$$

Protože druhý řádek a třetí sloupec obsahuje nulu, je vhodné zvolit pro Laplaceův rozvoj jeden z nich. Zvolme druhý řádek a počítejme:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ \boxed{4} & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}, \quad a_{21} = 4, \quad M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix},$$

Příklad

Je dán determinant

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}.$$

Protože druhý řádek a třetí sloupec obsahuje nulu, je vhodné zvolit pro Laplaceův rozvoj jeden z nich. Zvolme druhý řádek a počítejme:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ \boxed{4} & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}, \quad a_{21} = 4, \quad M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix},$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1) \cdot [-12 - (-1)] = 11$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & \boxed{5} & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}, \quad a_{22} = 5, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix},$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1 \cdot [8 - 3] = 5$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & \boxed{5} & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}, \quad a_{22} = 5, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix},$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1 \cdot [8 - 3] = 5$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & \boxed{0} \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}, \quad a_{23} = 0, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix},$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1) \cdot [2 - 9] = 7.$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & \boxed{5} & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}, \quad a_{22} = 5, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix},$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1 \cdot [8 - 3] = 5$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & \boxed{0} \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}, \quad a_{23} = 0, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix},$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1) \cdot [2 - 9] = 7.$$

Odtud

$$\det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 4 \cdot 11 + 5 \cdot 5 + 0 \cdot 7 = 69.$$

Poznámka

- Determinant řádu n se pomocí Laplaceova rozvoje převede na nejvýše n determinantů řádu $n-1$. Přitom cílem je převést determinant vyššího řádu na determinanty řádu 2 nebo 3, které lze snadno spočítat křížovým, resp. Sarrusovým pravidlem.

Poznámka

- Determinant řádu n se pomocí Laplaceova rozvoje převede na nejvýše n determinantů řádu $n-1$. Přitom cílem je převést determinant vyššího řádu na determinanty řádu 2 nebo 3, které lze snadno spočítat křížovým, resp. Sarrusovým pravidlem.
- Např. determinantřádu 5 vede na nejvýše 5 determinantů řádu 4. Z nich každý vede na nejvýše 4 determinanty řádu 3. Celkem tedy determinant řádu 5 vede na nejvýše 20 determinantů řádu 3, popř. na 60 determinantů řádu 2.

Poznámka

- Determinant řádu n se pomocí Laplaceova rozvoje převede na nejvýše n determinantů řádu $n-1$. Přitom cílem je převést determinant vyššího řádu na determinanty řádu 2 nebo 3, které lze snadno spočítat křížovým, resp. Sarrusovým pravidlem.
- Např. determinantřádu 5 vede na nejvýše 5 determinantů řádu 4. Z nich každý vede na nejvýše 4 determinanty řádu 3. Celkem tedy determinant řádu 5 vede na nejvýše 20 determinantů řádu 3, popř. na 60 determinantů řádu 2.
- Proto je velmi vhodné vybírat pro rozvoj řádek, nebo sloupec obsahující co největší počet nulových prvků.

Obsah

Věta (Operace neměnící hodnotu determinantu)

Ponechání jednoho řádku/sloupce beze změny a přičtení jeho násobku k jinému řádku/sloupci nemění hodnotu determinantu.

Věta (Operace neměnící hodnotu determinantu)

Ponechání jednoho řádku/sloupce beze změny a přičtení jeho násobku k jinému řádku/sloupci nemění hodnotu determinantu.

Příklad

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} I \\ II - 2I \\ III + 3I \end{array}$$

Věta (Operace neměnící hodnotu determinantu)

Ponechání jednoho řádku/sloupce beze změny a přičtení jeho násobku k jinému řádku/sloupci nemění hodnotu determinantu.

Příklad

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} I \\ II - 2I \\ III + 3I \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

Věta (Operace neměnící hodnotu determinantu)

Ponechání jednoho řádku/sloupce beze změny a přičtení jeho násobku k jinému řádku/sloupci nemění hodnotu determinantu.

