Analytická geometrie v rovině

1) Souřadnicová soustava v rovině

Zvolme v rovině dvě navzájem kolmé přímky za číselné osy. Průsečík O těchto přímek nazveme počátek souřadnic. Vodorovnou přímku označíme osou x, svislou označíme osou y a orientujeme je tak, že vždy jednu z polopřímek na osách x a y s počátkem O prohlásíme za kladnou poloosu a druhou za zápornou poloosu. Zvolíme-li na vzájemně kolmých osách různé jednotkové úsečky, mluvíme o pravoúhlé souřadnicové soustavě. Zvolíme-li na obou osách stejnou jednotku délky, mluvíme o **kartézské souřadnicové soustavě**.

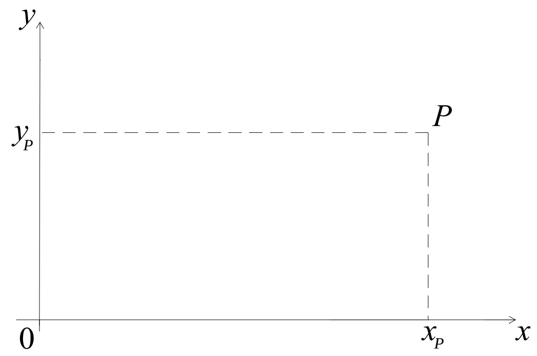
Kartézské souřadnice v rovině.

Každému bodu P v rovině přiřazujeme v pravoúhlé souřadnicové soustavě uspořádanou dvojici reálných čísel, tzv. pravoúhlých souřadnic bodu P takto (obr. 1):

1) Bodem P vedeme kolmici k ose x, její průsečík s osou x je na této číselné ose přiřazen reálnému číslu x_P, které nazýváme první (x-ovou) souřadnicí bodu P v dané souřadnicové soustavě.

2) Bodem P vedeme kolmici k ose y, její průsečík s osou y je na této číselné ose přiřazen reálnému číslu y_P, které nazýváme druhou (y-ovou) souřadnicí bodu P v dané souřadnicové soustavě.

Souřadnice bodu v kartézské souřadnicové soustavě se nazývají kartézské souřadnice.



Obr. 1

Tímto způsobem je bodu P jednoznačně přiřazena uspořádaná dvojice x_P, y_P, což zapisujeme $P(x_P, y_P)$. Zavedením souřadnicové soustavy v rovině jsme sestrojili prosté zobrazení množiny bodů roviny na množinu $R \times R$. Množinu všech uspořádaných dvojic reálných čísel (x, y) budeme nazývat dvojrozměrným prostorem nebo rovinou xy.

Je-li v rovině jakožto dvojrozměrném prostoru definována pro každé dva body A, B jejich vzdálenost $\rho(A,B)$, přičemž platí

1) $\rho(A,B) \geq 0$,
2) $\rho(A,B) = 0$, právě když $A = B$,
3) $\rho(A,B) = \rho(B,A)$,
4) $\rho(A,B) \leq \rho(A,C) + \rho(B,C)$ (tzv. trojúhelníková nerovnost),

pak se tento dvojrozměrný prostor nazývá metrický.

Je-li vzdálenost bodů $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ definována vzorcem

$$\rho(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2},$$

budeme dvojrozměrný metrický prostor nazývat dvojrozměrným euklidovským prostorem. Značíme jej E_2. Obdobně by se definoval vícerozměrný euklidovský prostor E_n. V následujícím textu budeme uvažovat pouze euklidovské prostory.

Kromě kartézské souřadnicové soustavy používáme v prostoru E_2 ještě další souřadnicovou soustavu. Je to polární souřadnicová soustava.

Polární souřadnice v rovině.

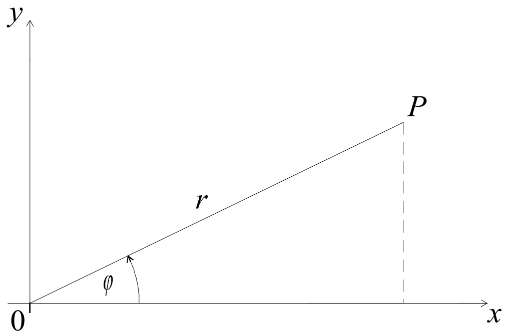
Polárními souřadnicemi bodu P v rovině rozumíme uspořádanou dvojici čísel (r, φ) přiřazených jednoznačně bodu P tak, že $r \in \langle 0, \infty)$ je délka úsečky $\overline{OP}$ a $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ je úhel, který svírá polopřímka OP s kladnou částí osy x.

