Dvojný integrál

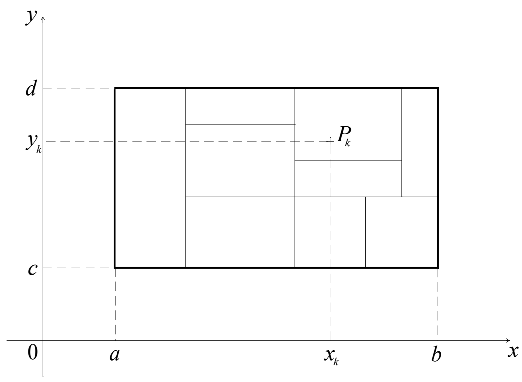
Podobně jako jsme v předchozí kapitole rozšířili pojem a metody diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné na funkce dvou a více proměnných, je možné základní pojmy a metody integrálního počtu funkcí jedné proměnné rozšířit na funkce dvou a více proměnných. Obdržíme tak dvojný, trojný a obecně n-rozměrný integrál.

Zatímco integračním oborem jednorozměrného integrálu byl vždy interval, u dvojného integrálu je třeba pracovat i se složitějšími obory než je obdélníková oblast. Budeme se proto zabývat množinami, které je možné a vhodné uvažovat za integrační obory dvojného integrálu a pro některé speciální případy integračních oborů ukážeme, jak lze při výpočtu dvojného integrálu postupovat. Budou uvedeny nejdůležitější geometrické a fyzikální aplikace dvojného integrálu.

1) Dvojný integrál v obdélníkové oblasti

Mějme dánu funkci $z = f(x, y)$ definovanou a omezenou v obdélníku $R = \{(x, y) \in E_2 ; a \le x \le b, c \le y \le d\}$ (stručněji píšeme $R = \{\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle\}$). Tento obdélník R rozdělme na n libovolných obdélníčků (budeme mluvit o dělení D), jejichž strany jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. Označme je $p_1, p_2, ..., p_n$ a jejich obsahy $\Delta p_1, \Delta p_2, ..., \Delta p_n$. Je-li ΔR obsah obdélníka R, platí $\Delta R = \Delta p_1 + \Delta p_2 + ... + \Delta p_n$.

V každém obdélníku p_k, $k = 1,2,...,n$, označme m_k (M_k) infimum (supremum) funkce $f(x, y)$ v tomto obdélníku.



Pak $$s(D, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta p_k \text{ nazveme dolní součet,}$$

$$S(D, f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta p_k \text{ nazveme horní součet}$$

příslušný funkci $f(x, y)$ při daném dělení D.

Takových součtů $s(D, f)$, $S(D, f)$ dostaneme nekonečně mnoho, měníme-li počet obdélníků p_k a jejich polohu v obdélníku R.Označme dále m (M) infimum(supremum) funkce $f(x, y)$ v celém obdélníku R.

Zřejmě platí nerovnosti $m \le m_k \le M_k \le M$, odkud vynásobením číslem Δp_k a sečtením pro $k = 1,2,...,n$ dostaneme $m\Delta R \le s(D, f) \le S(D, f) \le M\Delta R$.

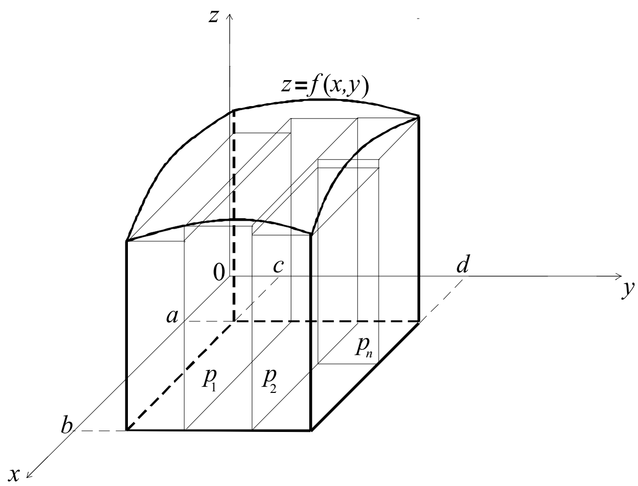
Protože množina všech možných dolních (horních) součtů je shora (zdola) omezená, má supremum (infimum).

Definice : Je-li supremum množiny $\{s(D, f)\}$ všech možných dolních součtů funkce $f(x, y)$ rovno infimu množiny $\{S(D, f)\}$ všech možných horních součtů této funkce, nazývá se jejich společná hodnota **dvojný** (nebo dvojrozměrný) **integrál** funkce $f(x, y)$ v obdélníku R a značí se symbolem $\iint\limits_R f(x, y)dxdy.$

Obdélník R se nazývá integrační obor dvojného integrálu. Existuje-li dvojný integrál, říkáme, že funkce $f(x, y)$ je v daném oboru integrace schopna, nebo že je v daném oboru R integrabilní.

Geometrický význam dvojného integrálu v obdélníku

Nechť $f(x, y) \geq 0$ je integrabilní v obdélníku R. Potom dolní součet představuje součet objemů nejvyšších kvádrů, jejichž dolní podstavy jsou jednotlivé obdélníčky p_k, kdežto horní podstavy nepřesahují nad plochu $z = f(x, y)$.