Příklad

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} I \\ II - 2I \\ III + 3I \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-32 + 40) = 8.$$

Věta (Operace měnící hodnotu determinantu)

- *Záměna dvou řádků/sloupců determinantu změní jeho znaménko.*

Věta (Operace měnící hodnotu determinantu)

- *Záměna dvou řádků/sloupců determinantu změní jeho znaménko.*
- *Vynásobení řádku/sloupce nenulovým číslem α zvětší hodnotu determinantu α-krát. (Tj. z řádků/sloupců lze vytýkat před determinant.)*

Věta (Operace měnící hodnotu determinantu)

- *Záměna dvou řádků/sloupců determinantu změní jeho znaménko.*
- *Vynásobení řádku/sloupce nenulovým číslem α zvětší hodnotu determinantu α-krát. (Tj. z řádků/sloupců lze vytýkat před determinant.)*

Příklad

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} \quad \mathit{I} \leftrightarrow \mathit{II}$$

Věta (Operace měnící hodnotu determinantu)

- *Záměna dvou řádků/sloupců determinantu změní jeho znaménko.*
- *Vynásobení řádku/sloupce nenulovým číslem α zvětší hodnotu determinantu α-krát. (Tj. z řádků/sloupců lze vytýkat před determinant.)*

Příklad

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} \quad I \leftrightarrow II \quad = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

Věta (Operace měnící hodnotu determinantu)

- *Záměna dvou řádků/sloupců determinantu změní jeho znaménko.*
- *Vynásobení řádku/sloupce nenulovým číslem α zvětší hodnotu determinantu α-krát. (Tj. z řádků/sloupců lze vytýkat před determinant.)*

Příklad

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} \quad I \leftrightarrow II \quad = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

Věta

Jsou dány čtvercové matice A, B *řádu* n*.*

(i) $|A| = 0 \Leftrightarrow$ *řádky nebo sloupce matice* A *jsou lineárně závislé,*

Věta

Jsou dány čtvercové matice A, B *řádu* n*.*

(i) $|A| = 0 \Leftrightarrow$ *řádky nebo sloupce matice* A *jsou lineárně závislé,*

(ii) *matice* A *obsahuje nulový řádek nebo sloupec* $\Rightarrow |A| = 0$,

Věta

Jsou dány čtvercové matice A, B řádu n.

(i) $|A| = 0 \Leftrightarrow$ *řádky nebo sloupce matice A jsou lineárně závislé,*

(ii) *matice A obsahuje nulový řádek nebo sloupec* $\Rightarrow |A| = 0$,

(iii) $|A^T| = |A|$,

Věta

Jsou dány čtvercové matice A, B řádu n.

(i) $|A| = 0 \Leftrightarrow$ *řádky nebo sloupce matice A jsou lineárně závislé,*

(ii) *matice A obsahuje nulový řádek nebo sloupec* $\Rightarrow |A| = 0$,

(iii) $|A^T| = |A|$,

(iv) *jestliže je* $|A| \neq 0$, *pak* $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$,

Věta

Jsou dány čtvercové matice A, B řádu n.

(i) $|A| = 0 \Leftrightarrow$ *řádky nebo sloupce matice A jsou lineárně závislé,*

(ii) *matice A obsahuje nulový řádek nebo sloupec* $\Rightarrow |A| = 0$,

(iii) $|A^T| = |A|$,

(iv) *jestliže je* $|A| \neq 0$, *pak* $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$,

(v) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$,

Věta

Jsou dány čtvercové matice A, B řádu n.

(i) $|A| = 0 \Leftrightarrow$ *řádky nebo sloupce matice A jsou lineárně závislé,*

(ii) *matice A obsahuje nulový řádek nebo sloupec* $\Rightarrow |A| = 0$,

(iii) $|A^T| = |A|$,

(iv) *jestliže je* $|A| \neq 0$, *pak* $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$,

(v) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$,

(vi) *determinant matice ve schodovitém tvaru je roven součinu prvků na její hlavní diagonále.*

Obsah

Pomocí determinantů je možné počítat *vektorový součin* dvou vektorů délky tři. V postupu jsou využity směrové elementy pro jednotlivé osy, tedy postupně pro osy x, y a z jde o

$$i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Na rozdíl od skalárního součinu, kdy je výsledkem skalár (číslo), výsledkem vektorového součinu je opět vektor. Tento výsledný vektor je kolmý k oběma násobeným vektorům a jeho směr lze určit podle pravidla pravé ruky. Představíme si, jak násobené vektory určují rovinu a vycházejí z jednoho bodu. Pak kolmý směr je z tohoto výchozího bodu nahoru nebo dolů s ohledem na danou rovinu. Uchopíme-li tuto osu do pravé ruky tak, aby prsty směřovaly od prvního násobeného vektoru k druhému, potom vztyčený palec ukazuje směr výsledného vektoru.

