

Momenty setrvačnosti průřezů

- použití určitých integrálů v Technické mechanice

Dana Říhová, Pavla Kotásková

Mendelu Brno

Perspektivy krajiného managementu - inovace krajinářských disciplín

reg.č. CZ.1.07/2.2.00/15.0080



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- 1 Momenty setrvačnosti průřezů
- 2 Steinerova věta
- 3 Momenty setrvačnosti základních průřezů
 - Obdélník
 - Ověření Steinerovy věty
 - Čtverec
 - Dutý obdélník
 - Pravoúhlý trojúhelník
 - Rovnoramenný trojúhelník
 - Čtvrtek
 - Půlkruh
 - Kruh
 - Mezikruží
- 4 Neurčitý integrál - vlastnosti, vzorce, integrační metody
- 5 Určitý integrál - vlastnosti, výpočet

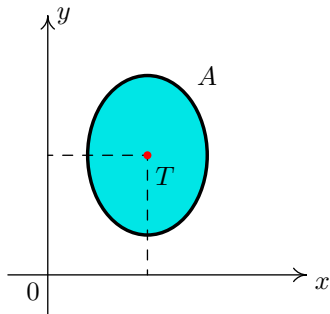


Jakob Steiner
švýcarský matematik - geometr

Momenty setrvačnosti průřezů

Momenty setrvačnosti průřezu s plochou A k ose x a k ose y

$$I_x = \int_A y^2 \, dA, \quad I_y = \int_A x^2 \, dA$$



Momenty setrvačnosti k osám **procházejícím těžištěm** se nazývají **centrální**.

Souvislost momentů setrvačnosti k rovnoběžným osám

Steinerova věta

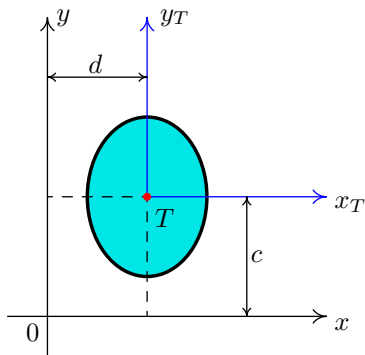
Moment setrvačnosti průřezu k ose, která neprochází těžištěm, se rovná momentu setrvačnosti průřezu k těžišťové ose, která je s ní rovnoběžná, zvětšenému o součin plochy průřezu a čtverce vzdálenosti obou os

$$I_x = I_{x_T} + c^2 A$$

$$I_y = I_{y_T} + d^2 A$$

Steinerova věta představuje vztah mezi momenty setrvačnosti k **těžišťovým** osám a k osám, které jsou s nimi **rovnoběžné**.

Steinerova věta



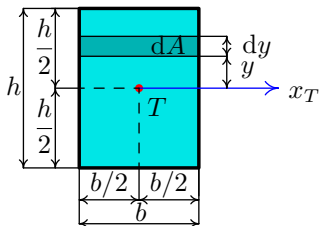
Po úpravě lze **Steinerovu** větu použít ve tvaru

$$I_{x_T} = I_x - c^2 A$$

$$I_{y_T} = I_y - d^2 A$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Obdélník - momenty setrvačnosti k **těžišovým osám**



$$dA = b dy$$

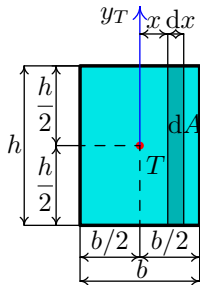
diferenciál plochy proužku

integrační meze y od $-\frac{h}{2}$ po $\frac{h}{2}$

$$\begin{aligned} I_{x_T} &= \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b y^2 dy = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \\ &= \frac{b}{3} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^3 - \left(-\frac{h}{2} \right)^3 \right] = \frac{b}{3} \left[\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right] = \frac{b}{3} \frac{2h^3}{8} = \frac{1}{12} b h^3 \end{aligned}$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Obdélník - momenty setrvačnosti k **těžišřovým osám**



