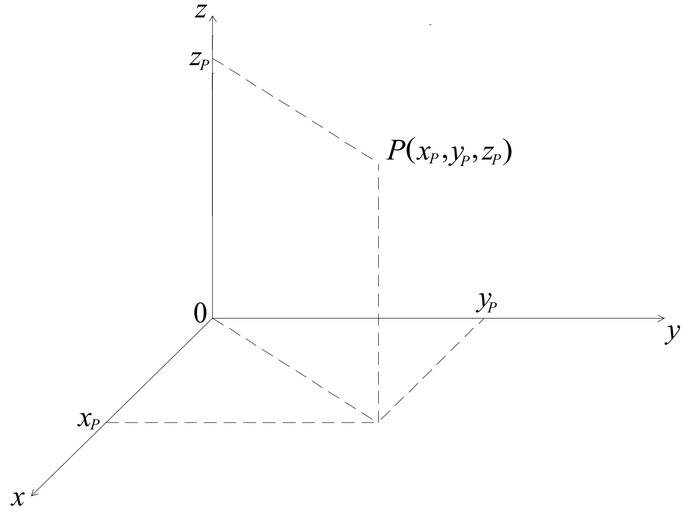
Diferenciální počet funkcí dvou proměnných

1) Význačné body a množiny bodů v prostoru

Souřadnicová soustava v prostoru

Každému bodu P v prostoru přiřazujeme v kartézské souřadnicové soustavě uspořádanou trojici reálných čísel, tzv. kartézských souřadnic $P(x_P, y_P, z_P)$.



Množinu všech uspořádaných trojic reálných čísel (x, y, z) budeme nazývat **trojrozměrným prostorem.**

Je-li vzdálenost bodů $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ definována vzorcem

$$\rho(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}\ ,$$

nazýváme trojrozměrný metrický prostor **trojrozměrným euklidovským prostorem.** Značíme jej E_3.

Obdobně by se definoval vícerozměrný euklidovský prostor E_n.

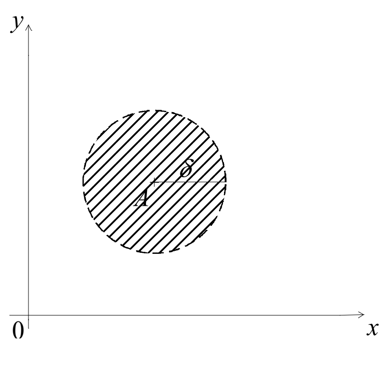
Libovolná neprázdná množina Ω bodů v prostoru E_n se nazývá ***n*-rozměrný obor**.

Okolí bodu

Množinu všech bodů X v prostoru v E_n, jejichž vzdálenost od daného bodu A je menší než zvolené číslo $\delta > 0$, nazýváme $\delta -$ **okolím bodu** A. Značíme jej $U(A,\delta)$ nebo $U(A)$.

Redukované okolí : v okolí bodu A vynecháme bod A. Značíme ho $\widetilde{U}(A)$.

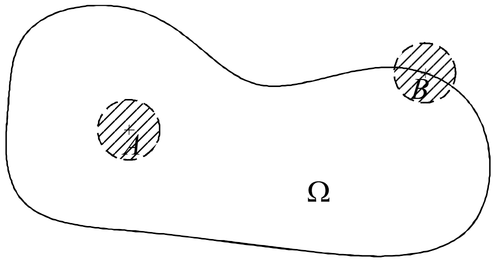
Například v rovině, tedy v prostoru E_2, představuje okolí $U(A,\delta)$ bodu A množinu všech bodů uvnitř kruhu se středem v bodě A a poloměrem δ :



Definice :

1) Bod $A \in \Omega \subseteq E_n$ se nazývá **vnitřní bod** oboru Ω, když existuje okolí $U(A)$, které celé patří do oboru Ω.

2) Bod B se nazývá **hraniční bod** oboru Ω, když v každém jeho okolí $U(B)$ leží aspoň jeden bod z oboru Ω a zároveň aspoň jeden bod, který do oboru Ω nepatří.



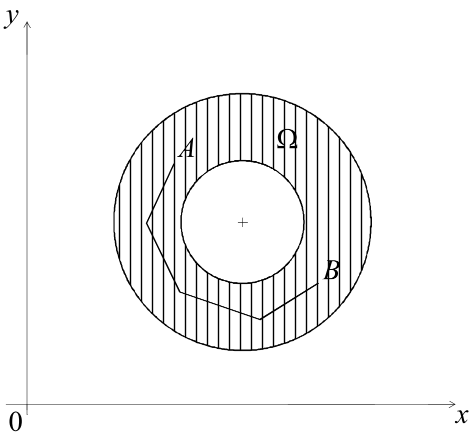
3) Obor $\Omega \subseteq E_n$ se nazývá **omezený** (nebo ohraničený), jsou-li všechny souřadnice x_k libovolného jeho bodu X konečná čísla. V opačném případě se obor Ω nazývá neohraničený.

4) Obor $\Omega \subseteq E_n$ se nazývá **otevřený**, když každý jeho bod je vnitřní.

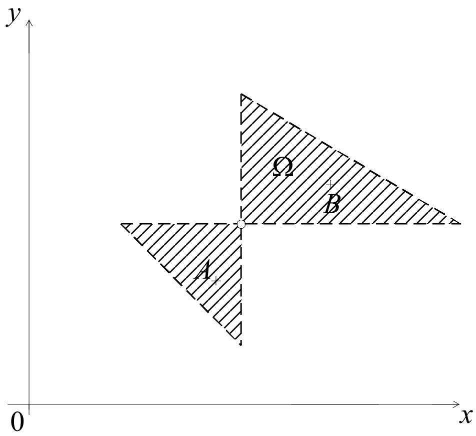
Obor $\Omega \subseteq E_n$ se nazývá **uzavřený**, když obsahuje všechny své hraniční body.

5) Obor $\Omega \subseteq E_n$ se nazývá **souvislý**, když každé dva jeho body můžeme spojit čarou, která celá leží v oblasti Ω.