Je-li P bod daný kartézskými souřadnicemi (x, y) a jsou-li (r, φ) jeho polární souřadnice, pak platí mezi těmito souřadnicemi vztahy

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$$

nebo naopak

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ tg\varphi = \frac{y}{x}.$$



Obr. 2

2) Rovnice rovinné čáry a přímky v rovině

Implicitní rovnicí rovinné čáry rozumíme rovnici tvaru $F(x, y) = 0$, které vyhovují body (x, y), ležící na uvažované rovinné čáře. Pokud lze v této rovnici osamostatnit proměnnou y, získáme explicitní vyjádření rovinné čáry ve tvaru $y = f(x)$.

Parametrickými rovnicemi rovinné čáry rozumíme rovnice tvaru $x = x(t),\ y = y(t),$ kde $t \in \langle a, b \rangle$, přičemž uvedeným rovnicím vyhovují ty body $(x, y) = (x(t), y(t))$, které leží na uvažované rovinné čáře. Proměnnou t nazýváme parametrem.

Přímka

Obecná rovnice přímky.

Přímku p v rovině E_2 je možné vyjádřit rovnicí tvaru $ax + by + c = 0$, kde a, b, c jsou vhodné konstanty. Přitom vektor $\vec{n} = (a, b)$ je kolmý k přímce p a nazýváme ho normálovým vektorem této přímky. Každý vektor $\vec{s}$, který je kolmý k normálovému vektoru se nazývá směrový vektor přímky. Je to vektor rovnoběžný s danou přímkou p. Jestliže normálový vektor $\vec{n} = (a, b)$, má každý směrový vektor tvar $\vec{s} = (-kb, ka)$, kde $k \neq 0$ je libovolné číslo.

směrnicový tvar přímky : $y = kx + q$, kde $k = tg\alpha$ se nazývá směrnice přímky

úsekový tvar přímky : $\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 1$, kde $p \neq 0$ je úsek vyťatý přímkou na ose x a $q \neq 0$ je úsek vyťatý přímkou na ose y

Parametrické rovnice přímky.

Přímka jdoucí bodem $A(x_A, y_A)$ rovnoběžně se směrovým vektorem $\vec{s} = (s_1, s_2)$ má parametrické rovnice

$$x = x_A + s_1 t,$$

$$y = y_A + s_2 t,\ \text{kde } t \in (-\infty, \infty) \text{ je parametr.}$$

Úhel dvou přímek.

Dvě přímky o rovnicích $a_1x+b_1y+c_1=0,\ a_2x+b_2y+c_2=0$ svírají úhly φ a $\pi-\varphi$ a platí vztah $\cos\varphi=\dfrac{\vec{n}_1.\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$

Vzájemná poloha dvou přímek.

Dvě přímky o rovnicích $a_1x+b_1y+c_1=0,\ a_2x+b_2y+c_2=0$ jsou

1) rovnoběžné, právě když pro jejich normálové vektory platí $\vec{n}_1=k\vec{n}_2,$ kde $k\neq 0$ je vhodná konstanta; pokud navíc $c_1=kc_2,$ jsou tyto přímky totožné,

2) různoběžné, právě když pro jejich normálové vektory platí $\vec{n}_1\neq k\vec{n}_2;$ pokud navíc skalární součin $\vec{n}_1.\vec{n}_2=0,$ jsou tyto přímky na sebe kolmé.

Vzdálenost bodu od přímky.

Pro vzdálenost *d* bodu $A(x_A,y_A)$ od přímky o rovnici $ax+by+c=0$ platí $d=\dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\geq 0.$

3) Křivky druhého stupně – kuželosečky

Křivkou druhého stupně (kuželosečkou) nazýváme rovinnou křivku, jejíž rovnici lze psát ve tvaru $a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$, kde a_{ij} jsou reálná čísla.

Kružnice.

Kružnice je geometrické místo bodů (dále jen g.m.) v rovině, které mají od pevného bodu *S* (střed kružnice) stále stejnou vzdálenost *r* (poloměr kružnice).