$$dA = h dx$$

diferenciál plochy proužku

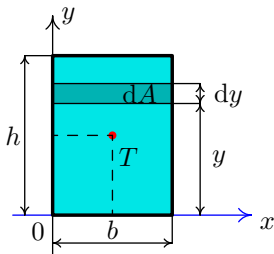
integrační meze x od $-\frac{b}{2}$ po $\frac{b}{2}$

$$\begin{aligned} I_{y_T} &= \int_A x^2 dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} h x^2 dx = h \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 dx = h \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \\ &= \frac{h}{3} \left[\left(\frac{b}{2} \right)^3 - \left(-\frac{b}{2} \right)^3 \right] = \frac{h}{3} \left[\frac{b^3}{8} + \frac{b^3}{8} \right] = \frac{h}{3} \frac{2b^3}{8} = \frac{1}{12} h b^3 \end{aligned}$$

Ověření Steinerovy věty

Obdélník - momenty setrvačnosti k osám procházejícím stranami obdélníka

Moment setrvačnosti vypočteme nejprve podle vzorce.



$$dA = b \, dy$$

diferenciál plochy proužku

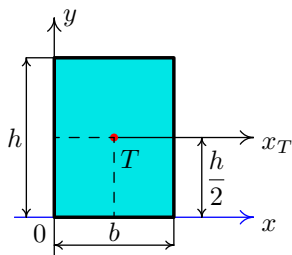
integrační meze y od 0 po h

$$I_x = \int_A y^2 \, dA = \int_0^h b y^2 \, dy = b \int_0^h y^2 \, dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{3} b h^3$$

Ověření Steinerovy věty

Obdélník - momenty setrvačnosti k osám procházejícím stranami obdélníka

Stejný výsledek získáme i výpočtem pomocí Steinerovy věty.



$$I_x = I_{x_T} + c^2 A$$

$$A = bh$$

$$c = \frac{h}{2}$$

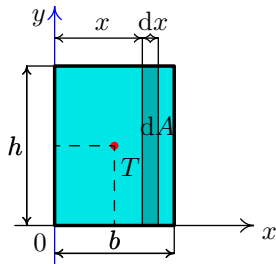
$$I_{x_T} = \frac{1}{12}bh^3$$

$$I_x = I_{x_T} + c^2 A = \frac{1}{12}bh^3 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{1}{12}bh^3 + \frac{1}{4}bh^3 = \frac{1+3}{12}bh^3 = \frac{1}{3}bh^3$$

Ověření Steinerovy věty

Obdélník - momenty setrvačnosti k osám procházejícím stranami obdélníka

Výpočet momentu setrvačnosti podle vzorce.



$$dA = h dx$$

diferenciál plochy proužku

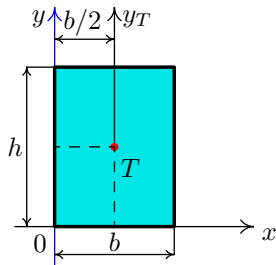
integrační meze x od 0 po b

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_0^b h x^2 dx = h \int_0^b x^2 dx = h \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^b = \frac{1}{3} h b^3$$

Ověření Steinerovy věty

Obdélník - momenty setrvačnosti k osám procházejícím stranami obdélníka

Tentýž výsledek lze získat použitím Steinerovy věty.



$$I_y = I_{y_T} + d^2 A$$

$$A = bh$$

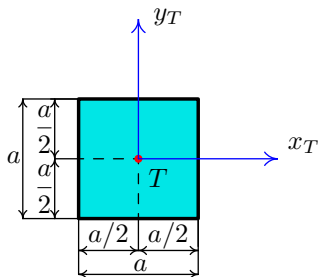
$$d = \frac{b}{2}$$

$$I_{y_T} = \frac{1}{12}hb^3$$

$$I_y = I_{y_T} + d^2 A = \frac{1}{12}hb^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 bh = \frac{1}{12}hb^3 + \frac{1}{4}hb^3 = \frac{1+3}{12}hb^3 = \frac{1}{3}hb^3$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Čtverec - momenty setrvačnosti k těžišťovým osám