6) Otevřený a souvislý obor Ω se nazývá **oblast**, uzavřený a souvislý obor Ω se nazývá **uzavřená oblast**.



souvislý obor



obor, který není souvislý

2) Definice funkce dvou proměnných

Definice : Je-li každému bodu $P(x, y)$ z oboru $\Omega \subseteq E_2$ přiřazeno právě jedno reálné číslo z, říkáme, že v oboru Ω je definována **funkce dvou proměnných** x, y a píšeme $z = f(x, y)$ nebo $z = f(P)$.
(x, y – jsou nezávisle proměnné neboli argumenty, z – je závisle proměnná nebo funkční hodnota)

Definičním oborem funkce $z = f(x, y)$ (není-li pro danou funkci předepsán), rozumíme množinu všech bodů (x, y) v rovině, pro něž výraz $f(x, y)$ nabývá reálné hodnoty.

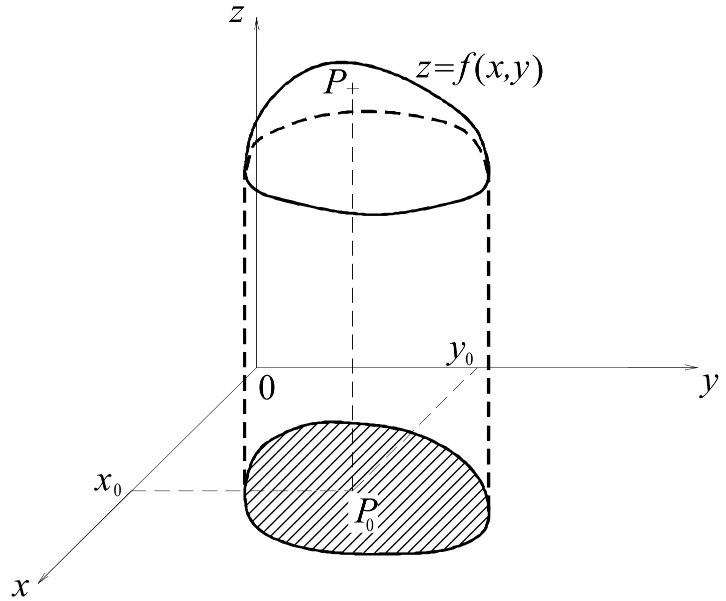
Podmínky pro určování definičních oborů :

- Racionální lomené funkce $\mathbf{R}(x, y) = \dfrac{\mathbf{P}_m(x, y)}{\mathbf{Q}_n(x, y)}$ mají definiční obor celou rovinu xy mimo bodů, pro které je funkce ve jmenovateli rovna nule.
- Iracionální funkce tvaru $z = \sqrt[2n]{f(x, y)}$ jsou definovány pro body (x, y), pro které platí nerovnost $f(x, y) \geq 0.$
- Logaritmické funkce $z = \log_a f(x, y)$ jsou definovány pro body (x, y), pro které platí $f(x, y) > 0.$
- Cyklometrické funkce tvaru $z = \arcsin f(x, y)$, $z = \arccos f(x, y)$ jsou definovány pro body (x, y), pro které platí $-1 \leq f(x, y) \leq 1.$

Grafické znázornění funkce dvou proměnných

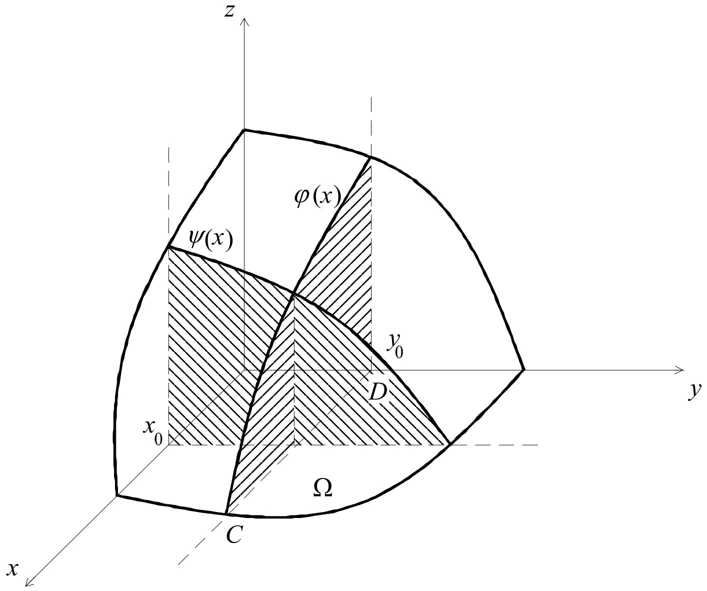
Znázorníme-li definiční obor $\Omega \subseteq E_2$ v rovině xy, můžeme libovolnému bodu $P_0(x_0, y_0)$ z oboru Ω přiřadit hodnotu z_0 tak, aby platilo $z_0 = f(x_0, y_0)$. Trojice (x_0, y_0, z_0) potom určuje bod P v prostoru E_3.

Definice : **Grafem funkce** $f(x, y)$, kde $(x, y) \in \Omega \subseteq E_2$, nazýváme množinu všech bodů (x, y, z) v prostoru E_3, jejichž souřadnice x, y, z vyhovují rovnici $z = f(x, y)$. Takový graf nazýváme plochou.

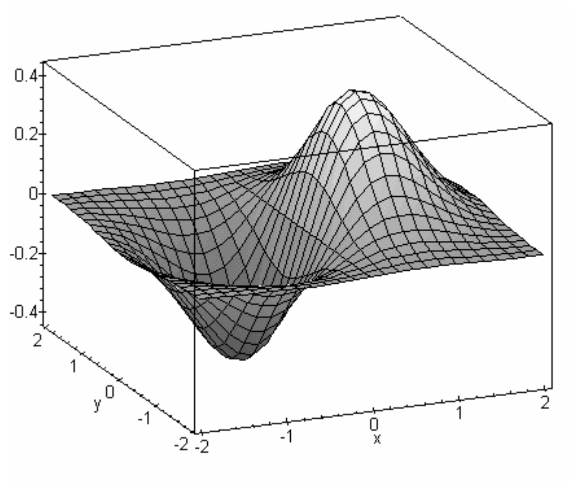


Při znázornění funkce $z = f(x,y)$ je často užitečné sestrojit **řezy grafu rovinami**. Jsou to průsečnice grafu s význačnými rovinami (např. souřadnicové roviny, roviny s nimi rovnoběžné nebo roviny procházející souřadnicovou osou).

Dosadíme-li do rovnice $z = f(x,y)$ za y číslo y_0, obdržíme funkci $z = f(x,y_0) = \varphi(x)$ jedné proměnné x. Jejím grafem v rovině $y = y_0$ je pak ta čára na ploše $z = f(x,y)$, která leží v rovině $y = y_0$. Nazývá se **řez plochy** $z = f(x,y)$ rovinou $y = y_0$.