Kružnice se středem $S=(m,n)$ a poloměrem r má :

obecnou rovnici $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$

parametrické rovnice $x=m+r.\cos t$

$y=n+r.\sin t$, kde $t\in\langle 0,2\pi)$.

Elipsa.

Elipsa je g.m. bodů v rovině, které mají od dvou pevných bodů F_1,F_2 (ohniska) stále stejný součet vzdáleností.

Elipsa se středem $S=(m,n)$ a osami rovnoběžnými se souřadnicovými osami má :

obecnou rovnici $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$ (*a* je délka hlavní a *b* vedlejší poloosy)

parametrické rovnice $x=m+a.\cos t$

$y=n+b.\sin t$, kde $t\in\langle 0,2\pi)$.

Hyperbola.

Hyperbola je g.m. bodů v rovině, které mají od dvou pevných bodů F_1,F_2 (ohniska) stále stejný rozdíl vzdáleností.

Hyperbola se středem $S=(m,n)$ a osami ležícími na souřadnicových osách má :

obecnou rovnici $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}-\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$ (*a* je délka hlavní a *b* vedlejší poloosy)

Parabola.

Parabola je g.m. bodů v rovině, které mají od pevného bodu *F* (ohniska) a od pevné přímky *d* (řídící přímka) stále stejnou vzdálenost.

Parabola s vrcholem v bodě $V=(m,n)$ a osu rovnoběžnou s osou *x* (popř. *y*) má

obecnou rovnici $(y-n)^2=2p(x-m)$ (popř. $(x-m)^2=2p(y-n)$)

Analytická geometrie v prostoru

1) Souřadnicová soustava v prostoru

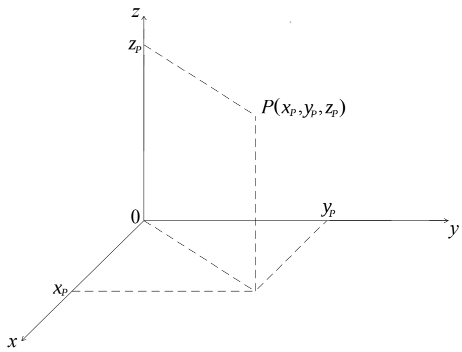
Zvolme soustavu tří os *x, y, z* v prostoru navzájem kolmých a procházejících bodem *O*, který nazveme počátkem souřadnicové soustavy. Řekneme, že tato soustava je pravotočivá v prostoru E_3, jsou-li jednotlivé osy orientovány tak, že pozorujeme-li osy *x* a *y* z některého bodu kladné části osy *z*, musela by kladná část osy *x* opsat úhel $\varphi = \pi/2$ proti směru otáčení hodinových ručiček, aby poprvé splynula s kladnou částí osy *y* (obr. 3; při záměně osy *x* a *y* by vznikla levotočivá souřadnicová soustava).

Každé dvě ze souřadnicových os tvoří jednu ze tří souřadnicových rovin, a to *xy, yz, zx*, které dělí celý prostor E_3 na osm stejných částí, nazývaných oktanty.

Zvolme dále na kladných částech všech tří os jednotky délky. Jsou-li tyto jednotky na všech třech osách stejné, mluvíme o kartézské souřadnicové soustavě, v opačném případě o pravoúhlé souřadnicové soustavě. Každému bodu *P* v prostoru E_3 přiřazujeme v **kartézské souřadnicové soustavě** uspořádanou trojici reálných čísel tzv. kartézských souřadnic bodu *P* (viz obr. 3).

Vzdálenost bodů $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ v prostoru E_3 je určena vztahem

$$\rho(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}\,.$$



Obr. 3

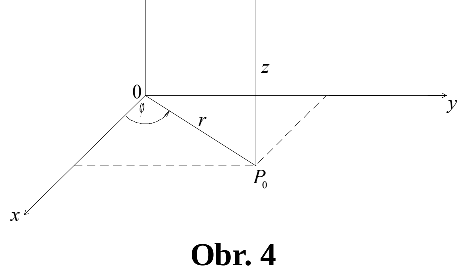
Kromě kartézských souřadnic v prostoru E_3 používáme ještě další souřadnicové soustavy. Je to především cylindrická (válcová) soustava souřadnic.