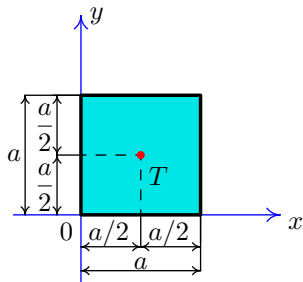


pro čtverec platí
 $b = h = a$

$$I_{x_T} = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}a^4$$
$$I_{y_T} = \frac{1}{12}hb^3 = \frac{1}{12}a^4$$

$$\Rightarrow I_{x_T} = I_{y_T} = \frac{1}{12}a^4$$

Čtverec - momenty setrvačnosti k osám procházejícím stranami čtverce



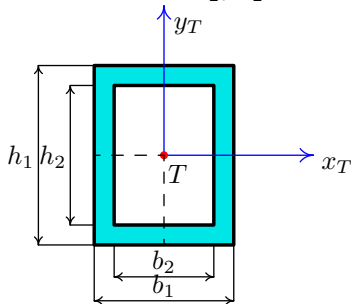
pro čtverec platí
 $b = h = a$

$$I_x = \frac{1}{3}bh^3 = \frac{1}{3}a^4 \quad \Rightarrow \quad I_x = I_y = \frac{1}{3}a^4$$
$$I_y = \frac{1}{3}hb^3 = \frac{1}{3}a^4$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Dutý obdélník - momenty setrvačnosti k těžišťovým osám

Jde o složený obrazec z vnějšího obdélníku o rozměrech b_1 , h_1 a odečítaný vnitřní obdélník o rozměrech b_2 , h_2 .



momenty setrvačnosti obdélníku

$$I_{x_T} = \frac{1}{12}bh^3$$

$$I_{y_T} = \frac{1}{12}hb^3$$

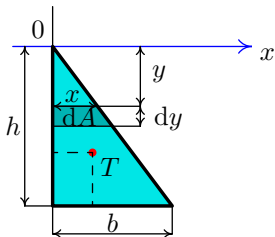
$$I_{x_T} = \frac{1}{12}b_1h_1^3 - \frac{1}{12}b_2h_2^3 = \frac{1}{12}(b_1h_1^3 - b_2h_2^3)$$

$$I_{y_T} = \frac{1}{12}h_1b_1^3 - \frac{1}{12}h_2b_2^3 = \frac{1}{12}(h_1b_1^3 - h_2b_2^3)$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Pravoúhlý trojúhelník - momenty setrvačnosti k osám procházejícím vrcholem

Vypočtený moment setrvačnosti použijeme dále pro odvození centrálního momentu.



$dA = x dy$ diferenciál plochy proužku

z podobnosti trojúhelníků plyne

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{h} \Rightarrow x = \frac{b}{h}y$$

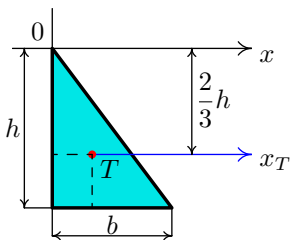
$$dA = x dy = \frac{b}{h}y dy$$

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h \frac{b}{h} y^3 dy = \frac{b}{h} \int_0^h y^3 dy = \frac{b}{h} \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^h = \frac{b}{h} \frac{h^4}{4} = \frac{1}{4}bh^3$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Pravoúhlý trojúhelník - momenty setrvačnosti k těžišťovým osám

K výpočtu použijeme vztah plynoucí ze **Steinerovy věty** a již vypočtený moment setrvačnosti k ose x jdoucí vrcholem trojúhelníku.