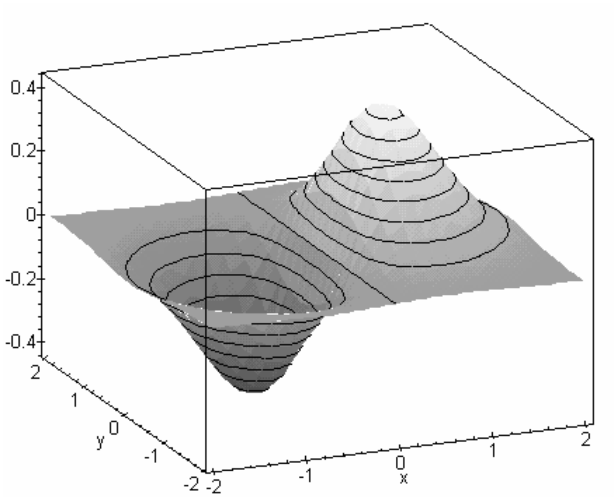


Příklad řezů plochy :

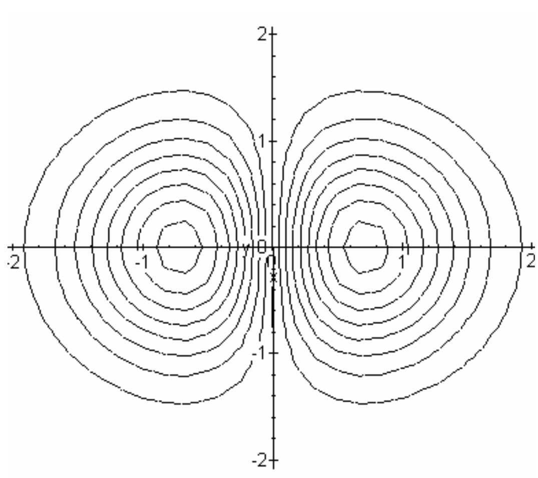


K významným řezům plochy $z = f(x,y)$ patří její řezy rovinami $z = c$, které jsou kolmé na osu z. Tyto řezy se nazývají **vrstevnice.**

Znázornění vrstevnic funkce :



Tytéž vrstevnice znázorněné v rovině xy :



3) Limita a spojitost funkcí dvou proměnných

Pojem limity funkce dvou proměnných se zavádí analogicky jako u funkce jedné proměnné. Tedy říkáme, že funkce $f(x,y)$ má v bodě (x_0,y_0) limitu L, jestliže se funkční hodnoty $f(x,y)$ neomezeně blíží číslu L, blíží-li se bod (x,y) bodu (x_0,y_0). Problém limity funkce dvou proměnných a jejího výpočtu je však mnohem složitější. Zatímco u funkce jedné proměnné se při limitním přechodu $x \to x_0$ bod x blížil k bodu x_0 vždy jen po ose x, u funkce dvou proměnných se může bod (x,y) blížit k bodu (x_0,y_0) po libovolné křivce.

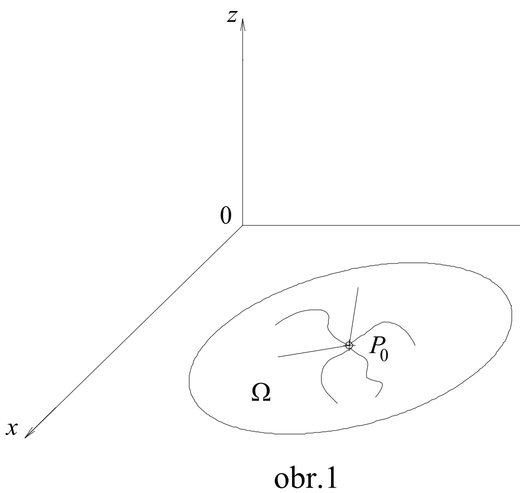
Definice : Říkáme, že funkce $f(x,y)$ má v bodě $P_0(x_0,y_0)$ limitu L, když k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že pro všechny body $X(x,y) \in \tilde{U}(P_0,\delta)$ platí $|f(x,y) - L| < \varepsilon$.

Píšeme $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ nebo $\lim\limits_{X\to P_0} f(X) = L$.

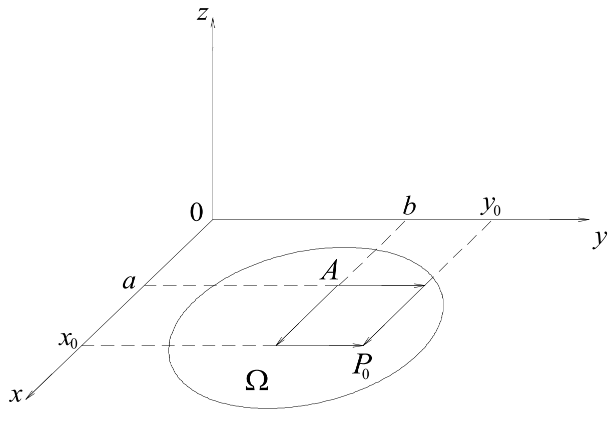
Vlastnosti limity:

1) Funkce $f(x,y)$ má v bodě (x_0,y_0) nejvýše jednu limitu.
2) Jestliže $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_f$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L_g$, platí
   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[h \cdot f(x,y) \pm k \cdot g(x,y)\right] = hL_f \pm kL_g$, kde h, k jsou konstanty,
   b) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[f(x,y) \cdot g(x,y)\right] = L_f \cdot L_g$,
   c) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L_f}{L_g}$ pro $L_g \neq 0$.

Výše definovanou limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ nazýváme dvojnou limitou. Jestliže existuje, můžeme se k bodu $P_0(x_0,y_0)$ blížit po různých cestách, aniž by se její hodnota změnila. Existují-li však dvě různé cesty vedoucí k různým hodnotám limity, potom dvojná limita $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ neexistuje (obr.1).



obr.1



obr.2

V praktických výpočtech se nejčastěji setkáváme s případem, kdy bod $A(a,b)$ se k bodu $P_0(x_0,y_0)$ přibližuje po pravoúhlé cestě dvěma způsoby. Nejprve po přímkách $y = b$, $x = x_0$ a pak po přímkách $x = a$, $y = y_0$ (obr.2). Mluvíme o **dvojnásobné** (nebo postupné) **limitě.**

Tyto limity zapisujeme takto : $L_1 = \lim_{y \to y_0}\left[\lim_{x \to x_0} f(x,y)\right]$, resp. $L_2 = \lim_{x \to x_0}\left[\lim_{y \to y_0} f(x,y)\right]$.