Cylindrické (válcové) souřadnice v prostoru.

Mějme dánu kartézskou souřadnicovou soustavu, libovolný bod *P* a jeho kolmý průmět P_0 do roviny *xy*. Cylindrickými souřadnicemi bodu *P* v prostoru E_3 rozumíme uspořádanou trojici čísel (r, φ, z) přiřazených jednoznačně bodu *P* tak, že $r \in \langle 0, \infty)$ je délka úsečky $\overline{OP_0}$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ je úhel, o který se musí otočit kladná část osy *x* proti směru hodinových ručiček, aby splynula s polopřímkou OP_0 (tedy dvojice (r, φ) vyjadřuje polární souřadnice bodu P_0 v rovině *xy*) a $z \in (-\infty, \infty)$ je třetí souřadnice bodu *P* v dané kartézské souřadnicové soustavě. Bodům ležícím na ose *z* přiřazujeme libovolně zvolený úhel φ.

Mezi kartézskými souřadnicemi bodu *P* a jeho cylindrickými souřadnicemi platí vztahy

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z,$ nebo obráceně $r = \sqrt{x^2 + y^2},\ tg\varphi = \dfrac{y}{x},\ z = z.$



Obr. 4

2) Rovnice plochy, roviny, prostorové čáry a přímky v prostoru

Implicitní rovnicí plochy S rozumíme rovnici tvaru $F(x,y,z)=0$, které vyhovují body (x,y,z), ležící na uvažované ploše. Pokud lze v této rovnici osamostatnit proměnnou z, získáme explicitní vyjádření plochy ve tvaru $z=f(x,y)$.

Parametrickými rovnicemi plochy S rozumíme rovnice : $x=f_1(u,v)$,

$$y=f_2(u,v),$$

$$z=f_3(u,v),$$

v nichž funkce $f_1,\ f_2,\ f_3$ jsou definovány ve všech bodech určitého dvojrozměrného oboru Ω. Množinu všech bodů $(x,y,z)=(f_1(u,v),f_2(u,v),f_3(u,v))$, kde $(u,v)\in\Omega$ nazýváme prostorovou plochou danou parametrickými rovnicemi. Proměnné $u,\ v$ nazýváme parametry.

Implicitní rovnice prostorové čáry.

Nechť dvě plochy o rovnicích $F(x,y,z)=0,\ G(x,y,z)=0$ se protínají v prostorové čáře L. Pak říkáme, že prostorová čára L je určena těmito rovnicemi ploch a tyto rovnice nazýváme implicitními rovnicemi prostorové čáry L.

Parametrické rovnice prostorové čáry.

Nechť jsou dány tři rovnice

$$x=f_1(t),$$

$$y=f_2(t),$$

$$z=f_3(t),$$

kde funkce $f_1,\ f_2,\ f_3$ jsou spojité pro $t\in\langle a,b\rangle$. Množinu všech bodů $P(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$ pro $t\in\langle a,b\rangle$ v prostoru nazýváme prostorovou čarou danou parametrickými rovnicemi. Proměnnou t nazýváme parametr.

Průsečíky dané čáry s danou plochou jsou ty body (x,y,z), které vyhovují současně rovnicím plochy i čáry. Najdeme je jako společné řešení všech těchto rovnic.

Rovina

Rovnice roviny.

Rovina σ procházející bodem $P(x_P,y_P,z_P)$ kolmo k nenulovému vektoru $\vec{n}=(a,b,c)$ má rovnici $a(x-x_P)+b(y-y_P)+c(z-z_P)=0.$ Uvedenou rovnici nazýváme obecnou rovnici roviny.

Parametrické rovnice roviny.

Rovina σ procházející bodem $P(x_P,y_P,z_P)$, která je rovnoběžná se dvěma lineárně nezávislými vektory $\vec{s}_1=(a_1,b_1,c_1),\ \vec{s}_2=(a_2,b_2,c_2)$, má parametrické rovnice:

$$x=x_P+a_1u+a_2v,$$

$$y=y_P+b_1u+b_2v,$$

$$z=z_P+c_1u+c_1v, \quad \text{kde } u,v\in(-\infty,\infty) \text{ jsou parametry.}$$

Vektory $\vec{s}_1,\vec{s}_2$ nazýváme směrové vektory roviny σ.