Analogicky horní součet značí součet objemů nejnižších kvádrů s podstavou p_k, jejichž horní podstavy nepřecházejí pod plochu $z = f(x, y)$. Tedy dvojný integrál funkce $f(x, y)$ v obdélníku R představuje objem části kvádru s podstavou R, seříznutého plochou o rovnici $z = f(x, y)$.

Vlastnosti dvojného integrálu

Nechť funkce $f(x, y)$ a $g(x, y)$ jsou integrabilní v obdélníku R, který je rovnoběžkou s některou ze souřadnicových os rozdělen na dva obdélníky R_1, R_2. Je-li c libovolná konstanta, platí :

1) $\iint\limits_R cf(x, y)dxdy = c\iint\limits_R f(x, y)dxdy,$

2) $\iint\limits_R [f(x, y) \pm g(x, y)]dxdy = \iint\limits_R f(x, y)dxdy \pm \iint\limits_R g(x, y)dxdy,$

3) $\iint\limits_{R_1} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{R_2} f(x, y)dxdy = \iint\limits_R f(x, y)dxdy.$

2)Výpočet dvojného integrálu v obdélníku

Při výpočtu dvojného integrálu v obdélníku nejčastěji postupujeme tak, že dvojný integrál převedeme na integrál dvojnásobný, při jehož vyčíslení můžeme použít metod integrálního počtu funkcí jedné proměnné.

Nechť funkce $f(x,y)$ je definovaná v obdélníku $R=\{\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\}$. Vyšetřujme funkci $f(x,y)$ pro libo volně danou hodnotu x v intervalu $\langle a,b\rangle$. Je-li funkce $f(x,y)$ pro každé pevně dané $x\in\langle a,b\rangle$, jakožto funkce argumentu y integrabilní v intervalu $\langle c,d\rangle$, pak hodnota integrálu $\int_c^d f(x,y)dy$ je určena hodnotou x. Tedy tento integrál je funkcí proměnné x, definované v intervalu $\langle a,b\rangle$. Je-li tato funkce $\int_c^d f(x,y)dy$ integrabilní v intervalu $\langle a,b\rangle$, pak integrál $\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$ nazýváme dvojnásobným integrálem funkce $f(x,y)$ podle argumentů y, x (v tomto pořadí) v obdélníku R. Analogicky je možno zavést pojem dvojnásobného integrálu $\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy.$

Věta : (Fubiniho věta pro obdélníkový integrační obor) Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá v obdélníku $R=\{\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\}$. Pak platí

$$1)\iint_R f(x,y)dxdy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx,$$

$$2)\iint_R f(x,y)dxdy=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy.$$

Fubiniho věta ukazuje, jak postupovat při výpočtu dvojného integrálu v obdélníkové integrační oblasti. Jde o převedení dvojného integrálu na integrál dvojnásobný. Postupujeme tak, že např. při výpočtu dvojnásobného integrálu $\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$ určíme nejprve vnitřní integrál $\int_c^d f(x,y)dy$, přičemž integrujeme podle proměnné y a na x se díváme jako na konstantu. Pak vypočítáme vnější integrál podle proměnné x.

Příklad : Vypočtěte $\iint_R(5x^2y-2y^3)dxdy$, kde $R=\{\langle 2,5\rangle,\langle 1,3\rangle\}$.

Řešení: Integrovaná funkce je v obdélníku R spojitá, takže podle Fubiniho věty platí

$$\iint_R(5x^2y-2y^3)dxdy=\int_1^3\left[\int_2^5(5x^2y-2y^3)dx\right]dy.$$

Vypočítáme nejprve vnitřní integrál (proměnnou y chápeme jako konstantu)

$$\int_2^5(5x^2y-2y^3)dx=\left[\frac{5}{3}x^3y-2xy^3\right]_2^5=195y-6y^3.$$

Potom vnější integrál je

$$\int_1^3 (195y - 6y^3)dy = \left[195\frac{y^2}{2} - 6\frac{y^4}{4}\right]_1^3 = 660.$$

Celkem tedy $\iint_R (5x^2 y - 2y^3)dxdy = 660.$

Můžeme také postupovat způsobem, kdy nejprve integrujeme podle proměnné y a vnější integrál pak integrujeme podle proměnné x. Dostaneme

$$\iint_R (5x^2 y - 2y^3)dxdy = \int_2^5 \left[\int_1^3 (5x^2 y - 2y^3)dy\right]dx = \int_2^5 \left[\frac{5}{2}x^2 y^2 - \frac{2}{4}y^4\right]_1^3 dx = \int_2^5 (20x^2 - 40)dx = 660.$$

Příklad : Vypočtěte $\iint_R \frac{dxdy}{(2x+y+1)^2}$, kde $R = \{\langle 0,4\rangle, \langle 0,1\rangle\}$.

Řešení: Funkce $\frac{1}{(2x+y+1)^2}$ je spojitá všude, kromě bodů ležících na přímce $y = -2x - 1$, která však nemá s obdélníkem R žádný společný bod.

Je tedy $\iint_R \frac{dxdy}{(2x+y+1)^2} = \int_0^4 \left[\int_0^1 \frac{dy}{(2x+y+1)^2}\right]dx = \int_0^4 \left[-\frac{1}{2x+y+1}\right]_0^1 dx = \int_0^4 \left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x+2}\right)dx =$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln|2x+1| - \frac{1}{2}\ln|x+1|\right]_0^4 = \frac{1}{2}\ln 9 - \frac{1}{2}\ln 5 = \frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}.$$

Příklad : Vypočtěte $\iint_R x^y dxdy$, kde $R = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,2\rangle\}$.