Počítáme je postupným limitním přechodem vždy funkce jedné proměnné, přičemž druhou proměnnou považujeme za konstantu. Z předešlého vyplývá, že rovnost $L_1 = L_2$ dvojnásobných limit (pokud existují) je nutnou podmínkou pro existenci dvojné limity L. Pak platí $L = L_1 = L_2$.

Rovnost $L_1 = L_2$ však není dostatečnou podmínkou pro existenci dvojné limity L.

Při výpočtu dvojnásobných limit používáme postupy, známé z výpočtů limit funkce jedné proměnné.

Příklad : Použitím postupných limit ukažte, že limita $L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy - x + y}{xy + x + y}$ neexistuje.

Řešení:

$$L_1 = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{xy - x + y}{xy + x + y}\right] = \lim_{y\to 0}\frac{y}{y} = \lim_{y\to 0} 1 = 1,$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{xy - x + y}{xy + x + y}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{x} = \lim_{y\to 0} -1 = -1.$$

Protože $L_1 \neq L_2$, dvojná limita L neexistuje.

Jak je zřejmé je výpočet dvojné limity obtížnější než výpočet limit funkce jedné proměnné. K počítání limit neurčitých výrazů typu $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ a $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$ nemáme totiž u funkcí více proměnných k dispozici žádnou analogii L´Hospitalova pravidla. V některých případech je však možné použít postupů, analogických těm, které jsme používali při výpočtu limit funkce jedné proměnné. Pokud po dosazení obdržíme neurčitý výraz, snažíme se funkci upravit například tak, aby se dala krácením zjednodušit.

Spojitost funkcí více proměnných

Definice : 1) Funkce $f(x,y)$ se nazývá **spojitá v bodě** (x_0, y_0) svého definičního oboru Ω, platí-li

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

2) Funkce $f(x,y)$ se nazývá **spojitá v oboru** Ω, je-li spojitá v každém bodě tohoto oboru.

Jestliže funkce není v bodě (x_0, y_0) spojitá, říkáme, že tento bod je **bodem nespojitosti**.

Příklad : Určete body nespojitosti funkce $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$.

Řešení: Funkce je spojitá všude kromě bodů $(x,y) \in E_2$, pro které platí $x^2 - y^2 = 0$, neboli $(x-y)(x+y) = 0$. Jsou to všechny body přímek $y = x$ a $y = -x$.

Věta o vlastnostech spojité funkce :

Věta : Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá v uzavřené a ohraničené oblasti Ω. Pak platí :

1) funkce $f(x,y)$ je v dané oblasti omezená (tzn. existuje číslo K tak, že pro všechny body $(x,y) \in \Omega$ platí $|f(x,y)| < K$),

2) funkce $f(x,y)$ nabývá v některém bodě $(x_1, y_1) \in \Omega$ maximální hodnoty a v některém bodě $(x_2, y_2) \in \Omega$ minimální hodnoty.

4) Parciální derivace

Mějme funkci $z = f(x, y)$ definovanou v oblasti Ω.. Považujeme-li např. proměnnou y za konstantní veličinu, pak funkci $z = f(x, y)$ můžeme chápat jako funkci jedné proměnné x. Má-li tato funkce v nějakém bodě oblasti Ω derivaci, nazýváme ji parciální derivací funkce $z = f(x, y)$ v tomto bodě podle proměnné x. Analogicky bychom určili parciální derivaci pro druhou proměnnou.

Definice : Nechť funkce $z = f(x, y)$ je definovaná v okolí bodu $P_0(x_0, y_0)$.

1) Má-li funkce $g(x) = f(x, y_0)$ proměnné x v bodě $x = x_0$ derivaci $g'(x_0)$, nazýváme ji **parciální derivací podle *x*** funkce $z = f(x, y)$ v bodě $P_0(x_0, y_0)$ a značíme ji $f'_x(x_0, y_0)$.

Platí tedy
$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

2) Podobně **parciální derivaci podle *y*** funkce $z = f(x, y)$ v bodě $P_0(x_0, y_0)$ definujeme vztahem

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

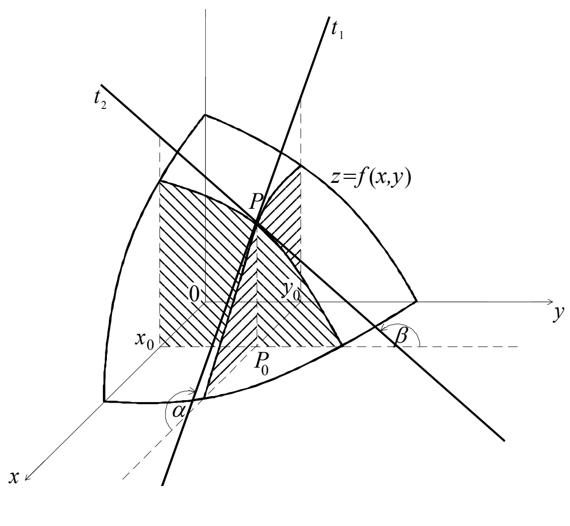
Parciální derivace značíme i různými jinými symboly, např. $f'_x(P_0), \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial x}, z'_x$.

Z definice vyplývá, že při výpočtu parciální derivace $f'_x(x, y)$ považujeme x za proměnnou, kdežto y za konstantu. Obdobně při výpočtu $f'_y(x, y)$ považujeme y za proměnnou a x za konstantu. Pracujeme tedy s funkcí $f(x, y)$ jako s funkcí jedné proměnné. Používáme přitom pravidla, která platí pro derivování funkce jedné proměnné.

Geometrický význam parciální derivace

Podobně jako v případě funkce jedné proměnné má i parciální derivace funkce dvou proměnných v bodě $P_0(x_0, y_0)$ geometrický význam.

Parciální derivace $f'_x(x_0, y_0)$, definovaná jako derivace funkce $g(x) = f(x, y_0)$ v bodě $x = x_0$ geometricky představuje směrnici tečny t_1, sestrojené v bodě $P(x_0, y_0, z_0)$, k řezu plochy $z = f(x, y)$ rovinou $y = y_0$. Je tedy $f'_x(x_0, y_0) = tg\alpha$, kde α značí úhel, který svírá příslušná tečna s kladnou částí osy x.



