

Matice

MZLU v Brně

Matematika - 2009/2010

Definice

Maticí A typu (m, n) nazýváme schéma mn reálných čísel $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$, sestavených v m řádcích a n sloupcích:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \dots, & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & a_{m3}, & \dots, & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Příklad

Matice typu $(2,4)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 15 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Matice typu $(5,3)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & -7 \\ -2 & -3 & 6 \\ 1 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

Nulovou maticí nazýváme matici, jejíž všechny prvky se rovnají nule.

Je-li $m = n$, pak A se nazývá **čtvercová matice n -tého řádu** (n -tého stupně).

Prvky $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$ matice A tvoří její **hlavní diagonálu**.

Definice (jednotková matice)

Čtvercová matice řádu n , která má na hlavní diagonále jedničky a na ostatních pozicích nuly, se nazývá **jednotková matice řádu n** a značí se I_n nebo I .

Příklad

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definice (transponovaná matice)

Matice

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{21}, & a_{31}, & \dots, & a_{m1} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{32}, & \dots, & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}, & a_{2n}, & a_{m3}, & \dots, & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kteřá vznikne z matice A výměnou řádků za sloupce, se nazývá **transponovaná matice** k matici A [a je typu (n, m)].

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Definice (schodovitý tvar matice)

Řekneme, že matice A je ve **schodovitém tvaru**, jestliže případné nulové řádky jsou uspořádány na konci matice a nenulové jsou uspořádány tak, že každý následující řádek začíná větším počtem nul než řádek předchozí.

Příklad

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

Definice (hodnost matice)

Říkáme, že matice A má **hodnost** h , jestliže mezi vektory tvořenými řádky této matice existuje h lineárně nezávislých vektorů, ale každých $h + 1$ vektorů tvořenými řádky matice jsou již vektory lineárně závislé (h je pak maximální počet lineárně nezávislých vektorů tvořených řádky této matice).

Tedy matice A má hodnost h , existuje-li mezi řádky h lineárně nezávislých řádků a je-li každý další řádek matice jejich lineární kombinací.

Příklad

Matice

$$\begin{pmatrix} 1, & -1, & 0 \\ 0, & -2, & 1 \\ 2, & 4, & -3 \end{pmatrix}$$

má hodnost 2, neboť vektory $\vec{a} = (1, -1, 0)$, $\vec{b} = (0, -2, 1)$ jsou lineárně nezávislé, kdežto $\vec{a} = (1, -1, 0)$, $\vec{b} = (0, -2, 1)$, $\vec{c} = (2, 4, -3)$ jsou lineárně závislé.

(Platí totiž: $2\vec{a} + (-3)\vec{b} + (-1)\vec{c} = \vec{o}$.)

Věta 1

Hodnost matice se nezmění,

- 1 *zaměníme-li pořadí řádků v matici;*
- 2 *vynásobíme-li jeden řádek nenulovým číslem;*
- 3 *přičteme-li k jednomu řádku lineární kombinaci ostatních řádků (tedy také přičteme-li k jednomu řádku nenulový násobek jiného řádku);*
- 4 *vynecháme-li v matici řádek, který je lineární kombinací ostatních řádků matice (tedy také vynecháme-li v matici řádek, který je nenulovým násobkem jiného řádku matice).*

Provedeme-li tedy na matici jednu z těchto úprav, dostaneme matici o stejné hodnoti, jakou měla původní matice.

Věta 2

Hodnosti matice A a transponované matice A^T jsou si rovny.

Poznámka

Podle předchozí věty o transponované matici můžeme provádět úpravy nejen u řádků, ale i u sloupců, aniž se tím změní hodnost matice.

Věta 3

Pro hodnost h matice A typu (m, n) platí $h \leq \min(m, n)$.

Věta 4

Hodnost matice, která je ve schodovitém tvaru, je rovna počtu jejich nenulových řádků.

Definice (součin matice s číslem)

Součinem matice A **s číslem** α nazýváme matici αA , která vznikne z A tak, že všechny prvky matice A vynásobíme číslem α :

$$\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11}, & \dots, & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & \dots, & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11}, & \dots, & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1}, & \dots, & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Příklad

$$(-2) \cdot \begin{pmatrix} 1, & -1, & 0 \\ 0, & -2, & 1 \\ 2, & 4, & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2, & 2, & 0 \\ 0, & 4, & -2 \\ -4, & -8, & 6 \end{pmatrix}$$

Definice (součet matic)

Součtem $A + B$ **matic** A, B stejného typu (m, n) nazýváme matici typu (m, n) , jejíž prvky jsou rovny součtům sobě odpovídajících prvků:

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & \dots, & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & \dots, & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}, & \dots, & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}, & \dots, & b_{mn} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11}, & \dots, & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1}, & \dots, & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Příklad

$$\begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 2, & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ -2, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 0, & -2 \end{pmatrix}$$

Věta 5

Pro násobení číslem a sčítání matic stejného typu platí:

① $A + (B + C) = (A + B) + C$
asociativní zákon

② $A + B = B + A$
komutativní zákon

③ $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B; \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
distributivní zákony

Definice (součin matic)

Součinem AB **matice** A **typu** (m, n) **s maticí** B **typu** (n, p) nazýváme matici C **typu** (m, p) takto definovanou: Je-li

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix},$$

pak

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix},$$

kde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$

$(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, p)$.

Součin matice "slovy":

Řádky matice A násobíme (skalární součin) **sloupci** matice B . První matice musí mít též počet sloupců jako druhá matice řádků.

Příklad

Součin matice A typu $(2,3)$ a matice B typu $(3,4)$ je definován a výsledkem je matice typu $(2,4)$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 11 & -1 & -20 \\ 14 & 13 & 0 & -28 \end{pmatrix}$$

Součin matic $B \cdot A$ není definován.

!! Násobení matic je **nekomutativní**, tj. obecně $AB \neq BA$.

Věta 6

Pro násobení matic A, B, C platí

① $(AB)C=A(BC)$,
asociativní zákon

② $(A+B)C=AC+BC$,
pravý distributivní zákon

③ $A(B+C)=AB+AC$,
levý distributivní zákon

jsou-li v těchto rovnostech definovány součty a součiny příslušných matic (tj. mají-li matice A, B, C předepsaný typ).

Věta 7

Pro čtvercovou matici A a jednotkovou matici I stejného řádu platí

$$AI = IA = A.$$

Příklad

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$