

Vektory v algebře

MZLU v Brně

Matematika - 2009/2010

Definice (vektor, vektorový prostor)

Nechť n je pevně zvolené přirozené číslo. Pak **n -členným reálným vektorem** $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ v algebře rozumíme uspořádanou n -tici reálných čísel a_1, a_2, \dots, a_n .

Všechny tyto n -členné vektory (tj. množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel) tvoří (při sčítání a násobení čísly podle následující definice) tzv. **n -rozměrný vektorový prostor V_n** (nad oborem reálných čísel).

Vektory $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ se **sobě rovnají** právě tehdy, když $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$.

Vektor $\vec{o} = (0, \dots, 0)$ nazýváme **nulový vektor**.

Definice (základní operace s vektory)

- 1 **Součtem vektorů** $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ nazýváme vektor $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$.
- 2 **Součinem vektoru** $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ **s číslem** c nazýváme vektor $c\vec{a} = (ca_1, ca_2, \dots, ca_n)$.

Příklad

Pro vektory $\vec{a} = (1, 0, -2)$, $\vec{b} = (3, 2, 0)$ dostáváme

- 1 $\vec{a} + \vec{b} = (4, 2, -2)$
- 2 $3\vec{a} = (3, 0, -6)$

Poznámka

Místo $(-1)\vec{a}$ píšeme $-\vec{a}$; tedy $-\vec{a} = (-a_1, \dots, -a_n)$.

Definice (skalární součin)

Skalárním součinem vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ nazýváme číslo $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$.

Příklad

Pro vektory $\vec{a} = (2, 1, 2)$, $\vec{b} = (1, -1, 4)$ dostáváme
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 = 9$

Definice (lineární závislost a nezávislost)

Říkáme, že vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ z V_n jsou **lineárně závislé**, existují-li taková reálná čísla c_1, \dots, c_k , **z nichž aspoň jedno je různé od nuly**, že

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \dots + c_k\vec{a}_k = \vec{o}.$$

Nejsou-li vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ lineárně závislé, říkáme, že jsou **lineárně nezávislé**.

Příklad

- Vektory $\vec{a} = (1, -1, 0)$, $\vec{b} = (0, -2, 1)$, $\vec{c} = (2, 4, -3)$ jsou lineárně závislé, neboť $2\vec{a} + (-3)\vec{b} + (-1)\vec{c} = \vec{o}$.
- Vektory $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ jsou lineárně nezávislé. (Promyslete!)

Definice (lineární kombinace)

Říkáme, že vektor $\vec{a} \in V_n$ je **lineární kombinací** vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ z V_n , existují-li taková reálná čísla d_1, \dots, d_k , že

$$\vec{a} = d_1\vec{a}_1 + \dots + d_k\vec{a}_k.$$

Věta

Vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ z V_n jsou lineárně závislé právě tehdy, je-li aspoň jeden z nich lineární kombinací ostatních.

Příklad

Vektory $\vec{a}_1 = (3, 1, 2)$, $\vec{a}_2 = (-1, 0, 2)$, $\vec{a}_3 = (7, 2, 2)$ jsou lineárně závislé, neboť $2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - \vec{a}_3 = \vec{0}$. Z toho plyne, že v tomto případě je dokonce každý z nich lineární kombinací ostatních dvou:

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{2}\vec{a}_2 + \frac{1}{2}\vec{a}_3, \quad \vec{a}_2 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3, \quad \vec{a}_3 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2$$