Podobně parciální derivace $f'_y(x_0, y_0)$ představuje směrnici tečny t_2 sestrojené v bodě P na ploše $z = f(x, y)$ rovinou $x = x_0$. Je tedy $f'_y(x_0, y_0) = tg\beta$, kde β značí úhel, který svírá příslušná tečna s kladnou částí osy y.

Tečná rovina a normála plochy

Rovina ρ, která je určená tečnami t_1, t_2, se nazývá **tečná rovina plochy** $z = f(x, y)$ v bodě $P(x_0, y_0, z_0)$.

Její rovnice má tvar $\rho \equiv z - z_0 = f'_x(P_0)(x - x_0) + f'_y(P_0)(y - y_0)$.

Přímka kolmá na tečnou rovinu plochy v jejím bodě dotyku P se nazývá **normála plochy** v tomto bodě.

Její parametrické rovnice mají tvar $x = x_0 + f'_x(P_0)t$,

$$y = y_0 + f'_y(P_0)t,$$

$$z = z_0 - t, \qquad \text{kde } t \in (-\infty, \infty).$$

Příklad : Určete tečnou rovinu a normálu plochy o rovnici $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ v bodě $P(3,4,?)$.

Řešení: Nejprve určíme hodnotu funkce v bodě $P_0(3,4)$

$$f(P_0) = f(3,4) = \sqrt{9 + 16} - 12 = -7.$$

Dále vypočítáme parciální derivace v bodě P_0 :

$$f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - y, \quad f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x.$$

$$f'_x(P_0) = \frac{3}{5} - 4 = -\frac{17}{5}, \quad f'_y(P_0) = \frac{4}{5} - 3 = -\frac{11}{5}.$$

Rovnice tečné roviny má tedy tvar

$$z + 7 = -\frac{17}{5}(x - 3) - \frac{11}{5}(y - 4) \quad \text{a po úpravě} \quad 17x + 11y + 5z - 60 = 0.$$

Parciální derivace vyšších řádů

Definice : Nechť funkce $z = f(x, y)$ má v každém bodě oboru Ω parciální derivace f'_x, f'_y. Mají-li tyto nové funkce $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ v oboru $\Omega_1 \subseteq \Omega$ parciální derivaci podle x, případně podle y, nazýváme je **parciálními derivacemi 2. řádu** a značíme je

a) $f''_{xx}(x, y)$, b) $f''_{xy}(x, y)$, c) $f''_{yx}(x, y)$, d) $f''_{yy}(x, y)$.

Parciální derivaci druhého řádu značíme i jinak, např. $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}, z''_{xx}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ atd.

Parciálním derivováním podle x nebo podle y parciálních derivací 2. řádu dostaneme parciální derivace 3. řádu neboli třetí parciální derivace. Analogicky se definují parciální derivace funkce $z = f(x, y)$ řádu $n > 3$. Přitom pořadí symbolů x a y v indexu (případně ve jmenovateli) značí pořadí, v jakém jsme derivovali. Obecně parciální derivace řádu k funkce $f(x, y)$ dostaneme z parciálních derivací řádu $k - 1$ opětovným derivováním podle x, popř. podle y.

Příklad : Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu funkce $z=\dfrac{y^3}{1-x^2}$.

Řešení: Nejprve určíme parciální derivace prvního řádu

$$z'_x=\frac{2xy^3}{(1-x^2)^2},\ z'_y=\frac{3y^2}{1-x^2}.$$

Jejich derivováním pak dostaneme

$$z'_{xx}=\frac{2y^3(1-x^2)^2-2xy^3\cdot 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4}=\frac{2y^3(1+3x^2)}{(1-x^2)^3},\ z'_{yy}=\frac{6y}{1-x^2},\ z'_{xy}=\frac{6xy^2}{(1-x^2)^2}=z'_{yx}.$$

Vyšší parciální derivace, vzniklé derivováním podle různých argumentů, se nazývají smíšené. V uvedené příkladě jsou smíšené parciální derivace z''_{xy}, z''_{yx} stejné. Následující věta však ukazuje, že nejde o náhodný jev, protože u smíšených parciálních derivací za jistého předpokladu nezáleží na pořadí proměnných, podle kterých derivujeme.

Věta : (Schwarzova) Jestliže smíšené parciální derivace f''_{xy}, f''_{yx} funkce $z=f(x,y)$ existují v okolí $U(P_0)$ bodu $P_0(x_0,y_0)$ a jsou v tomto bodě spojité, pak platí $f''_{xy}(P_0)=f''_{yx}(P_0)$.

Derivace implicitních funkcí

V diferenciálním počtu funkce jedné proměnné jste se seznámili s funkcí danou implicitně, která byla definovaná takto :

Definice 2.16: Je-li rovnicí $F(x,y)=0$ určena na nějakém intervalu **I** funkce $y=f(x)$ tak, že je $F(x,f(x))=0$ pro všechna $x\in\mathbf{I}$, nazývá se funkce $y=f(x)$ implicitní funkcí určenou rovnicí $F(x,y)=0$.

Pro derivaci implicitní funkce platí $f'(x_0)=-\dfrac{F'_x(P_0)}{F'_y(P_0)}$.

Vzorec můžeme snadno dostat derivováním rovnosti $F(x,f(x))=0$ podle x, kde složená funkce $F(x,y)$ má složky $x=x,\ y=f(x)$.

Dostaneme

$$F'_x\cdot\frac{dx}{dx}+F'_y\cdot\frac{dy}{dx}=0 \text{ neboli } F'_x+F'_y y'=0. \text{ Pro } F'_y\neq 0 \text{ je odsud } y'=-\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Příklad : Vypočtěte derivaci y' funkce dané implicitně rovnicí $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

Řešení: Dané funkci odpovídá rovnice $\ln\sqrt{x^2+y^2}-\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=0$.

Pak $F'_x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$,

$$F'_y = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{y-x}{x^2+y^2}, \text{ a tedy } y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{x+y}{x-y}.$$

Funkce dvou proměnných daná implicitně.