Vektorový součin se značí $u \times v$ a z popisu výše je zřejmé, že záleží na pořadí v jakém násobíme, protože při jeho změně směřuje výsledný vektor přesně na opačnou stranu.

Samotný postup si nejsnadněji ukážeme na konkrétním příkladu.

Příklad

Jsou dány vektory $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ a $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Vypočítejte $u \times v$ a $v \times u$.

Pro výpočet vektorového součinu sestavíme determinant, kde v prvním řádku budou směrové elementy i, j, k, ve druhém řádku bude první násobený vektor a na posledním řádku bude druhý násobený vektor. Tento determinant vypočítáme pomocí Sarrusova pravidla, tj.

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 7i - 11j + 5k = 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 11 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Podobně vypočítáme druhé pořadí násobení, tj.

$$v \times u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -7i + 11j - 5k = -7\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 11\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Obsah

Uvažujme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých $Ax = b$. Matice A takovéto soustavy je tedy čtvercová matice řádu n. Jestliže je determinant matice A nenulový, tedy soustava $Ax = b$ má právě jedno řešení, lze použít k jejímu vyřešení tzv. Cramerovo pavidlo. Jeho výhodou je, že je možné spočítat libovolnou neznámou bez znalosti ostatních.

Uvažujme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých $Ax = b$. Matice A takovéto soustavy je tedy čtvercová matice řádu n. Jestliže je determinant matice A nenulový, tedy soustava $Ax = b$ má právě jedno řešení, lze použít k jejímu vyřešení tzv. Cramerovo pavidlo. Jeho výhodou je, že je možné spočítat libovolnou neznámou bez znalosti ostatních.

Věta (Cramerovo pravidlo)

Nechť je A čtvercová regulární matice řádu n. Potom má soustava lineárních rovnic $Ax = b$ jediné řešení x, pro jehož i-tou složku platí

$$x_i = \frac{D_i}{D},$$

kde $D = \det A$ a D_i je determinant matice řádu n vzniklé z matice A náhradou jejího i-tého sloupce za sloupec pravých stran b.

Příklad

Určete hodnotu neznámé proměnné x_2 ze soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Příklad

Určete hodnotu neznámé proměnné x_2 ze soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Řešíme tedy soustavu lineárních rovnic $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Příklad

Určete hodnotu neznámé proměnné x_2 ze soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Řešíme tedy soustavu lineárních rovnic $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pro výpočet neznámé x_2 je nutné určit determinanty D a D_2:

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

Protože je det $A \neq 0$, lze použít Cramerov pravidlo.

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -11.$$

Protože je $\det A \neq 0$, lze použít Cramerov pravidlo.

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -11.$$

Tedy $x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-11}{-5} = \frac{11}{5}$.

Obsah

Příklad

Vyřešte soustavu lineárních rovnic.

$$
\begin{aligned}
x + 3y + z &= 2,\\
2x + 2y - z &= -1,\\
2x + 5y + 3z &= 8.
\end{aligned}
$$

Příklad

Vyřešte soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 2, \\ 2x + 2y - z &= -1, \\ 2x + 5y + 3z &= 8. \end{aligned}$$

Řešení:

$$x = 2, y = -1, z = 3.$$

Příklad

Vyřešte soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 2, \\ 2x + 2y + 6z &= -1, \\ 2x + 5y + 3z &= 8. \end{aligned}$$

Příklad

Vyřešte soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 2, \\ 2x + 2y + 6z &= -1, \\ 2x + 5y + 3z &= 8. \end{aligned}$$

Řešení: SLR nemá řešení.

Příklad

Vyřešte soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 2,\\ 2x + 2y + 6z &= 20,\\ 2x + 5y + 3z &= 8. \end{aligned}$$

Příklad

Vyřešte soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 2,\\ 2x + 2y + 6z &= 20,\\ 2x + 5y + 3z &= 8. \end{aligned}$$

Řešení:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 - 4p \\ p - 4 \\ p \end{pmatrix}, p \in \mathbb{R}.$$

Příklad

Vypočtěte determinant.

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Příklad

Vypočtěte determinant.