Řešení: Z výše uvedeného vyplývá, že hodnota dvojného integrálu (pokud existuje) nezávisí na pořadí integrace. To má při praktických výpočtech velký význam. Můžeme totiž integrovat v tom pořadí, ve kterém je výpočet integrálů jednodušší. V řešené úloze dostaneme při integraci podle proměnné y jako první

$$\iint_R x^y dxdy = \int_0^1 \left[\int_1^2 x^y dy\right]dx = \int_0^1 \left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_1^2 dx = \int_0^1 \frac{x^2 - x}{\ln x}dx.$$

Tento integrál neumíme vypočítat, neboť primitivní funkci k funkci $\frac{x^2 - x}{\ln x}$ není možné vyjádřit v konečném tvaru pomocí elementárních funkcí. Při opačném pořadí integrace však tento problém nenastává

$$\iint_R x^y dxdy = \int_1^2 \left[\int_0^1 x^y dx\right]dy = \int_1^2 \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 dy = \int_1^2 \frac{1}{y+1}dy = [\ln(y+1)]_1^2 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}.$$

V případech kdy je integrovaná funkce součinem dvou funkcí, můžeme při integraci na obdélníku využít následující důsledek Fubiniho věty:

Je-li $f(x,y)=u(x)v(y),$ kde funkce $u(x)$ je spojitá v intervalu $\langle a,b\rangle$ a funkce $v(y)$ je spojitá v intervalu $\langle c,d\rangle,$ platí

$$\iint_R u(x)v(y)dxdy=\int_a^b u(x)dx\int_c^d v(y)dy.$$

Příklad : Vypočtěte $\iint_R xe^{x+y}dxdy$, kde $R=\{\langle 0,1\rangle,\langle 0,1\rangle\}$.

Řešení: Protože $xe^{x+y}=xe^x e^y$ a funkce xe^x i funkce e^y jsou integrovatelné v intervalech $\langle 0,1\rangle$, daný integrál existuje a platí

$$\iint_R xe^{x+y}dxdy=\int_0^1 xe^x dx\int_0^1 e^y\,dy=\left[xe^x-e^x\right]_0^1\cdot\left[e^y\right]_0^1=e-1.$$

3) Dvojný integrál v obecné uzavřené oblasti

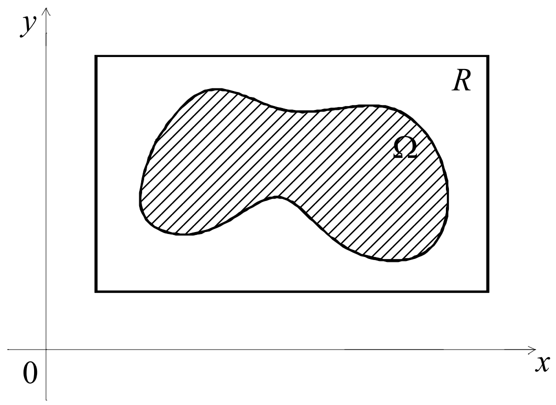
Definice : Nechť $f(x,y)$ je omezená funkce v uzavřené oblasti Ω a nechť R je takový obdélník, že $\Omega\subset R.$ Definujeme v obdélníku R novou funkci $F(x,y)$ takto:

$F(x,y)=f(x,y)$ pro $(x,y)\in\Omega,$

$F(x,y)=0$ pro $(x,y)\in(R-\Omega).$

Je-li funkce $F(x,y)$ integrabilní v obdélníku R, považujeme funkci $f(x,y)$ za integrabilní v oblasti Ω a definujeme dvojný integrál funkce $f(x,y)$ v oblasti Ω vztahem

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy=\iint_R F(x,y)dxdy.$$



Hodnota takto definovaného dvojného integrálu funkce $f(x,y)$ v uzavřené oblasti Ω nezávisí na volbě obdélníka R.

Poznámka : Nechť $M \subset E_2$ je omezená množina. Existuje-li $\iint\limits_M 1dxdy,$ říkáme, že M je (jordanovsky) měřitelná v E_2.

Míru v dvojrozměrném případě nazýváme plošným obsahem (v trojrozměrném případě objemem). Plošný obsah měřitelné množiny *M* je podle uvedené definice číselně roven objemu tělesa o výšce 1, jehož základnou je množina *M*. Množiny, jejichž obsah je nulový, nazýváme množinami míry nula. Jsou to například množiny skládající se z konečně mnoha bodů nebo z bodů konečně mnoha oblouků (obloukem rozumíme křivku konečné délky, která má spojitě se měnící tečnu a sama sebe neprotíná). Hodnota integrálu na množině *M* nezávisí na hodnotách integrované funkce na podmnožině množiny *M* míry nula (viz později uvedená věta).

Existují množiny, které nejsou měřitelné. Jsou to vesměs uměle vytvořené množiny se kterými se v technických výpočtech nesetkáváme. Měřitelné jsou všechny tzv. elementární oblasti, které budou nyní popsány. Jsou to typy integračních oborů, se kterými v základních aplikacích dvojného integrálu zpravidla vystačíme a pro něž lze převést výpočet dvojných integrálů na postupný výpočet jednoduchých integrálů.