Definice : Je-li rovnicí $F(x, y, z) = 0$ určena na oblasti $\Omega \in E_2$ funkce $z = f(x, y)$ tak, že pro všechna $(x, y) \in \Omega$ platí $F[x, y, f(x, y)] = 0,$ nazývá se funkce $z = f(x, y)$ implicitní funkcí určenou rovnicí $F(x, y, z) = 0.$

Pro její derivaci platí: $f'_x(P_0) = -\dfrac{F'_x(P)}{F'_z(P)}, f'_y(P_0) = -\dfrac{F'_y(P)}{F'_z(P)}.$

Příklad : Vypočtěte parciální derivace $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ funkce dané implicitně rovnicí

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

Řešení: Nejprve určíme parciální derivace F'_x, F'_y, F'_z

$$F'_x = 3x^2 - 3yz, \ F'_y = 6y^2 - 3xz - 2, \ F'_z = 3z^2 - 3xy.$$

Pak
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3(x^2 - yz)}{3(z^2 - xy)} = \frac{x^2 - yz}{xy - z^2}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y^2 - 3xz - 2}{3(xy - z^2)}.$$

5) Totální diferenciál

Definice 2.12: Má-li funkce $z = f(x, y)$ v bodě $P_0(x_0, y_0)$ a v jeho okolí $U(P_0)$ spojité parciální derivace $f'_x(P_0)$ a $f'_y(P_0)$, nazýváme **totálním (nebo úplným) diferenciálem** funkce $f(x, y)$ v bodě P_0 výraz $df(P_0) = f'_x(P_0)h + f'_y(P_0)k,$ kde $h = x - x_0, \ k = y - y_0$ jsou přírůstky argumentů $x, y,$ přičemž bod $(x, y) = (x_0 + h, y_0 + k) \in U(P_0).$

Uvažujeme-li funkci $f(x, y) = x,$ pak pro její totální diferenciál platí $dx = 1 \cdot h + 0 \cdot k = h.$ Podobně pro funkci $f(x, y) = y$ dostáváme totální diferenciál $dy = 0 \cdot h + 1 \cdot k = k.$

Přírůstky h, k můžeme tedy považovat za diferenciály argumentů $x, y,$ takže vztah pro totální diferenciál lze psát ve tvaru $dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy,$ případně ve tvaru $dz = z'_x dx + z'_y dy.$

Výrazy $f'_x dx$, $f'_y dy$ nazýváme parciální diferenciály.

Příklad : Vypočítejte totální diferenciál funkce $z = \sin xy.$

Řešení: Nejprve určíme parciální derivace prvního řádu

$$z'_x = y \cos xy, \ z'_y = x \cos xy.$$

Totální diferenciál má pak tvar $dz = y \cos xy dx + x \cos xy dy.$

Příklad : Vypočtěte hodnotu totálního diferenciálu funkce $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ v bodě $(1,1)$ pro $dx=0{,}01$ a $dy=0{,}02$.

Řešení: Parciální derivace prvního řádu po úpravě mají tvar

$$f'_x=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad f'_y=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Hodnota totálního diferenciálu v bodě $(1,1)$ pro dané přírůstky je

$$df(1,1)=-\frac{1}{2}\cdot 0{,}01+\frac{1}{2}\cdot 0{,}02=\frac{1}{200}.$$

Geometrický význam totálního diferenciálu

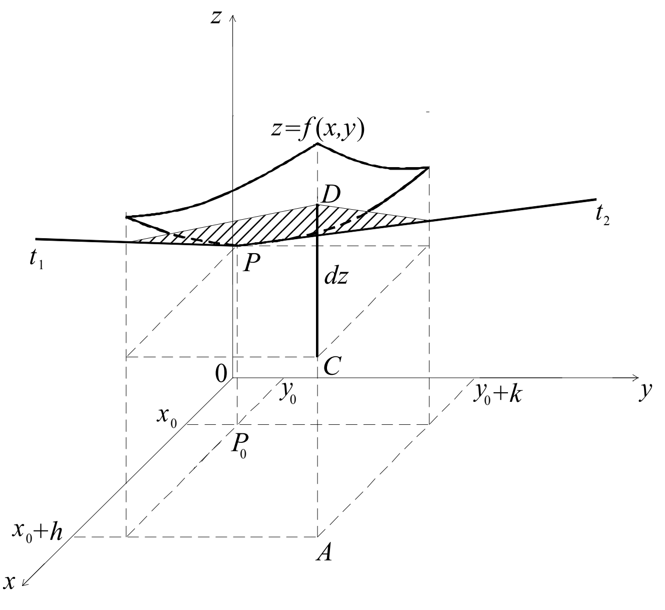
Porovnáme-li rovnici tečné roviny funkce $z=f(x,y)$ v bodě $P(x_0,y_0,z_0)$

$$z-z_0=f'_x(P_0)(x-x_0)+f'_y(P_0)(y-y_0)$$

se vzorcem totálního diferenciálu v bodě $P_0(x_0,y_0)$

$$df(P_0)=f'_x(P_0)h+f'_y(P_0)k,\ \text{kde}\ h=x-x_0,\ k=y-y_0,$$

vidíme, že platí $z-z_0=df(P_0)$. Tedy totální diferenciál funkce $z=f(x,y)$ v bodě P_0 představuje přírůstek souřadnice z bodu D na tečné rovině, přejdeme-li z bodu $P_0(x_0,y_0)$ do bodu $A(x_0+h,y_0+k)$. Na obrázku je totální diferenciál $dz(P_0)$ znázorněn úsečkou $\overline{CD}$.



Vztah mezi diferenciálem a přírůstkem funkce

Uvažujme funkci $z=f(x,y)$, která je v okolí $U(P_0)$ diferenciabilní.

Označíme-li symbolem $\Delta f(P_0)=f(x,y)-f(x_0,y_0)$ přírůstek funkce a $df(P_0)$ její totální diferenciál v bodě $P_0(x_0,y_0)$ pro $h=x-x_0$, $k=y-y_0$, dá se ukázat, že platí $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{\Delta f(P_0)-df(P_0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0.$

Tento vztah nám umožňuje pro malé hodnoty $|h|$, $|k|$ nahradit přírůstek funkce diferenciálem, tedy psát $\Delta f(P_0) \cong df(P_0)$. Můžeme pak pomocí totálního diferenciálu počítat přibližně funkční hodnoty v okolí bodu P_0, v němž známe hodnotu funkce a parciálních derivací, následujícím způsobem

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \Delta f(P_0) \cong f(x,y) + df(P_0).$$

Příklad : Vypočtěte totální diferenciál $df(P_0)$ a přírůstek $\Delta f(P_0)$ funkce $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$, jestliže je dán bod $P_0(12,-3)$ a přírůstky $dx = dy = 0{,}2$.