Rovina, která je určená třemi body $A(x_A,y_A,z_A),B(x_B,y_B,z_B),C(x_C,y_C,z_C)$ neležícími na přímce, má rovnici

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix}=0.$$

Vytíná-li rovina σ na souřadnicových osách $x,\ y,\ z$ úseky $p,\ q,\ r$ (různé od nuly), můžeme ji vyjádřit v tzv. úsekovém tvaru $\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}+\dfrac{z}{r}=1.$

Úhel dvou rovin.

Roviny $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ a $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ svírají úhly φ a $\pi-\varphi$, přičemž platí

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1.\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}},$$

kde $\vec{n}_1=(a_1,b_1,c_1)$ a $\vec{n}_2=(a_2,b_2,c_2)$ jsou normálové vektory obou rovin.

Vzdálenost bodu od roviny.

Vzdálenost v bodu $P(x_P,y_P,z_P)$ od roviny $\sigma\equiv ax+by+cz+d=0$ je dána vzorcem

$$v=\frac{|ax_P+by_P+cz_P+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Vzájemná poloha dvou rovin.

Roviny $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ a $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ jsou

1) rovnoběžné, právě když jejich normálové vektory jsou lineárně závislé, tedy právě když je $a_2=ka_1$, $b_2=kb_1$, $c_2=kc_1$, kde $k\neq 0$ je vhodné číslo; pokud navíc platí $d_2=kd_1$, jde o roviny splývající,

2) různoběžné, právě když jejich normálové vektory jsou lineárně nezávislé, tedy právě když je $\vec{n}_2\neq k\vec{n}_1$; pokud navíc platí $\vec{n}_1.\vec{n}_2=0$, jsou dané roviny vzájemně kolmé.

Přímka

Parametrické rovnice přímky.

Přímka p, která prochází bodem $P(x_P,y_P,z_P)$ a je rovnoběžná s nenulovým vektorem $\vec{s}=(s_1,s_2,s_3)$, má parametrické rovnice

$$\begin{aligned} x&=x_P+s_1t,\\ y&=y_P+s_2t,\\ z&=z_P+s_3t, \text{ kde } t\in(-\infty,\infty) \text{ je parametr.}\end{aligned}$$

Vektor $\vec{s}$ nazýváme směrovým vektorem přímky p a proměnnou t jejím parametrem.

Přímka jako průsečnice dvou rovin.

Přímka zadaná jako průsečnice dvou různoběžných rovin $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ má implicitní rovnice

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z+d_1&=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2&=0.\end{aligned}$$

Pro směrový vektor $\vec{s}$ takto zadané přímky platí $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$.

Kanonické rovnice přímky.

Přímku p, která je určená bodem $P(x_P,y_P,z_P)$ a směrovým vektorem $\vec{s}=(s_1,s_2,s_3)$, jehož žádná souřadnice není rovna nule, je možné vyjádřit pomocí kanonických rovnic

$$\frac{x-x_P}{s_1}=\frac{y-y_P}{s_2}=\frac{z-z_P}{s_3}.$$

Vzájemná poloha dvou přímek.

Dvě přímky p, q dané svými parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} p:\ x&=x_A+a_1t, & q:\ x&=x_B+a_2t,\\ y&=y_A+b_1t, & y&=y_B+b_2t,\\ z&=z_A+c_1t, & z&=z_B+c_2t,\end{aligned}$$

jsou
1) rovnoběžné, právě když jejich směrové vektory jsou lineárně závislé, tedy právě když platí $\vec{s}_q = k\vec{s}_p$, kde $k \neq 0$,

2) různoběžné, právě když $\vec{s}_q \neq k\vec{s}_p$ a determinant $\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0,$

3) mimoběžné, právě když $\vec{s}_q \neq k\vec{s}_p$ a determinant $\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0,$

Pokud navíc v bodech 2) a 3) platí $\vec{s}_p . \vec{s}_q = 0,$ jsou přímky *p, q* na sebe kolmé.

Vzájemná poloha přímky a roviny.
Přímka *p* a rovina σ
1) jsou rovnoběžné, právě když $\vec{s}_p . \vec{n}_\sigma = 0;$ pokud navíc po dosazení parametrických rovnic přímky *p* do obecné rovnice roviny σ dostaneme identitu, leží přímka *p* v rovině σ,
2) mají jediný společný bod, právě když $\vec{s}_p . \vec{n}_\sigma \neq 0;$ pokud navíc vektory $\vec{s}_p$ a $\vec{n}_\sigma$ jsou lineárně závislé, je přímka *p* kolmá k rovině σ.