$$I_{x_T} = I_x - c^2 A$$

$$A = \frac{1}{2}bh$$

$$c = \frac{2}{3}h$$

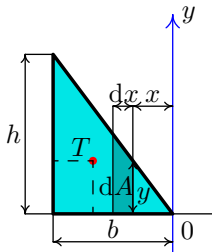
$$I_x = \frac{1}{4}bh^3$$

$$I_{x_T} = I_x - c^2 A = \frac{1}{4}bh^3 - \left(\frac{2}{3}h\right)^2 \frac{1}{2}bh = \frac{1}{4}bh^3 - \frac{2}{9}bh^3 = \frac{9-8}{36}bh^3 = \frac{1}{36}bh^3$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Pravoúhlý trojúhelník - momenty setrvačnosti k osám procházejícím vrcholem

Tento moment setrvačnosti se užije při výpočtu centrálního momentu.



$dA = y dx$ diferenciál plochy proužku

z podobnosti trojúhelníků plyne

$$\frac{y}{h} = \frac{x}{b} \Rightarrow y = \frac{h}{b}x$$

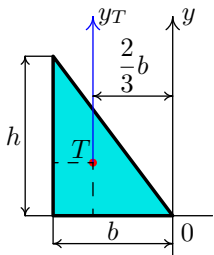
$$dA = y dx = \frac{h}{b}x dx$$

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_0^b \frac{h}{b} x^3 dx = \frac{h}{b} \int_0^b x^3 dx = \frac{h}{b} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^b = \frac{h}{b} \frac{b^4}{4} = \frac{1}{4}hb^3$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Pravoúhlý trojúhelník - momenty setrvačnosti k těžišťovým osám

Použijeme vztah odvozený ze **Steinerovy věty** a již vypočtený moment setrvačnosti k ose y jdoucí vrcholem trojúhelníku.



$$I_{y_T} = I_y - d^2 A$$

$$A = \frac{1}{2}bh$$

$$d = \frac{2}{3}b$$

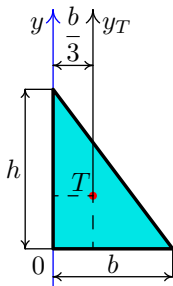
$$I_y = \frac{1}{4}hb^3$$

$$I_{y_T} = I_y - d^2 A = \frac{1}{4}hb^3 - \left(\frac{2}{3}b\right)^2 \frac{1}{2}bh = \frac{1}{4}hb^3 - \frac{2}{9}hb^3 = \frac{9-8}{36}hb^3 = \frac{1}{36}hb^3$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Pravoúhlý trojúhelník - momenty setrvačnosti k osám procházejícím stranami trojúhelníku

Moment setrvačnosti pravoúhlého trojúhelníku k ose, která prochází stranou h , budeme potřebovat pro odvození momentu setrvačnosti rovnoramenného trojúhelníku. Moment vypočteme pomocí **Steinerovy věty**.



$$I_y = I_{y_T} + d^2 A$$

$$A = \frac{1}{2}bh$$

$$d = \frac{1}{3}b$$

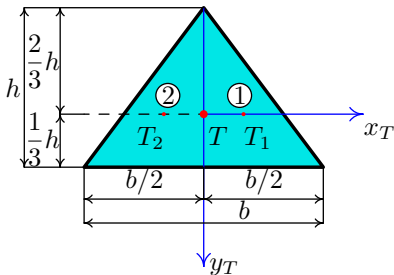
$$I_{y_T} = \frac{1}{36}hb^3$$

$$I_y = I_{y_T} + d^2 A = \frac{1}{36}hb^3 + \left(\frac{1}{3}b\right)^2 \frac{1}{2}bh = \frac{1}{36}hb^3 + \frac{1}{18}hb^3 = \frac{1+2}{36}hb^3 = \frac{1}{12}hb^3$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Rovnoramenný trojúhelník - momenty setrvačnosti k těžišťovým osám