Řešení: Totální diferenciál $df(x,y) = \dfrac{2x}{y}dx - \dfrac{x^2}{y^2}dy$,

tedy pro daný bod a dané přírůstky je $df(12,-3) = -8 \cdot 0{,}2 - 16 \cdot 0{,}2 = -4{,}8$.

Přírůstek funkce má hodnotu $\Delta f(12,-3) = f(12{,}2;-2{,}8) - f(12;-3) = \dfrac{12{,}2^2}{-2{,}8} - \dfrac{12^2}{-3} \cong -5{,}2$.

Příklad : Vypočtěte přibližně hodnotu čísla $1{,}02^{3{,}01}$.

Řešení: Uvažujme funkci $f(x,y) = x^y$. Hledané číslo pak můžeme přibližně vyjádřit výrazem $x_0^{\,y_0} + df(x_0, y_0)$ pro $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, $dx = 0{,}02$, $dy = 0{,}01$. Vzhledem k tomu, že totální diferenciál $df(x,y) = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$ a $df(1,3) = 3 \cdot 1 \cdot 0{,}02 + 1 \cdot 0 \cdot 0{,}01 = 0{,}06$, je přibližná hodnota daného čísla $1{,}02^{3{,}01} \cong 1^3 + 0{,}06 = 1{,}06$.

Příklad : Při deformaci válce se jeho poloměr r zvětšil ze 2 na 2,05 dm a výška v se zmenšila z 10 na 9,8 dm. Určete přibližně změnu objemu V.

Řešení: Na základě vzorce pro objem válce $V = \pi r^2 v$ uvažujeme funkci dvou proměnných $V = f(r,v)$. Pro tuto funkci hledáme totální diferenciál neboť platí

$$\Delta V \cong dV = V'_r dr + V'_v dv.$$

Původní rozměry byly $r = 2$ dm, $v = 10$ dm, přírůstky jsou $dr = 0{,}05$, d$v = -0{,}2$. Vypočítáme nejprve parciální derivace funkce V: $\quad V'_r = 2\pi r v,\ V'_v = \pi r^2,$

takže totální diferenciál $dV = 2\pi r v dr + \pi r^2 dv$.

Po dosazení $\quad \Delta V \cong dV = 2\pi r v dr + \pi r^2 dv = 2\pi(20 \cdot 0{,}05 + 2(-0{,}2)) = 1{,}2\pi \cong 3{,}768\ \text{dm}^3$.

Vztah mezi totálním diferenciálem a přírůstkem funkce se využívá v teorii chyb. Jestliže určitý výpočet je prováděn s veličinami, které byly získány měřením, můžeme výslednou chybu určit pomocí diferenciálu. V teorii chyb se místo slova „změna“ nebo přírůstek používá názvu chyba. V praktických výpočtech, kde dx a dy jsou chyby jednotlivých měření, je absolutní chyba $\Delta f \cong df$ a relativní chyba $\delta = \left|\dfrac{\Delta f}{f}\right|$ (nejčastěji v procentech).

6) Extrémy funkcí dvou proměnných

Lokální extrémy

Definice : Říkáme, že v bodě (x_0, y_0) má funkce $z = f(x, y)$

1) **lokální maximum**, jestliže existuje okolí bodu (x_0, y_0) tak, že pro všechny body (x, y) z tohoto okolí platí $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$.

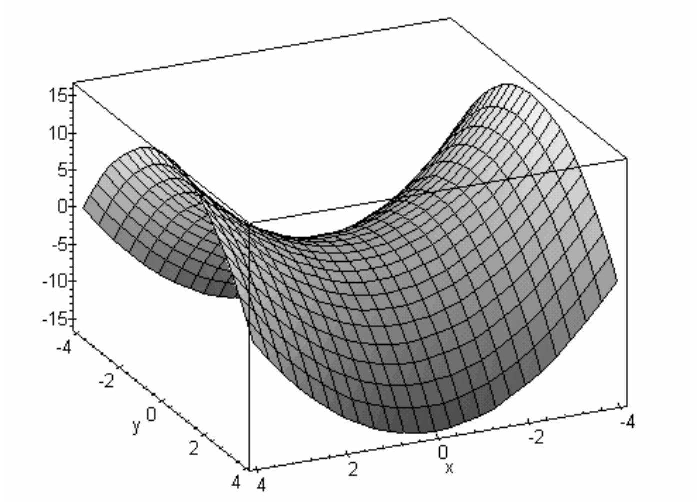
2) **lokální minimum**, jestliže existuje okolí bodu (x_0, y_0) tak, že pro všechny body (x, y) z tohoto okolí platí $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$.

Lokální maxima a minima nazýváme **lokální extrémy** (někdy se používá termín relativní extrémy). Podobně jako u funkce jedné proměnné budeme při vyšetřování lokálních extrémů využívat poznatků z diferenciálního počtu.

Věta : (Fermatova) Nutnou podmínkou pro existenci lokálního extrému funkce $f(x, y)$ v bodě $P_0(x_0, y_0)$, v němž jsou spojité parciální derivace $f'_x(P_0)$, $f'_y(P_0)$, je platnost rovnic $f'_x(P_0) = 0$, $f'_y(P_0) = 0$.

Definice : Bod $P_0(x_0, y_0)$, v jehož okolí má funkce $z = f(x, y)$ parciální derivace 1.řádu, a který vyhovuje rovnicím $f'_x(P_0) = 0$, $f'_y(P_0) = 0$, se nazývá **stacionárním bodem** dané funkce.

Nutná podmínka pro existenci lokálního extrému však není postačující podmínkou. Stacionárnímu bodu, ve kterém extrém neexistuje, odpovídá na ploše bod, v jehož okolí má plocha např. tvar sedla (obr. 1). Jde o jistou analogii s inflexním bodem funkce jedné proměnné. To, zda ve stacionárním bodě nastává lokální extrém, je možné v některých příkladech zjistit vyšetřením chování funkce v okolí tohoto bodu.



obr. 1

Postačující podmínky pro existenci extrému je možné formulovat pomocí následující věty, která se obvykle používá při vyšetřování lokálních extrémů.

Věta : (o postačujících podmínkách pro extrém) Nechť $P_0(x_0, y_0)$ je stacionárním bodem funkce $z = f(x, y)$, která má v okolí $U(P_0)$ spojité parciální derivace druhého řádu.

