DIFERCIÁLNÍ ROVNICE

1) Úvod

Def. : Obyčejnou diferenciální rovnicí (dále jen DR) rozumíme rovnici, ve které se vyskytují derivace hledané funkce y jedné proměnné.

Může mít explicitní tvar $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$

nebo implicitní tvar $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$.

Řádem diferenciální rovnice nazýváme řád nejvyšší derivace hledané funkce v uvažované rovnici.
Řešením DR rozumíme každou funkci jedné proměnné, která má derivaci až do řádu n a dosazená do dané DR ji převádí na identitu.
Rozeznáváme tři druhy řešení DR :
a) obecné řešení obyčejné DR n-tého řádu má tvar $y = f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, kde c_i jsou konstanty
b) partikulární řešení je řešení, které dostaneme z obecného řešení volbou konstant
c) singulární řešení je řešení, které není možné získat z obecného řešení žádnou volbou konstant.

2) Diferenciální rovnice prvního řádu

Jsou to rovnice tvaru $y' = f(x, y)$ (explicitní tvar)

nebo $F(x, y, y') = 0$ (implicitní tvar).

Nejjednodušší DR 1.řádu je rovnice tvaru : $\boxed{y' = f(x)}$.

Její obecné řešení určíme integrací a má tvar $\boxed{y = \int f(x)\, dx + c}$.

Př. : Určete obecné řešení DR $y' = 2x - 2$.

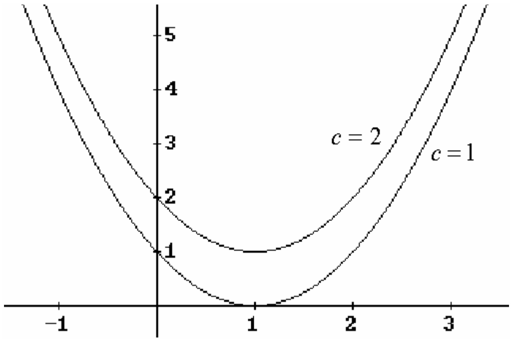
Řešení : Obecné řešení má tvar $y = \int (2x - 2)\, dx + c = x^2 - 2x + c$

Zvolíme-li za konstantu c libovolné číslo, dostaneme partikulární řešení.

Např. pro $c = 1$ je $y = x^2 - 2x + 1$

pro $c = 2$ je $y = x^2 - 2x + 2$ atd.

Graf partikulárního řešení DR nazýváme **integrální křivkou**. Geometricky tedy představuje obecné řešení DR 1.řádu soustavu integrálních křivek, závislou na parametru c (viz obr.1).



Obr.1

V praktických úlohách často potřebujeme řešení, splňující určité podmínky.

Podmínka ve tvaru $y(x_0) = y_0$ se nazývá **Cauchyova počáteční podmínka**. Určuje partikulární řešení, které prochází bodem (x_0, y_0).

Př.: Určete partikulární řešení DR $y' = x - \sin x$ splňující počáteční podmínku $y(0) = 2$.

Řešení : $y = \int (x - \sin x)\, dx + c = \frac{x^2}{2} + \cos x + c$

Po dosazení $x = 0,\ y = 2$, dostaneme $c = 1$.

Tedy partikulární řešení, vyhovující dané počáteční podmínce má tvar : $y = \frac{x^2}{2} + \cos x + 1$.

Některé typy DR 1.řádu a jejich řešení.

a) Diferenciální rovnice s proměnnými separovanými

Def.: Diferenciální rovnice tvaru $y' = f(x).g(y)$, kde f a g jsou funkce spojité na určitých otevřených intervalech se nazývá rovnice s proměnnými separovanými.

Při jejím řešení derivaci y' formálně nahradíme podílem diferenciálů $\frac{dy}{dx}$ a rovnici upravíme na tvar

$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx$. Obecné řešení DR rovnice pak dostaneme integrací této rovnice : $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx$,

přičemž integrační konstantu napíšeme jen na jednu stranu rovnice.

Pokud není DR s proměnnými separovanými v základním tvaru, musíme ji upravit tak, aby se na každé straně rovnice vyskytovala pouze jedna z proměnných. Při dělení rovnice předpokládáme, že výrazy, kterými dělíme, jsou nenulové. Položíme-li je rovny nule, můžeme dostat singulární řešení.