Rovnoramenný trojúhelník se skládá ze dvou symetrických pravoúhlých trojúhelníků. Použijeme momenty setrvačnosti pro pravoúhlý trojúhelník, a to k těžišťové ose x_T a k ose procházející společnou stranou těchto trojúhelníků.



pro pravoúhlý trojúhelník platí

$$I_{x_T} = \frac{1}{36}bh^3$$

$$I_y = \frac{1}{12}hb^3$$

I_y je moment ke straně h trojúhelníku, jež je výškou rovnoramenného trojúhelníku (osa y je totožná s naší osou y_T)

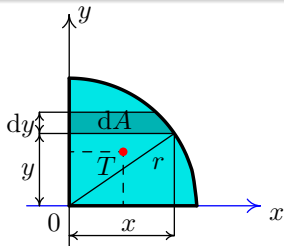
délka spodní strany není b , ale $b/2$

$$I_{x_T} = 2 \left(\frac{1}{36} \left(\frac{b}{2} \right) h^3 \right) = \frac{1}{36}bh^3$$

$$I_{y_T} = 2 \left(\frac{1}{12} h \left(\frac{b}{2} \right)^3 \right) = \frac{1}{48}hb^3$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Čtvrtekruh - momenty setrvačnosti k osám jdoucím "bočními stranami"



$dA = x \, dy$ diferenciál plochy proužku

rovnice kružnice o poloměru r , středu $[0, 0]$
 $x^2 + y^2 = r^2$

$x = \sqrt{r^2 - y^2}$ pro $x \geq 0$

$dA = x \, dy = \sqrt{r^2 - y^2} \, dy$

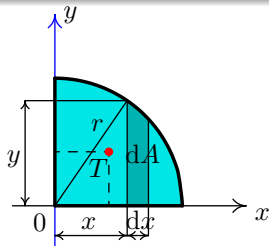
$$I_x = \int_A y^2 \, dA = \int_0^r y^2 \sqrt{r^2 - y^2} \, dy = \left| \begin{array}{l} y = r \sin t \\ dy = r \cos t \, dt \\ (t = \arcsin \frac{y}{r}) \\ y = 0 \Rightarrow t = \arcsin 0 = 0 \\ y = r \Rightarrow t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^2 t \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \, r \cos t \, dt = r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t \, dt =$$

Čtvrtkruh - momenty setrvačnosti k osám jdoucím "bočními stranami"

$$\begin{aligned} &= r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t \sqrt{1 - \sin^2 t} dt = \left| \begin{array}{l} 1 = \sin^2 t + \cos^2 t \\ 1 - \sin^2 t = \cos^2 t \end{array} \right| = \\ &= r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \left| \begin{array}{l} 2 \sin t \cos t = \sin 2t \\ 4 \sin^2 t \cos^2 t = \sin^2 2t \\ \sin^2 t \cos^2 t = \frac{1}{4} \sin^2 2t \end{array} \right| = \frac{1}{4} r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \\ &\left| \begin{array}{l} \sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} \\ \sin^2 2t = \frac{1 - \cos 4t}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{8} r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{1}{8} r^4 \left[t - \frac{1}{4} \sin 4t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{1}{8} r^4 \left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\pi \right) - \left(0 - \frac{1}{4} \sin 0 \right) \right] = \frac{1}{8} r^4 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{1}{16} \pi r^4 \\ I_x &= \frac{1}{16} \pi r^4 \end{aligned}$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Čtvrtkruh - momenty setrvačnosti k osám jdoucím “bočními stranami”



$dA = y dx$ diferenciál plochy proužku

rovnice kružnice o poloměru r , středu $[0, 0]$
 $x^2 + y^2 = r^2$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{pro } y \geq 0$$

$$dA = y dx = \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

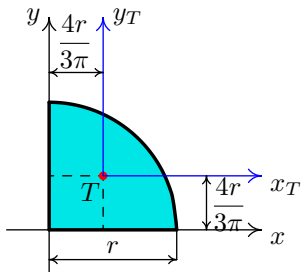
Analogicky jako moment setrvačnosti I_x se vypočte (vyjde stejný určitý integrál)