Označme

$$D(P_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{yx}(P_0) & f''_{yy}(P_0) \end{vmatrix}.$$

Je-li $D(P_0) > 0,$ pak v bodě P_0 nastane lokální extrém, a to :

1) lokální minimum, je-li $f''_{xx}(P_0) > 0,$

2) lokální maximum, je-li $f''_{xx}(P_0) < 0.$

Je-li $D(P_0) < 0,$ lokální extrém v bodě P_0 nenastane.

Je-li $D(P_0) = 0,$ nemůžeme tímto způsobem o existenci lokálního extrému rozhodnout.

Funkce $z = f(x, y)$ může mít lokální extrém nejen ve stacionárních bodech, ale i v bodech, v nichž obě parciální derivace f'_x, f'_y neexistují, nebo v bodech, v nichž jedna z nich neexistuje a druhá je rovna nule. Funkce sama nemusí být v takových bodech definovaná a tyto body musí být vnitřními body definičního oboru. Zda má funkce v těchto bodech lokální extrém, zjistíme vyšetřením jejího chování v jejich okolí.

Postup při vyšetřování lokálních extrémů funkce $z = f(x, y)$:

- vypočítáme parciální derivace $f'_x,\ f'_y$,
- určíme stacionární body P_i a ověříme, zda patří do definičního oboru funkce *f*,
- vypočítáme parciální derivace $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$ a hodnoty těchto derivací ve stacionárních bodech P_i,
- určíme hodnoty determinantů $D(P_i)$ ve stacionárních bodech P_i a pro $D(P_i) \neq 0$ rozhodneme o existenci lokálních extrémů,
- podle znaménka výrazu $f''_{xx}(P_i)$ určíme druh extrému,
- vyšetříme chování funkce v okolí stacionárních bodů, ve kterých je příslušný determinant roven nule, a v okolí bodů, v nichž parciální derivace $f'_x,\ f'_y$ nejsou definovány.

Vázané extrémy

Kromě lokálních extrémů je v praxi často potřeba určit extrémy funkce $f(x, y)$, vázané podmínkou $g(x, y) = 0$. Takové extrémy budeme nazývat vázanými extrémy.

Definice : Říkáme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $P_0(x_0, y_0)$

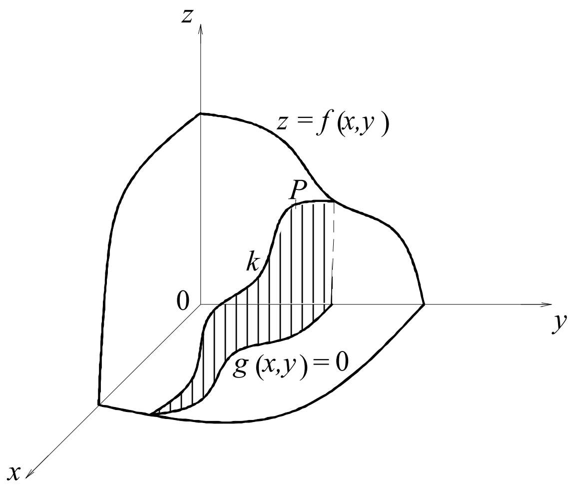
1) **vázané maximum**, jestliže nerovnost $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ platí v okolí bodu P_0 pro všechny body, ležící na křivce $g(x, y) = 0$.

2) **vázané minimum**, jestliže nerovnost $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ platí v okolí bodu P_0 pro všechny body, ležící na křivce $g(x, y) = 0$.

Vázanému maximu a vázanému minimu stručně říkáme vázaný extrém.

Geometrická interpretace vázaného extrému :

Bodům, které leží v definičním oboru funkce $z = f(x, y)$ a vyhovují rovnici $g(x, y) = 0$, odpovídají na ploše $z = f(x, y)$ body, tvořící křivku *k*. Body vázaných extrémů jsou pak takové body, v nichž funkce $z = f(x, y)$ nabývá svého lokálního extrému na křivce *k* (na obr. 2 je takovým bodem bod *P*).



obr. 2

Rozdíl mezi lokálními a vázanými extrémy tedy spočívá v tom, že při lokálních extrémech vyšetřujeme funkci v jejím celém definičním oboru, kdežto při vázaných extrémech vyšetřujeme jen ty hodnoty funkce $f(x, y)$, kterých nabývá v bodech křivky $g(x, y) = 0$.

Při vyšetřování vázaných extrémů mohou nastat dva případy :

a) Pokud rovnice $g(x, y) = 0$ určuje implicitně funkci $y = \varphi(x)$, převede se úloha vázaného extrému na úlohu určení extrému funkce $z = f(x, \varphi(x))$ funkce jedné proměnné.

b) Uvedený postup však není možný, pokud žádnou z proměnných x, y nelze z podmínky $g(x, y) = 0$ vyjádřit. V tom případě používáme tzv. Lagrangeovu metodu neurčitých multiplikátorů (nebude probírána).

Absolutní extrémy

Hledáme-li největší a nejmenší hodnotu funkce v dané oblasti, hledáme tzv. absolutní extrémy funkce (někdy se používá termín globální extrémy).

Definice : Říkáme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $P_0(x_0, y_0) \in \Omega$ **absolutní maximum (minimum)** na oblasti Ω, jestliže nerovnost $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$ ($f(x, y) \ge f(x_0, y_0)$) platí pro každý bod $(x, y) \in \Omega$.

Věta : Funkce $z = f(x, y)$ spojitá na uzavřené a omezené oblasti Ω nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálních extrémů ležících uvnitř oblasti Ω nebo v některém hraničním bodě.

Postup při vyšetřování absolutních extrémů funkce $z = f(x, y)$ spojité v uzavřené a omezené oblasti Ω:

- určíme lokální extrémy funkce *f* a ověříme, zda leží uvnitř oblasti Ω,
- vyšetříme vázané extrémy funkce *f* na hranicích oblasti,
- určíme průsečíky křivek, které tvoří hranici oblasti,
- porovnáním funkčních hodnot v bodech, získaných popsaným postupem, určíme ve kterých z nich nabývá daná funkce svých absolutních extrémů.

Poznámka :

1) Při vyšetřování absolutních extrémů není nutné zjišťovat typ lokálních a vázaných extrémů (tedy zda se jedná o maximum nebo minimum), ale stačí pouze najít takové body, ve kterých tyto extrémy mohou nastat. Charakter absolutního extrému určíme na závěr na základě porovnání funkčních hodnot.

2) Není-li oblast Ω uzavřená, nemusí mít funkce f žádný absolutní extrém. Pokud existuje, nastává v bodě lokálního extrému.