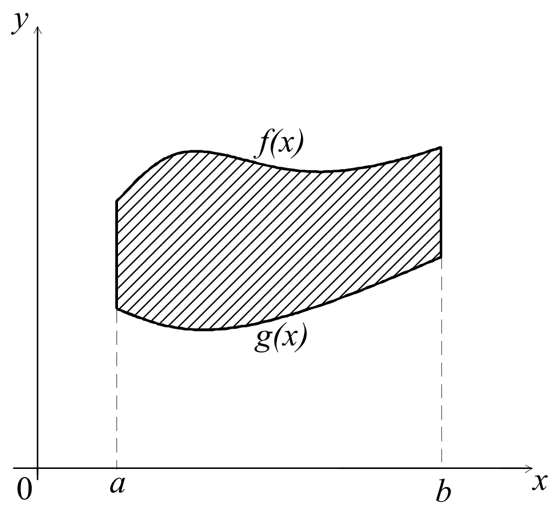
Elementární oblasti

Definice :

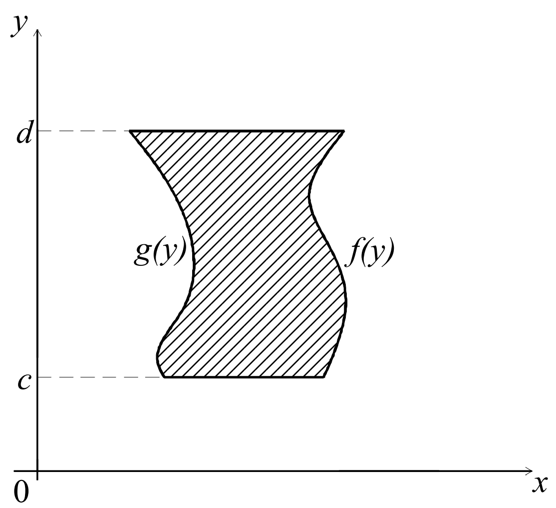
1) Nechť $g(x)$ a $f(x)$ jsou funkce spojité v intervalu $\langle a,b\rangle$, pro které zde platí $g(x) \le f(x)$. Potom uzavřenou oblast $\Omega = \{(x,y) \in E_2; a \le x \le b, g(x) \le y \le f(x)\}$ nazýváme elementární oblast typu [*x*,*y*]. (obr.vlevo)

2) Nechť $g(y)$ a $f(y)$ jsou funkce spojité v intervalu $\langle c,d\rangle$, pro které zde platí $g(y) \le f(y)$. Potom uzavřenou oblast $\Omega = \{(x,y) \in E_2; c \le y \le d, g(y) \le x \le f(y)\}$ nazýváme elementární oblast typu[*y*,*x*].(obr.vpravo)

3) Elementární oblastí nazveme uzavřenou oblast, která je elementární oblastí typu [*x*,*y*] nebo typu [*y*,*x*].



elementární oblast typu [*x*,*y*]



elementární oblast typu[*y*,*x*]

Pro výpočet dvojného integrálu v elementární oblasti je důležitá následující věta.

Věta : (Fubiniho věta pro elementární oblast)

1) Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá v elementární oblasti $\Omega=\{(x,y)\in E_2; a\le x\le b, g(x)\le y\le f(x)\}$ typu [*x*,*y*]. Pak platí

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b\left[\int\limits_{g(x)}^{f(x)} f(x,y)dy\right]dx.$$

2) Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá v elementární oblasti $\Omega=\{(x,y)\in E_2; c\le y\le d, g(y)\le x\le f(y)\}$ typu [*y*,*x*]. Pak platí

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d\left[\int\limits_{g(y)}^{f(y)} f(x,y)dx\right]dy.$$

Příklad : Vypočtěte $\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^{x^2}(x^2+y^2)dy\right]dx.$

Řešení: Nejprve vypočítáme vnitřní integrál integrací podle y, přičemž x považujeme za konstantu

$$\int\limits_0^{x^2}(x^2+y^2)dy=\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{x^2}=x^4+\frac{x^6}{3}.$$

Integrací této funkce podle x je

$$\int\limits_0^1\left(x^4+\frac{x^6}{3}\right)dx=\left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}\right]_0^1=\frac{1}{5}+\frac{1}{21}=\frac{26}{105}.$$

Celkem tedy $$\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^{x^2}(x^2+y^2)dy\right]dx=\frac{26}{105}.$$

Věta: Nechť Ω je elementární oblast a množina $K\subset\Omega$ je tvořena konečně mnoha body a oblouky. Nechť funkce $f(x,y)$ a $g(x,y)$ jsou omezené v oblasti Ω a spojité a sobě rovné v $\Omega-K$. Pak existují dvojné integrály funkcí $f(x,y)$ a $g(x,y)$ v oblasti Ω a jsou si rovny

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{\Omega} g(x,y)dxdy.$$

Poznámka : Uvedená věta rozšiřuje podmínky, za kterých existuje dvojný integrál. Ukazuje, že existence a hodnota dvojného integrálu nezávisí na hodnotách funkce $f(x,y)$ v konečně mnoha bodech a v bodech konečně mnoha oblouků. Její hodnoty zde mohou být libovolné nebo nemusí být ani definované, aniž by to ovlivnilo existenci a hodnotu integrálu. Takže je-li například funkce $f(x,y)$ spojitá a omezená na vnitřku $\overline{\Omega}$ oblasti Ω, pak platí

$$\iint\limits_{\overline{\Omega}} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy.$$

Proto dále budeme za integrační obor považovat oblast Ω i v případech, kdy bude funkce $f(x,y)$ definována pouze na vnitřku této oblasti.