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Řešení:

$$25.$$

Příklad

Určete neznámou x_2 ze SLR.

$$\begin{aligned}
-2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1,\\
3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 3,\\
2x_1 - 2x_2 + x_4 &= 0,\\
x_1 + 2x_2 - 2x_4 &= 1.
\end{aligned}$$

Příklad

Určete neznámou x_2 ze SLR.

$$\begin{aligned} -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 3, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Řešení:

$$x_2 = 2.$$

Obsah

Příklad

Mějme dán zjednodušený model populace jistého modrého ptáčka (lat. *Ptacchus modrus*). Populace je rozdělena do čtyř věkových skupin – vajíčko, mládě v hnízdě, létající mládě a dospělý jedinec. Je známo, že bývá zničeno sedm vajíček ze šestnácti, osmina mláďat v hnízdě uhyne a další osmina zemře při pokusu o první let. Z létajících mláďat se dospělosti dožijí tři ze čtyř a pár dospělých ptáčků přivede na svět průměrně 32 vajíček. Napište matici modelu, určete přírůstek populace a výsledný poměr mezi věkovými skupinami.

Příklad

Mějme dán zjednodušený model populace jistého modrého ptáčka (lat. *Ptacchus modrus*). Populace je rozdělena do čtyř věkových skupin – vajíčko, mládě v hnízdě, létající mládě a dospělý jedinec. Je známo, že bývá zničeno sedm vajíček ze šestnácti, osmina mláďat v hnízdě uhyne a další osmina zemře při pokusu o první let. Z létajících mláďat se dospělosti dožijí tři ze čtyř a pár dospělých ptáčků přivede na svět průměrně 32 vajíček. Napište matici modelu, určete přírůstek populace a výsledný poměr mezi věkovými skupinami.

Řešení: Leslieho matice je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 16 \\ \frac{9}{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Přírůstek a výsledný poměr populace získáme pomocí tzv. vlastních čísel a vlastních vektorů. Protože nás zajímá jen algoritmické řešení daného problému, nebudeme se zabývat teorií na pozadí.

Přírůstek a výsledný poměr populace získáme pomocí tzv. vlastních čísel a vlastních vektorů. Protože nás zajímá jen algoritmické řešení daného problému, nebudeme se zabývat teorií na pozadí.

Vlastní čísla získáme tak, že od každého prvku na hlavní diagonále Leslieho matice odečteme neznámou λ a spočítáme determinant. Determinantem je polynom s proměnnou λ a jeho kořeny jsou právě vlastní čísla naší matice. Z nich nás zajímá pouze jediné – největší reálné. To udává přírůstek dané populace.

Přírůstek a výsledný poměr populace získáme pomocí tzv. vlastních čísel a vlastních vektorů. Protože nás zajímá jen algoritmické řešení daného problému, nebudeme se zabývat teorií na pozadí.

Vlastní čísla získáme tak, že od každého prvku na hlavní diagonále Leslieho matice odečteme neznámou λ a spočítáme determinant. Determinantem je polynom s proměnnou λ a jeho kořeny jsou právě vlastní čísla naší matice. Z nich nás zajímá pouze jediné – největší reálné. To udává přírůstek dané populace.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 16 \\ \frac{9}{16} & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - \left(\frac{3}{2}\right)^4 .$$

Přírůstek a výsledný poměr populace získáme pomocí tzv. vlastních čísel a vlastních vektorů. Protože nás zajímá jen algoritmické řešení daného problému, nebudeme se zabývat teorií na pozadí.

Vlastní čísla získáme tak, že od každého prvku na hlavní diagonále Leslieho matice odečteme neznámou λ a spočítáme determinant. Determinantem je polynom s proměnnou λ a jeho kořeny jsou právě vlastní čísla naší matice. Z nich nás zajímá pouze jediné – největší reálné. To udává přírůstek dané populace.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 16 \\ \frac{9}{16} & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - \left(\frac{3}{2}\right)^4 .$$

Tedy řešíme rovnici $\lambda^4 - \left(\frac{3}{2}\right)^4 = 0$. Ta má pouze dva reálné kořeny a to $-\frac{3}{2}$ a $\frac{3}{2}$. Větší jsou $\frac{3}{2} = 1,5$, takže po jednom období bude mít populace $1,5$ násobek Ptacchusů.

Přírůstek a výsledný poměr populace získáme pomocí tzv. vlastních čísel a vlastních vektorů. Protože nás zajímá jen algoritmické řešení daného problému, nebudeme se zabývat teorií na pozadí.