Př. : Řešte diferenciální rovnici $xy' + 2y = y^2$.

Řešení : Provedeme separaci $xy' = y^2 - 2y$

$$x\frac{dy}{dx} = y^2 - 2y \qquad /.dx$$

$$x\,dy = (y^2 - 2y).dx \quad /:(y^2 - 2y).x, \text{ kde } y^2 - 2y \neq 0, x \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y^2 - 2y} = \int \frac{dx}{x} + c$$

Integrál na levé straně řešíme doplněním na čtverec a zbytek a pak základním vzorcem

$$\int \frac{dy}{y^2 - 2y} = \int \frac{dy}{(y-1)^2 - 1} = -\int \frac{dy}{1-(y-1)^2} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y-1}{1-(y-1)}\right| = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{2-y}\right| + c$$

Obecné řešení dané DR má tvar $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{2-y}\right| = \ln|x| + c$

Použitím vztahu $A = \ln e^A$ pro úpravu pravé strany rovnice je $\ln|x| + c = \ln|x| + \ln e^c = \ln|x|.e^c = \ln|Kx|$, kde K je konstanta.

Explicitní tvar obecného řešení dostaneme postupně úpravou rovnice $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{2-y}\right| = \ln(Kx)$

$$\ln\left|\frac{y}{2-y}\right|^{-\frac{1}{2}} = \ln(Kx)$$

$$\sqrt{\frac{2-y}{y}} = Kx$$

$$\boxed{y = \frac{2}{1+Kx^2}}$$

Na závěr vyšetříme případy $y = 2, y = 0, x = 0$, které jsme v předchozím výpočtu vyloučili.

1) $x = 0$ není řešení dané DR,

2) $y = 2$ je řešením dané DR, protože po dosazení dostaneme identickou rovnost; je to ale jedno z partikulárních řešení, protože je dostaneme z obecného řešení volbou konstanty $K = 0$,

3) $y = 0$ je řešením dané DR, protože po dosazení dostaneme identickou rovnost; jde o singulární řešení, protože ho nemůžeme získat z obecného řešení žádnou volbou konstanty K .

Příklad aplikace diferenciálních rovnic

Probíhá-li růst nějaké veličiny y v čase t, můžeme vyjádřit tento růst jako funkci času, tj.

$$y = h(t).$$

Funkce $y = h(t)$, kde $t \geq 0, y \geq 0$ se nazývá **růstová funkce**.

Její grafické vyjádření se nazývá **růstová křivka**.

Přírůstek $h(t) - h(t_0)$, růstové veličiny za elementární časový interval $t - t_0$ je rychlost růstu :

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = h'(t).$$

Mezi rychlostí růstu a velikostí tohoto růstu, tj. mezi funkcemi $h'(t)$ a $h(t)$ často existuje vzájemný vztah. Z tohoto vztahu můžeme pak odvodit příslušnou růstovou funkci $h(t)$ řešením tzv. diferenciální rovnice.

Z hlediska matematiky se jedná o řešení této základní úlohy :

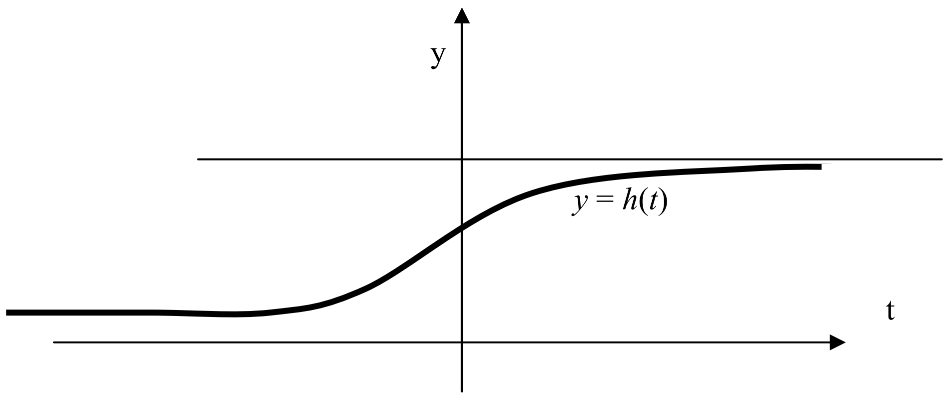
Na intervalu **I** je dána spojitá funkce $f(x)$. Hledáme funkci $y = y(x)$, která na intervalu **I** splňuje vztah $y' = f(x)$.