Následující věta o vlastnostech dvojného integrálu usnadňuje jeho výpočet.

Věta :

1) Nechť funkce $f(x,y)$ a $g(x,y)$ jsou integrace schopné v elementární oblasti Ω a h, k nechť jsou konstanty. Pak platí

$$\iint_{\Omega}(hf(x,y)+kg(x,y))dxdy = h\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy + k\iint_{\Omega} g(x,y)dxdy.$$

2) Nechť funkce $f(x,y)$ je integrace schopná na konečném počtu elementárních oblastí $\Omega_1, ..., \Omega_n$ a nechť tyto oblasti mají společné nejvýše hraniční body. Označme $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n}\Omega_i$. Pak platí

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega_1} f(x,y)dxdy + ... + \iint_{\Omega_n} f(x,y)dxdy.$$

Příklad : Pomocí záměny pořadí integrace zjednodušte výpočet integrálu

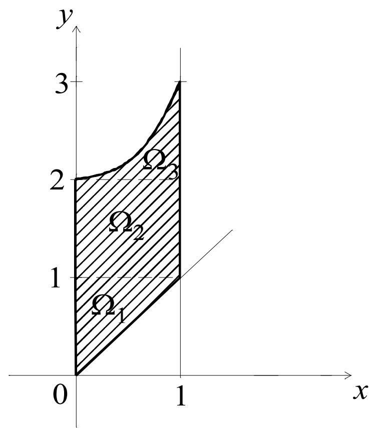
$$I = \int_0^1\left[\int_0^y f(x,y)dx\right]dy + \int_1^2\left[\int_0^1 f(x,y)dx\right]dy + \int_2^3\left[\int_{\sqrt{y-2}}^1 f(x,y)dx\right]dy.$$

Řešení: Integrační oblasti $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ jednotlivých integrálů jsou

$\Omega_1 = \{(x,y);\ 0 \le x \le y,\ 0 \le y \le 1\}$,

$\Omega_2 = \{(x,y);\ 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2\}$,

$\Omega_3 = \{(x,y);\ \sqrt{y-2} \le x \le 1,\ 2 \le y \le 3\}$.

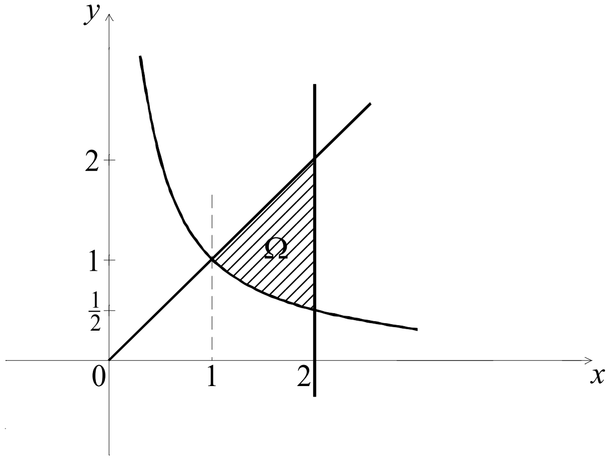


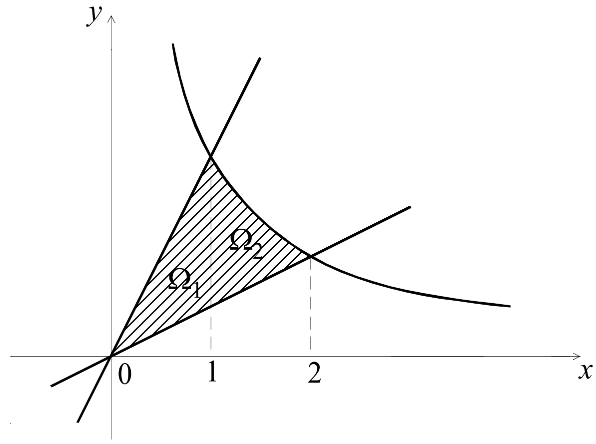
Z obrázku je patrné, že sjednocením oblastí $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ je elementární oblast Ω typu $[x,y]$, kterou lze vyjádřit následujícím způsobem : $\Omega = \{(x,y);\quad 0 \le x \le 1,\ x \le y \le x^2+2\}$. Existují-li zadané integrály a jsou-li zaměnitelné, platí

$$I = \int_0^1\left[\int_x^{x^2+2} f(x,y)dy\right]dx.$$

Příklad : Vypočtěte $\iint_{\Omega}\frac{x^2}{y^2}dxdy$, kde Ω je oblast ohraničená přímkami $x = 2$, $y = x$ a hyperbolou $xy = 1$.