Vlastní čísla získáme tak, že od každého prvku na hlavní diagonále Leslieho matice odečteme neznámou λ a spočítáme determinant. Determinantem je polynom s proměnnou λ a jeho kořeny jsou právě vlastní čísla naší matice. Z nich nás zajímá pouze jediné – největší reálné. To udává přírůstek dané populace.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 16 \\ \frac{9}{16} & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - \left(\frac{3}{2}\right)^4.$$

Tedy řešíme rovnici $\lambda^4 - \left(\frac{3}{2}\right)^4 = 0$. Ta má pouze dva reálné kořeny a to $-\frac{3}{2}$ a $\frac{3}{2}$. Větší jsou $\frac{3}{2} = 1,5$, takže po jednom období bude mít populace $1,5$ násobek Ptacchusů. Populace tedy roste s přírůstkem 50%.

Nyní zbývá určit výsledné složení populace. To udává vlastní vektor příslušný již použitému (dominantnímu) vlastnímu číslu. Získáme ho jako řešení homogenní soustavy lineárních rovnic dané Leslieho maticí, ve které od každého prvku na hlavní diagonále odečteme příslušné vlastní číslo.

Nyní zbývá určit výsledné složení populace. To udává vlastní vektor příslušný již použitému (dominantnímu) vlastnímu číslu. Získáme ho jako řešení homogenní soustavy lineárních rovnic dané Leslieho maticí, ve které od každého prvku na hlavní diagonále odečteme příslušné vlastní číslo.

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 16 \\ \frac{9}{16} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Nyní zbývá určit výsledné složení populace. To udává vlastní vektor příslušný již použitému (dominantnímu) vlastnímu číslu. Získáme ho jako řešení homogenní soustavy lineárních rovnic dané Leslieho maticí, ve které od každého prvku na hlavní diagonále odečteme příslušné vlastní číslo.

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 16 \\ \frac{9}{16} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -\tfrac{3}{2}x_1 + 16x_4 &= 0 \\ \tfrac{9}{16}x_1 - \tfrac{3}{2}x_2 &= 0 \\ \tfrac{3}{4}x_2 - \tfrac{3}{2}x_3 &= 0 \\ \tfrac{3}{4}x_3 - \tfrac{3}{2}x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na jednom parametru:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{32}{3}p \\ 4p \\ 2p \\ p \end{pmatrix}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na jednom parametru:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{32}{3}p \\ 4p \\ 2p \\ p \end{pmatrix}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Nám stačí kterékoli nenulové z nich. Zvolme tedy např. parametr $p = 1$. Tím získéme jediné řešení (jediný vlastní vektor), jehož složky udávají poměr složení ke kterému populace směřuje, tedy

$$\tfrac{32}{3} : 4 : 2 : 1.$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na jednom parametru:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{32}{3}p \\ 4p \\ 2p \\ p \end{pmatrix}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Nám stačí kterékoli nenulové z nich. Zvolme tedy např. parametr $p = 1$. Tím získéme jediné řešení (jediný vlastní vektor), jehož složky udávají poměr složení ke kterému populace směřuje, tedy

$$\frac{32}{3} : 4 : 2 : 1.$$

Srozumitelnější je samozřejmě udávat výsledné složení v procentech. Nejprve se zbavíme zlomku – celý vektor vynásobíme trojkou $\Rightarrow 32 : 12 : 6 : 3$, poté vydělíme jejich součtem a vynásobíme stovkou (tj. krát $\frac{100}{53}$). Odtud po zaokrouklení získáme složení populace v procentech:

$$60 : 23 : 11 : 6.$$

Tedy na 60 vajíček připadá 23 mláďat v hnízdě, 11 mláďat letců a 6 dospělých.

Obsah

- Řešení soustavy lineárních rovnic. ⊛ ⊛

```
solve 2x+3y-z=2,5x-y-4z=7,x-y+6z=1
solve x1+3x2-5x3+x4=12,2x1-x2+x3-x4=-5,x3-5x4=1
```

- Výpočet determinantu. ⊛

```
det{(2,-1,1,3),(6,2,0,1),(-2,5,3,1),(2,2,0,1)}
```

- Výpočet vlastních čísel matice. ⊛

```
eigenvalues{(0,0,0,16),(9/16,0,0,0),(0,3/4,0,0),(0,0,3/4,0)}
```

- Výpočet vlastních vektorů matice. ⊛

```
eigenvectors{(0,0,0,16),(9/16,0,0,0),(0,3/4,0,0),(0,0,3/4,0)}
```