Řešením této rovnice jsou všechny funkce

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C ,$$

kde *F(x)* je primitivní funkce k funkci $f(x)$ na **I** a *C* integrační konstanta.

Příslušná růstová křivka má často tvar exponenciální křivky (mluvíme pak o exponenciálním růstu) nebo tvar protáhlého písmene S (např. u logistického růstu).



b) **Homogenní diferenciální rovnice**

Def.: Nechť f je spojitá funkce. Diferenciální rovnice tvaru $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ se nazývá **homogenní** DR.

Homogenní DR lze substitucí $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ převést na rovnici s proměnnými separovanými.

Postup řešení :

- ze substituce vyjádříme funkci y a derivujeme ji : $y(x) = u(x).x$

  $y'(x) = u'(x).x + u(x)$

- dosadíme za y' a $\frac{y}{x}$ do zadané rovnice : $u'(x).x + u(x) = f(u)$

- získanou rovnici řešíme separací, přičemž derivaci $u'(x)$ nahradíme podílem $\frac{du}{dx}$

$$\frac{du}{dx}x + u(x) = f(u)$$

$$du.x + u(x).dx = f(u).dx$$

$$x.du = (f(u) - u(x)).dx$$

$$\int \frac{du}{f(u) - u(x)} = \int \frac{dx}{x}.$$

Př.: Určete partikulární řešení homogenní DR $2xy.y' = x^2 + y^2$ splňující počáteční podmínku $y(1) = 0$.

Řešení : Rovnici převedeme vydělením výrazem $2xy$ na tvar $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$:

$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$ a po úpravě $y' = \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x}$, tedy jde skutečně o homogenní rovnici.

Zavedením substituce $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ a derivace $y'(x) = u'(x).x + u(x)$ do této rovnice dostaneme

$$u'x + u = \frac{1}{2u} + \frac{u}{2}.$$

Tuto rovnici řešíme separací $\quad u'x = \frac{1}{2u} + \frac{u}{2} - u$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{1 - u^2}{2u}$$

$$\int \frac{2u}{1 - u^2}\, du = \int \frac{dx}{x}$$

Po integraci $\quad -\ln\left|1 - u^2\right| = \ln|x| + c$

$$\ln\left|\frac{1}{1 - u^2}\right| = \ln K|x|$$

$$\frac{1}{1 - u^2} = Kx$$

$$1 = Kx(1 - u^2)$$

Dosazením substituce $u = \frac{y}{x}$ dostaneme obecné řešení dané DR : $1 = Kx(1 - \frac{y^2}{x^2})$

$$1 = Kx(\frac{x^2 - y^2}{x^2})$$

$$x = K(x^2 - y^2)$$

Dosazením počáteční podmínky $y(1) = 0$ do obecného řešení dostaneme $K = 1$, takže hledané partikulární řešení je $\boxed{x = x^2 - y^2}$.

c) Lineární diferenciální rovnice

Def.: Nechť *a*, *b* jsou funkce spojité na intervalu *I*. Rovnice tvaru $y' + a(x).y = b(x)$ se nazývá **lineární diferenciální rovnice** 1. řádu.
Je-li $b(x) \equiv 0$ na *I*, nazývá se rovnice homogenní, v opačném případě jde o rovnici nehomogenní.

Řešení homogenní lineární DR 1. řádu můžeme určit separací. Výsledkem tohoto postupu je vzorec

$$\boxed{y = c.e^{-\int a(x)dx}}$$

Odvození : $y' + a(x).y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -a(x).y \qquad /: y \quad /.dx \text{ kde } y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int a(x)\,dx$$

$$\ln|y| = -\int a(x)\,dx + c$$

$$\ln|y| = \ln e^{-\int a(x)\,dx}.c$$

$$y = c.e^{-\int a(x)dx}$$

Řešení nehomogenní lineární DR 1. řádu určujeme metodou variace konstanty. Postup :

- nejprve vyřešíme příslušnou homogenní DR a řešení označíme $\bar{y} = c.e^{-\int a(x)dx}$,
- obecné řešení nehomogenní rovnice budeme hledat ve tvaru $y = c(x).e^{-\int a(x)dx}$, tedy konstantu c nahradíme (zatím neznámou) funkcí $c(x)$,
- do zadané rovnice dosadíme za y a y' a vyjádříme funkci $c'(x)$,
- integrací získané rovnice určíme hledanou funkci $c(x)$.