Řešení : Integrační obor $\Omega = \left\{ (x,y);\, 1 \le x \le 2,\, \frac{1}{x} \le y \le x \right\}$ je elementární oblast typu [*x*,*y*]. (obr.vlevo)





Daná funkce $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2}$ je v oblasti Ω spojitá, tedy můžeme použít Fubiniho větu. Dostaneme

$$\iint_\Omega \frac{x^2}{y^2}\,dxdy = \int_1^2 \left[\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy \right] dx = \int_1^2 x^2 \left[\frac{-1}{y} \right]_{\frac{1}{x}}^{x} dx = \int_1^2 (x^3 - x)\,dx = \frac{9}{4}.$$

Oblast Ω však můžeme v případě potřeby rozdělit na dvě elementární oblasti typu [*y*,*x*]:

$$\Omega_1 = \left\{ (x,y);\, \frac{1}{2} \le y \le 1,\, \frac{1}{y} \le x \le 2 \right\},\quad \Omega_2 = \left\{ (x,y);\, 1 \le y \le 2,\, y \le x \le 2 \right\}$$

a potom integrovat v opačném pořadí

$$\iint_\Omega \frac{x^2}{y^2}\,dxdy = \iint_{\Omega_1} \frac{x^2}{y^2}\,dxdy + \iint_{\Omega_2} \frac{x^2}{y^2}\,dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\int_{\frac{1}{y}}^{2} \frac{x^2}{y^2}\,dx \right] dy + \int_1^2 \left[\int_y^2 \frac{x^2}{y^2}\,dx \right] dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\frac{x^3}{3y^2} \right]_{\frac{1}{y}}^{2} dy +$$

$$+ \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3y^2} \right]_y^2 dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{8}{3y^2} - \frac{1}{3y^5} \right) dy + \int_1^2 \left(\frac{8}{3y^2} - \frac{1}{3y^5} \right) dy = \frac{9}{4}.$$

Příklad : Vypočtěte $\iint_\Omega (x^2 + y)\,dxdy$, kde Ω je oblast ohraničená křivkami $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$, $xy = 2$ pro $x \ge 0$.

Řešení: Integrační oblast můžeme vyjádřit jako dvě elementární oblasti typu [*x*,*y*] (obr.vpravo):

$$\Omega_1 = \left\{ (x,y);\, 0 \le x \le 1,\, \frac{x}{2} \le y \le 2x \right\},\quad \Omega_2 = \left\{ (x,y);\, 1 \le x \le 2,\, \frac{x}{2} \le y \le \frac{2}{x} \right\}.$$

Funkce $f(x,y) = x^2 + y$ je všude spojitá, tedy

$$\iint_\Omega (x^2 + y)\,dxdy = \iint_{\Omega_1} (x^2 + y)\,dxdy + \iint_{\Omega_2} (x^2 + y)\,dxdy = \int_0^1 \left[\int_{\frac{x}{2}}^{2x} (x^2 + y)\,dy \right] dx + \int_1^2 \left[\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} (x^2 + y)\,dy \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_{\frac{x}{2}}^{2x} dx + \int_1^2 \left[x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} dx = \frac{17}{6}.$$

4) Substituční metoda pro dvojný integrál

Při výpočtu určitého integrálu jsme používali substituční metodu ve tvaru $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$ kde funkce $x = \varphi(t)$ zobrazuje interval $\langle \alpha, \beta \rangle$ na interval $\langle a, b \rangle$, přičemž $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta).$

Podobná metoda existuje i pro dvojné integrály. Zatímco v jednorozměrném případě se substitucí snažíme zjednodušit integrovanou funkci a integrační obor zůstává intervalem, ve dvojrozměrném případě mohou potíže při výpočtu způsobovat také integrační obory. Cílem substituční metody pro dvojný integrál je proto zjednodušovat nejen integrované funkce, ale také příslušné integrační obory.

Předpokládejme, že v prostoru E_2 máme dvě souřadnicové soustavy :

1) pravoúhlou, ve které je každému bodu přiřazena dvojice souřadnic (x, y),

2) křivočarou, ve které je témuž bodu přiřazena dvojice souřadnic (u, v).

Zobrazení $\Phi(g,h)$ dané rovnicemi $x = g(u,v),\ y = h(u,v),$ které každému bodu $(u,v) \in A$ přiřazuje bod $(x, y) \in B,$ nazveme **regulární,** jestliže

- Φ je prosté zobrazení, tedy pro všechna $(u_1, v_1), (u_1, v_2) \in A$ taková, že $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$ je $\Phi(u_1, v_1) \neq \Phi(u_2, v_2)$,
- funkce g a h mají na množině A spojité parciální derivace prvního řádu,
- determinant $J(u,v) = \begin{vmatrix} g'_u(u,v) & g'_v(u,v) \\ h'_u(u,v) & h'_v(u,v) \end{vmatrix}$, nazývaný Jakobián zobrazení Φ, je pro všechna $(u,v) \in A$ různý od nuly.