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_0^r x^2 \sqrt{r^2 - x^2} dx = \left. \begin{array}{l} x = r \sin t \\ dx = r \cos t dt \\ (t = \arcsin \frac{x}{r}) \\ x = 0 \Rightarrow t = \arcsin 0 = 0 \\ x = r \Rightarrow t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^2 t \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} r \cos t dt = \dots = \frac{1}{16} \pi r^4$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Čtvrtekruh - momenty setrvačnosti k těžišťovým osám

Pro výpočet uijeme vztahy plynoucí ze **Steinerovy věty** a již odvozené momenty setrvačnosti k osám x a y .



$$I_{x_T} = I_x - c^2 A$$

$$I_{y_T} = I_y - d^2 A$$

$$I_x = I_y = \frac{1}{16} \pi r^4$$

momenty k osám x a y

$$c = d = \frac{4r}{3\pi}$$

plyne ze souřadnic těžiště čtvrtkruhu

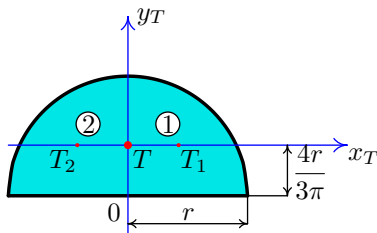
$$A = \frac{1}{4} \pi r^2$$

$$I_{x_T} = I_{y_T} = I_x - c^2 A = I_y - d^2 A = \frac{1}{16} \pi r^4 - \left(\frac{4r}{3\pi} \right)^2 \frac{1}{4} \pi r^2 = r^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right)$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Půlkruh - momenty setrvačnosti k těžišťovým osám

Půlkruh je složený obrazec ze dvou čtvrtkruhů. Použijeme moment setrvačnosti čtvrtkruhu k těžišťové ose x_T a k ose procházející společnou stranou obou čtvrtkruhů (je osou symetrie půlkruhu).



pro čtvrtkruh platí

$$I_{x_T} = r^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right)$$

$$I_y = \frac{1}{16} \pi r^4$$

I_y je moment setrvačnosti k ose procházející "boční stranou" čtvrtkruhu (je to osa symetrie půlkruhu a tudíž těžišťová osa y_T)

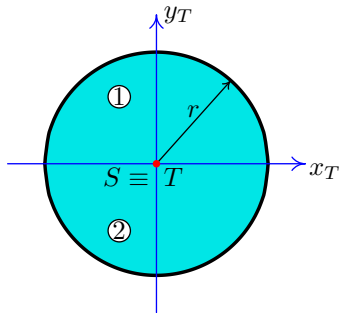
$$I_{x_T} = 2r^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) = r^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right)$$

$$I_{y_T} = 2 \frac{1}{16} \pi r^4 = \frac{1}{8} \pi r^4$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Kruh - momenty setrvačnosti k těžišťovým osám

Kruh je složený obrazec ze dvou půlkruhů. Protože je kruh symetrický podle osy x_T i y_T , bude pro momenty setrvačnosti k těžišťovým osám platit $I_{x_T} = I_{y_T}$.



pro půlkruh platí

$$I_{y_T} = \frac{1}{8}\pi r^4$$

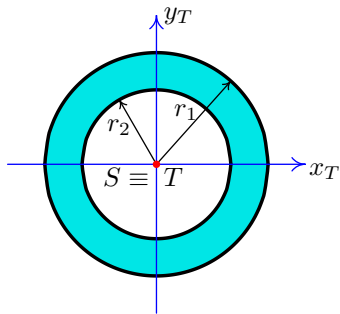
I_{y_T} je moment setrvačnosti k ose symetrie procházející středem S

$$I_{x_T} = I_{y_T} = 2 \frac{1}{8}\pi r^4 = \frac{1}{4}\pi r^4$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Mezikruží - momenty setrvačnosti k těžišťovým osám