Uvedený postup lze vyjádřit vzorcem $\boxed{y = e^{-\int a(x)dx}.\left[\int b(x).e^{\int a(x)dx}dx + c\right]}$.

Př. : Určete řešení DR $y' + \operatorname{tg} x.y = 0$.

Řešení : Jde o homogenní lineární rovnici, kde $a(x) = \operatorname{tg} x$. Její obecné řešení určíme tedy pomocí vztahu

$$y = c.e^{-\int a(x)dx} = c.e^{-\int \operatorname{tg} x\,dx} = c.e^{-\int \frac{\sin x}{\cos x}dx} = c.e^{\ln|\cos x|} = c.|\cos x| = c.\cos x$$

Př.: Určete partikulární řešení DR $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$ pro počáteční podmínku $y(0) = 1$.

Řešení : Jde o nehomogenní lineární rovnici, kterou nejprve vydělíme, abychom ji převedli na základní tvar $y' - 2\dfrac{y}{x+1} = (x+1)^3$.

Tedy $a(x) = -\dfrac{2}{x+1}, f(x) = (x+1)^3$.

Řešení příslušné homogenní rovnice má tvar

$$\overline{y} = c.e^{-\int a(x)dx} = c.e^{-\int \frac{-2}{x+1}dx} = c.e^{2\int \frac{dx}{x+1}} = c.e^{2\ln|x+1|} = c.e^{\ln(x+1)^2} = c.(x+1)^2$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice budeme hledat ve tvaru $y = c(x).e^{-\int a(x)dx} = c(x).(x+1)^2$.

Do zadané rovnice dosadíme za $y = c(x).(x+1)^2$ a za $y' = c'(x).(x+1)^2 + c(x).2(x+1)$:

$$c'(x).(x+1)^2 + c(x).2(x+1) - 2\frac{c(x).(x+1)^2}{x+1} = (x+1)^3$$

Z této rovnice postupně vyjádříme funkci $c'(x)$ (na levé straně rovnice obvykle vzniknou tři sčítanci, ze kterých se druhý a třetí odečtou)

$$c'(x).(x+1)^2 = (x+1)^3$$

$$c'(x) = (x+1)$$

Rovnici integrujeme, abychom určili hledanou funkci $c(x)$

$$c(x) = \int (x+1)\,dx$$

$$c(x) = \frac{x^2}{2} + x + c$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice má tedy tvar $y = \left(\dfrac{x^2}{2} + x + c\right).(x+1)^2$.

Pro výpočet partikulárního řešení dosadíme do obecného řešení počáteční podmínku $y(0) = 1$.

$$1 = \left(\frac{0^2}{2} + 0 + c\right).(0+1)^2$$

$$c = 1$$

Hledané partikulární řešení dané diferenciální rovnice je $\boxed{y = \left(\dfrac{x^2}{2} + x + 1\right).(x+1)^2}$.

3) Diferenciální rovnice druhého řádu

Def.: Lineární diferenciální rovnice 2.řádu (dále jen LDR 2.řádu) je rovnice $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, kde $p(x), q(x), f(x)$ jsou funkce spojité na intervalu *I*.

LDR 2.řádu tvaru $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ se nazývá **homogenní**,

LDR 2.řádu tvaru $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ se nazývá **nehomogenní**.

Obecné řešení LDR 2.řádu obsahuje 2 nezávislé konstanty c_1, c_2.

Počáteční podmínky pro určení partikulárního řešení mají tvar $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'$.

Def.: Funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ se nazývají **lineárně závislé** na intervalu I, existuje-li reálné číslo *k* tak, že pro všechna $x \in I$ platí $y_1(x) = k.y_2(x)$.