Věta : Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá v uzavřené oblasti B a nechť $\Phi(g,h)$ je regulární zobrazení oblasti A na oblast B. Pak $\iint_B f(x, y)dxdy = \iint_A f[g(u,v), h(u,v)]|J(u,v)|dudv.$

Nalézt vhodnou substituci je obecně obtížné. V případě, že integrační obor je kruh, kruhová výseč, mezikruží apod., je vhodné volit substituci do polárních souřadnic, která je daná transformačními rovnicemi $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$

Nechť oblast $B = \{(x, y) \in E_2; 0 < x^2 + y^2 \le a^2\}$ tvoří kruh o poloměru a, ze kterého vynecháme bod $(0,0)$. Substituce do polárních souřadnic definuje zobrazení, které zobrazí obdélníkovou oblast $A = \{(r, \varphi) \in E_2;\ 0 < r \le a,\ 0 \le \varphi < 2\pi\}$ na oblast B. Toto zobrazení je prosté, neboť každá dvojice $(r, \varphi) \in A$ je dvojicí polárních souřadnic nějakého bodu v rovině a body, které mají různé polární souřadnice jsou různé. Parciální derivace $g'_r = \cos\varphi,\ g'_\varphi = -r\sin\varphi,\ h'_r = \sin\varphi,\ h'_\varphi = r\cos\varphi$ jsou zřejmě spojité funkce v oblasti A.

Podmínka $J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \neq 0$ je splněna pro všechna $(r, \varphi) \in A.$ Jedná se tedy o regulární zobrazení, které oblast A zobrazí na oblast B.

Podle výše uvedené věty je $\iint_B f(x, y)dxdy = \iint_A f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi.$

Poznámka : Vzhledem k tomu, že hodnota dvojného integrálu se nezmění vynecháním jednoho bodu z integrační oblasti, můžeme za integrační oblast místo oblasti B považovat celý kruh i s počátkem.

Příklad : Vypočtěte integrál $\iint\limits_{\Omega} \ln(1+x^2+y^2)dxdy$, kde oblast Ω je určena nerovnostmi

$x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0.$

Řešení : Vzhledem ke tvaru integrační oblasti je vhodné přejít do polárních souřadnic. Oblast Ω (čtvrtkruh v 1. kvadrantu) se tak zobrazí na obdélník Ω^* vymezený nerovnostmi $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 2.$

Je tedy $$\iint\limits_{\Omega} \ln(1+x^2+y^2)dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int\limits_0^2 r\ln(1+r^2)dr \right] d\varphi = \left| \begin{matrix} substituce: \\ u = 1+r^2 \\ du = 2rdr \end{matrix} \right| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int\limits_1^5 \frac{\ln u}{2} du \right] d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [u\ln u - u]_1^5 \, d\varphi = \frac{1}{2}(5\ln 5 - 4)[\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}(5\ln 5 - 4).$$

Příklad : Substitucí do polárních souřadnic vypočtěte integrál $\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy$, kde oblast Ω je určena nerovností $(x-a)^2 + y^2 \le a^2$, pro $a > 0$.

Řešení : Oblast Ω je kruh se středem v bodě $S(a,0)$ a poloměrem $r = a$.

Meze v polárních souřadnicích určíme dosazením transformačních rovnic do rovnic, které vyjadřují hranici oblasti Ω. V naší úloze :

$$(r\cos\varphi - a)^2 + (r\sin\varphi)^2 \le a^2$$

$$r^2\cos^2\varphi - 2ra\cos\varphi + a^2 + r^2\sin^2\varphi \le a^2$$

$$r^2 - 2ra\cos\varphi \le 0$$

$$r(r - 2a\cos\varphi) \le 0$$

Tedy $0 \le r \le 2a\cos\varphi.$ a oblast $\Omega^* = \left\{ (r,\varphi); -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2a\cos\varphi \right\}.$

Dvojný integrál $$\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy = \iint\limits_{\Omega^*} r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)rdrd\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int\limits_0^{2a\cos\varphi} r^3 dr \right] d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{2a\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= 4a^4 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi \, d\varphi = 8a^4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\varphi)^2 d\varphi = 2a^4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi =$$

$$= 2a^4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi = 2a^4 \left[\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi a^4}{2}.$$

5) Geometrické aplikace dvojných integrálů

a) Objem přímého válce

Z geometrického významu dvojného integrálu v obdélníku R a z definice dvojného integrálu v oblasti Ω plyne, že dvojný integrál funkce $f(x,y)\geq 0$ spojité v elementární oblasti Ω představuje objem části přímého válce, jehož podstavou je oblast Ω, přičemž tento válec je shora seříznutý plochou $z=f(x,y)$.

Věta : Nechť funkce $f(x,y)$ je integrabilní v elementární oblasti $\Omega.$ Pak objem V přímého válce podstavou Ω seříznutého plochou $z=f(x,y)$, je dán vzorcem

$$V=\iint_{\Omega}|f(x,y)|dxdy.$$

Příklad : Vypočtěte objem části koule poloměru R se středem v počátku O nad kruhem $x^2+y^2=Ry,$ ležícím v rovině xy.

Řešení: Objem $V=\iint_{\Omega}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy,$ kde oblast Ω je kruh určený nerovností $x^2+\left(y-\frac{R}{2}\right)^2\leq\frac{R^2}{4}.$

Substitucí do polárních souřadnic dostaneme integrační oblast $\Omega^*=\{(r,\varphi);0\leq\varphi\leq\pi,\ 0\leq r\leq R\sin\varphi\}$, kde mez $r=R\sin\varphi$ jsme získali dosazením transformačních rovnic do rovnice kružnice $x^2+y^2=Ry$ (podobně jako ve dříve řešené úloze). Při výpočtu využijeme toho, že integrační oblast je symetrická podle osy y. Dostáváme tedy

$$V=\iint_{\Omega}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{R\sin\varphi}r\sqrt{R^2-r^2}\,dr\right]d\varphi=\left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ \sqrt{R^2-r^2}=t\\ -rdr=tdt\end{array}\right|=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\int_R^{R\cos\varphi}t^2dt\right]d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{t^3}{3}\right]_R^{R\cos\varphi}d\varphi=$$