Úhel přímky s rovinou.
Úhlem přímky *p* s rovinou σ rozumíme úhel $\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle,$ který svírá přímka *p* a její pravoúhlý průmět do roviny σ. Platí $\sin\varphi = \frac{|\vec{n}_\sigma . \vec{s}_p|}{|\vec{n}_\sigma||\vec{s}_p|},$ kde $\vec{n}_\sigma$ je normálový vektor roviny σ a $\vec{s}_p$ je směrový vektor přímky *p*.

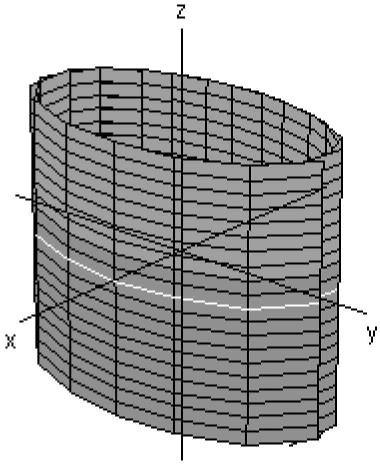
Plochy druhého stupně

Plochy, jejichž rovnici lze psát ve tvaru

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

kde a_{ij} $(i, j = 1,2,3,4)$ jsou daná reálná čísla (přičemž $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 > 0$), se nazývají plochy druhého stupně neboli kvadriky.

Plochy válcové.
Válcovou plochou rozumíme plochu vytvořenou pohybující se přímkou, která protíná danou křivku a je stále rovnoběžná s daným vektorem. Tuto přímku nazýváme vytvořující přímkou (nebo površkou) a danou křivku řídící křivkou válcové plochy.
Jestliže vytvořující přímka je kolmá k rovině řídící křivky, mluvíme o přímé válcové ploše, svírá-li s ní jiný úhel, jde o šikmou válcovou plochu.
Např. přímá válcová plocha s řídící křivkou $F(x, y) = 0$, $z = 0$ má rovnici $F(x, y) = 0.$
Konkrétně přímá válcová plocha o rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ má za řídící křivku elipsu o stejné rovnici ležící v rovině $z = 0$ a vytvořující přímky jsou rovnoběžné s osou z. Je-li $a = b$ jde o přímou kruhovou válcovou plochu, pro $a \neq b$ jde o přímou eliptickou válcovou plochu (Obr. 5).



Obr. 5

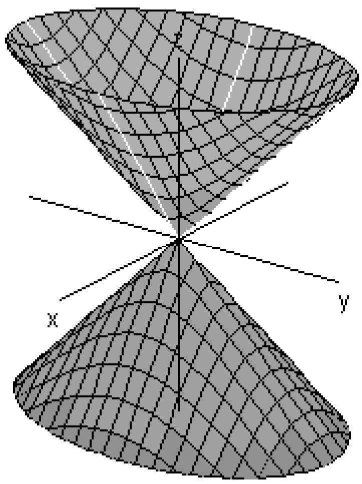
Přímá válcová plocha hyperbolická má rovnici $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a její řídící křivkou je hyperbola o stejné rovnici v rovině $z = 0$.
Přímá válcová plocha parabolická má rovnici $y^2 = 2px$ a její řídící křivkou je parabola o stejné rovnici v rovině $z = 0$.

Plochy kuželové.

Kuželovou plochou rozumíme plochu vytvořenou pohybující se přímkou, která protíná řídící křivkou a prochází daným bodem *V* zvaným vrcholem.

Je-li řídící křivka středově souměrná podle bodu *S* a přímka procházející body *S, V* je kolmá k rovině řídící křivky, mluvíme o přímé kuželové ploše, svírá-li s ní jiný úhel, jde o šikmou kuželovou plochu.