Pokud takové číslo neexistuje, říkáme, že funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou na intervalu *I* **lineárně nezávislé**.

Věta: Jsou-li funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ lineárně nezávislá řešení **homogenní LDR 2. řádu** na intervalu I, je funkce $y = c_1.y_1(x) + c_2.y_2(x)$ **obecné řešení** této rovnice na intervalu *I*.

Funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ z předchozí věty nazýváme **fundamentální systém řešení** homogenní LDR2. ř.

Věta: Jsou-li funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ lineárně nezávislá řešení homogenní LDR 2. řádu na intervalu *I* a $y_p(x)$ je nějaké partikulární řešení odpovídající nehomogenní LDR 2. řádu na intervalu *I*, pak funkce $y = c_1.y_1(x) + c_2.y_2(x) + y_p(x)$ je **obecné řešení nehomogenní LDR 2. řádu** na intervalu *I*.

Z předchozí věty vyplývá, že k určení obecného řešení nehomogenní LDR 2. řádu stačí najít dvě lineárně nezávislá řešení příslušné homogenní LDR 2. řádu a libovolné partikulární řešení nehomogenní rovnice.

Vyšetřování lineární závislosti a nezávislosti funkcí :

Mají-li funkce y_1, y_2 derivaci 1. řádu, je možné o jejich lineární závislosti či nezávislosti rozhodnout pomocí determinantu $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$, který nazýváme **wronskián.**

Jsou-li totiž funkce y_1, y_2 LZ na intervalu **I,** pak $W(y_1, y_2) = 0$ pro všechna $x \in \mathrm{I}$.

Pokud $W(y_1, y_2) \neq 0$ alespoň v jednom bodě intervalu **I,** jsou funkce y_1, y_2 LN.

Př. 1. : Rozhodněte, zda jsou funkce $y_1 = e^x, y_2 = e^{3x}$ LZ nebo LN.

Př. 2. : Ověřte, zda funkce $y_1 = x, y_2 = \dfrac{1}{x}$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice $x^2.y'' + x.y' - y = 0$.

Lineárně nezávislá řešení však umíme najít pouze v některých případech. Jeden z nich bude v následujícím odstavci podrobněji popsán.

Homogenní LDR 2. řádu s konstantními koeficienty

Jsou-li $p(x)$ a $q(x)$ konstantní funkce, nazývá se LDR 2.řádu rovnicí s konstantními koeficienty. Je to tedy rovnice tvaru $\boxed{y'' + py' + qy = 0}$, kde p a q jsou konstanty (budeme ji stručně značit $L^2[y] = 0$).

Hledejme řešení této rovnice ve tvaru $y = e^{rx}$.

Musí tedy platit $\quad (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + q(e^{rx}) = 0$

$$r^2 e^{rx} + pre^{rx} + qe^{rx} = 0$$

$$e^{rx}(r^2 + pr + q) = 0$$

Funkce $y = e^{rx}$ je tedy řešením rovnice $L^2[y] = 0,$ pokud $r^2 + pr + q = 0$. Tuto rovnici s neznámou r nazýváme **charakteristickou rovnicí** pro rovnici $L^2[y] = 0$. Její kořeny r určují fundamentální systém řešení a tím i obecné řešení této rovnice na základě následující věty.

Věta: Nechť charakteristická rovnice $r^2 + pr + q = 0$ DR $L^2[y] = 0$ má kořeny r_1, r_2. Potom

a) pro reálné různé kořeny $r_1 \neq r_2$ tvoří fundamentální systém řešení funkce $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$ a obecné řešení rovnice $L^2[y] = 0$ má tvar $\boxed{y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}}$.

b) pro reálný dvojnásobný kořen $r_{1,2} = r$ tvoří fundamentální systém řešení funkce $y_1 = e^{rx}, y_2 = re^{rx}$ a obecné řešení rovnice $L^2[y] = 0$ má tvar $\boxed{y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}}$.

c) pro komplexní kořeny $r_{1,2} = a \pm bi$ tvoří fundamentální systém řešení funkce $y_1 = e^{ax} \cos bx,$ $y_2 = e^{ax} \sin bx$ a obecné řešení rovnice $L^2[y] = 0$ má tvar $\boxed{y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)}$.