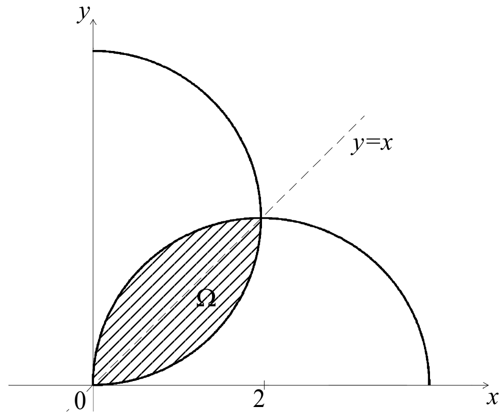
$$=\frac{2}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3\varphi)d\varphi=\left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ \sin\varphi=u\\ \cos\varphi\, d\varphi=du\end{array}\right|=\frac{2}{3}R^3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}1d\varphi-\int_0^{1}(1-u^2)du\right)=\frac{2}{3}R^3\left[\frac{\pi}{2}-(1-\frac{1}{3})\right]=\frac{2}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

b) Obsah rovinné oblasti

Obsah elementární oblasti Ω je číselně roven objemu přímého válce nad oblastí $\Omega,$ jehož výška je rovna jedné. Vzorec pro obsah P uvažované oblasti dostaneme ze vzorce pro objem přímého válce, položíme-li v něm $f(x,y)=1,$ takže

$$P=\iint_{\Omega}1dxdy.$$

Příklad : Vypočtěte obsah rovinné oblasti Ω ohraničené kružnicemi $(x-2)^2+y^2=4,\ \ x^2+(y-2)^2=4.$



Řešení: Protože oblast Ω je symetrická podle přímky $y = x$, stačí určit obsah např. její horní poloviny. Použijeme-li polární souřadnice $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$ přejde rovnice kružnice v rovnici $r = 4\cos\varphi$ a horní polorovina oblasti Ω se zobrazí na oblast Ω^*, která je určená nerovnostmi $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le r \le 4\cos\varphi$.

Obsah $P = 2\iint\limits_{\Omega} dxdy = 2\iint\limits_{\Omega^*} r dr d\varphi = 2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int\limits_{0}^{4\cos\varphi} r dr\right]d\varphi = 2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{4\cos\varphi} d\varphi = 16\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi = 2(\pi - 2).$

c) Obsah plochy

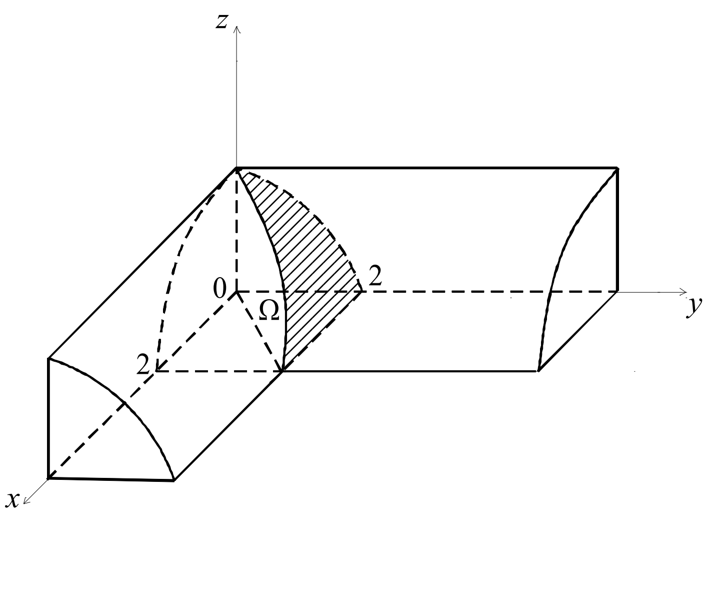
Nechť rovnicí $z = f(x,y)$, kde $(x,y) \in \Omega$ je dána plocha. Definujme a vypočítejme obsah S této plochy nad oblastí Ω.

Věta : Jestliže funkce $z = f(x,y)$ má spojité parciální derivace v uzavřené oblasti Ω, pak pro obsah S plochy o rovnici $z = f(x,y)$ platí

$$S = \iint\limits_{\Omega}\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dxdy.$$

Příklad : Vypočtěte obsah S plochy, kterou na válcové ploše $y^2 + z^2 = 4$ vytíná válec $y^2 + z^2 = 4$.

Řešení: Na obrázku je znázorněna osmina uvažované plochy $z = \sqrt{4 - y^2}$.



Její parciální derivace $f'_x = 0,\ f'_y = -\dfrac{y}{\sqrt{4-y^2}}$.

Průmětem plochy $z = \sqrt{4-y^2}$ do roviny xy je trojúhelník $\Omega = \{(x,y);\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le x \le y\}$.

Obsah plochy

$$S = 8\iint_{\Omega} \sqrt{1+\frac{y^2}{4-y^2}}\,dxdy = 8\int_0^2 \left[\int_0^y \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\,dx\right] dy = 8\int_0^2 \frac{2y}{\sqrt{4-y^2}}\,dy = 32.$$