Mezikruží je složený obrazec z vnějšího kruhu o poloměru r_1 a odečítaný vnitřní kruh o poloměru r_2 .



pro kruh platí

$$I_{x_T} = I_{y_T} = \frac{1}{4} \pi r^4$$

$$I_{x_T} = I_{y_T} = \frac{1}{4} \pi r_1^4 - \frac{1}{4} \pi r_2^4 = \frac{1}{4} \pi (r_1^4 - r_2^4)$$

Shrnutí základního matematického aparátu potřebného pro výpočet momentů setrvačnosti průřezů

Vlastnosti neurčitého integrálu

- $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
- $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$

Základní vzorce pro integrování

$$1 \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad (n \neq -1) \quad \int 1 dx = x + c$$

$$2 \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$3 \quad \int e^x dx = e^x + c, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$4 \quad \int \sin x dx = -\cos x + c, \quad \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$5 \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$6 \quad \int \frac{1}{A^2 + x^2} dx = \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{x}{A} + c, \quad \int \frac{1}{A^2 - x^2} dx = \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{A+x}{A-x} \right| + c,$$

$$7 \quad \int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}} dx = \operatorname{arcsin} \frac{x}{A} + c, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm B} \right| + c$$

Substituční metoda

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \left| \begin{array}{l} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) dx \end{array} \right| = \int f(t) dt$$

Ze substituční metody plynou následující vzorce:

Integrace funkce s lineární vnitřní složkou

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c$$

Speciální případ zlomku

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

Metoda per partes

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx$$

Určitý integrál - vlastnosti, výpočet

Vlastnosti určitého integrálu

- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
- $\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$

Aditivita vzhledem k mezím

- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

Výměna mezí určitého integrálu

- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \quad (a > b)$
- $\int_a^a f(x) dx = 0, \quad (a = b)$

Newton - Leibnizova formule pro výpočet určitého integrálu

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

F je primitivní funkce k f , tedy neurčitý integrál $\int f(x) dx = F(x) + c$

Metoda per partes pro určitý integrál

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

Substituční metoda pro určitý integrál

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = \left| \begin{array}{l} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) dx \end{array} \right| = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt$$

- 1 Kompan, F., Bartoš, Z., Fabianová, A.: *Technická mechanika*. Bratislava: Príroda, 1990. ISBN 80-07-00269-3.
- 2 Rektorys, K.: *Přehled užití matematiky I*. Praha: Prometheus, 2009. ISBN 978-80-7196-180-2.
- 3 Jarešová, M., Volf, I.: *Integrální počet ve fyzice* [online]. Studijní text pro řešitele FO, Hradec Králové: MAFY, 2008. Dostupné z <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/intpoc.pdf> [cit. 2012-09-05].
- 4 Krejsa, M.: *Momenty setrvačnosti a deviační momenty* [online]. Výukový materiál předmětu Stavební statika, Fakulta stavební VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2009. Dostupné z http://fast10.vsb.cz/krejsa/studium/ss_tema10.pdf [cit. 2012-09-05].
- 5 Vokáč, M.: *Statika 1 - průřezové veličiny* [online]. Výukový materiál předmětu Statika 1, Fakulta architektury ČVUT Praha, 2012. Dostupné z http://15122.fa.cvut.cz/?download=/_/predmet.s1/st1_2.pdf [cit. 2012-09-05].

- 6 Vokáč, M.: *Tabulka základních geometrických obrazců* [online]. Výukový materiál předmětu Statika 1, Fakulta architektury ČVUT Praha, 2009. Dostupné z http://15122.fa.cvut.cz/?download=/_predmet.s1/tabprurezu.pdf [cit. 2012-09-05].

Prezentace byla zpracována v rámci projektu:

Perspektivy krajinného managementu - inovace krajinářských disciplín

reg.č. CZ.1.07/2.2.00/15.0080



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