Určování obecného řešení homogenní LDR 2. řádu (a podobně n-tého řádu) s konstantními koeficienty se tedy převádí na řešení algebraické rovnice 2. stupně (n-tého stupně).

Př. : Řešte diferenciální rovnici $y'' + y' - 2y = 0$.

Řešení : Jde o homogenní LDR 2. řádu.

Příslušná charakteristická rovnice $r^2 + r - 2 = 0$ má kořeny $r_1 = 1,\ r_2 = -2,$ tedy fundamentální systém řešení tvoří funkce $y_1 = e^x, y_2 = e^{-2x}$ a obecné řešení má tvar $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$.

Nehomogenní LDR 2. řádu s konstantními koeficienty

Jde o rovnice tvaru $y'' + py' + qy = f(x)$, které budeme stručně značit $L^2[y] = f(x)$.

Podle předposlední věty je pro určení obecného řešení této rovnice potřeba znát nějaké partikulární řešení této rovnice a fundamentální systém řešení příslušné homogenní rovnice. Pak lze obecné řešení napsat ve tvaru : $\boxed{y = c_1 . y_1(x) + c_2 . y_2(x) + y_P(x)}$.

Partikulární řešení rovnice $L^2[y] = f(x)$ je možné určit metodou variace konstant. Podobně jako v případě lineární DR 1. řádu ho budeme hledat ve tvaru, kdy konstanty v obecném řešení příslušné homogenní rovnice nahradíme funkcemi $c_1(x), c_2(x)$, tedy ve tvaru $y_P(x) = c_1(x).y_1(x) + c_2(x).y_2(x)$. Funkce $c_1(x), c_2(x)$ lze určit řešením soustavy :

$$c_1'(x).y_1(x) + c_2'(x).y_2(x) = 0$$
$$c_1'(x).y_1'(x) + c_2'(x).y_2'(x) = f(x).$$

Použijeme-li přitom Cramerovy vzorce, kde determinanty $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}, W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y' & f(x) \end{vmatrix}$

nazveme wronskiány, platí $c_1'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}, \quad c_2'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y' & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}.$

Integrací určíme hledané funkce $c_1(x), c_2(x)$ a obecné řešení pak bude mít tvar

$$\boxed{y = c_1.y_1(x) + c_2.y_2(x) + y_P(x), \text{ kde } y_P(x) = c_1(x).y_1(x) + c_2(x).y_2(x).}$$

Př.: Určete řešení diferenciání rovnice $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$.

Řešení : Příslušná homogenní rovnice má tvar $y'' - 2y' + y = 0$.

Její charakteristická rovnice $r^2 - 2r + 1 = 0$ má řešení $r_{1,2} = 1$, tedy fundamentální systém řešení homogenní rovnice tvoří funkce $y_1 = e^x, y_2 = xe^x$ a její obecné řešení má tvar $\bar{y} = c_1 e^x + c_2 xe^x$.

Hledáme-li partikulární řešení zadané rovnice ve tvaru $y_P(x) = c_1(x).e^x + c_2(x).xe^x$, vyhovují funkce $c_1(x), c_2(x)$ soustavě

$$c_1'(x).e^x + c_2'(x).xe^x = 0$$
$$c_1'(x).e^x + c_2'(x).(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{1+x^2}.$$

Soustavu vyřešíme Cramerovými vzorci, přičemž

$$W = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x} + xe^{2x} - xe^{2x} = e^{2x}, \; W_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \dfrac{e^x}{1+x^2} & e^x + xe^x \end{vmatrix} = -\frac{xe^{2x}}{1+x^2}, \; W_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \dfrac{e^x}{1+x^2} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{1+x^2}.$$

Potom $c_1(x) = \displaystyle\int \frac{W_1}{W} dx = \int -\frac{x}{1+x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln\left|1+x^2\right|, \quad c_2(x) = \int \frac{W_2}{W} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x.$

Partikulární řešení zadané rovnice je tedy $y_P(x) = (-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|).e^x + (\operatorname{arctg} x).xe^x$, a její obecné řešení má tvar $y = c_1.y_1(x) + c_2.y_2(x) + y_P(x) = c_1 e^x + c_2 xe^x + (-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|).e^x + (\operatorname{arctg} x).xe^x$.