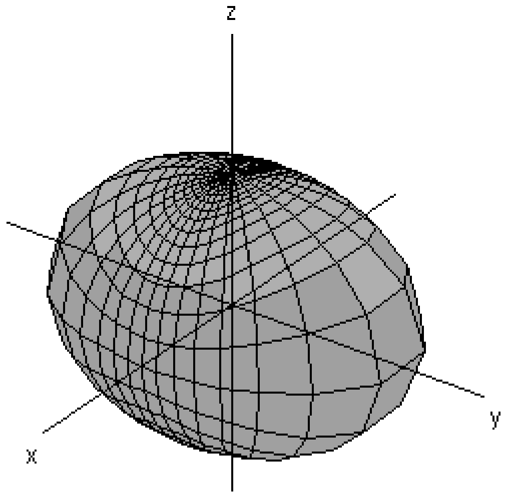
Například přímý kužel eliptický, který má vrchol v počátku *O*, jehož řídící křivkou je elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ v rovině $z = c$ má rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.



Obr. 6

Elipsoidy.

Plocha o rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ se nazývá elipsoid (Obr. 7). Její střed leží v počátku *O*.
Rozlišujeme tyto typy elipsoidů:
a) trojosý, když poloosy *a, b, c* mají různou délku,
b) rotační, když dvě poloosy jsou stejně dlouhé,
c) kulová plocha, když $a = b = c$.



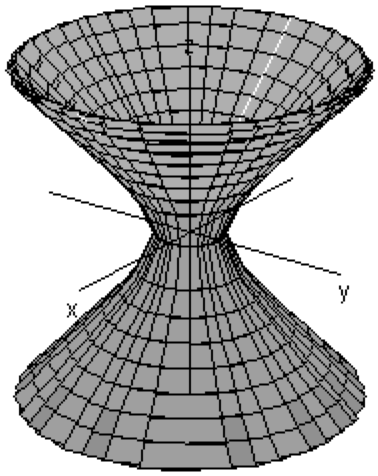
Obr. 7

Vlastnosti elipsoidu:
1) Elipsoid je ohraničená plocha a jeho průsečíky s osami souřadnic jsou vrcholy elipsoidu.
2) Souřadnicové roviny jsou rovinami souměrnosti a počátek O je středem souměrnosti elipsoidu.
3) Rovina protínající elipsoid jej protíná v elipse, popř. v kružnici.

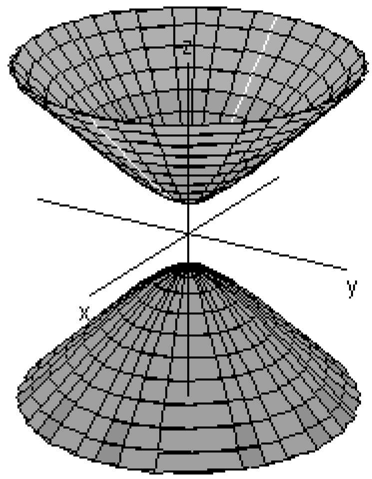
Hyperboloidy.

Plocha o rovnici $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ se nazývá jednodílný hyperboloid (Obr. 8a).

Plocha o rovnici $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ se nazývá dvojdílný hyperboloid (Obr. 8b).



Obr. 8a



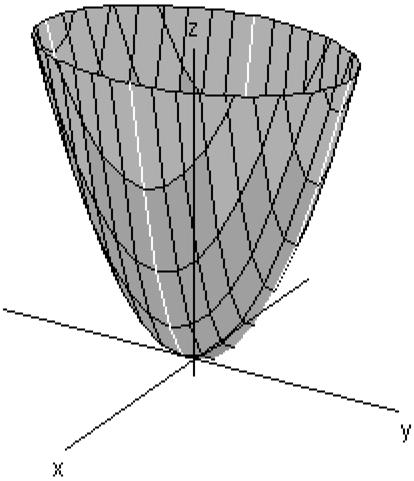
Obr. 8b

Vlastnosti hyperboloidu:
1) Hyperboloidy jsou neohraničené plochy.
2) Souřadnicové roviny jsou rovinami souměrnosti a počátek O je středem souměrnosti hyperboloidu.
3) Roviny $y = kx$ procházející osou z protínají hyperboloid v hyperbolách, roviny $z = k,\ k \in R$ v elipsách (u dvojdílného hyperboloidu jsou tyto elipsy reálné, mají-li tyto roviny od roviny xy vzdálenost větší než c).
4) Pro $a = b$ dostaneme rotační hyperboloid s osou rotace v ose z. Řezy kolmé na osu z jsou kružnice.

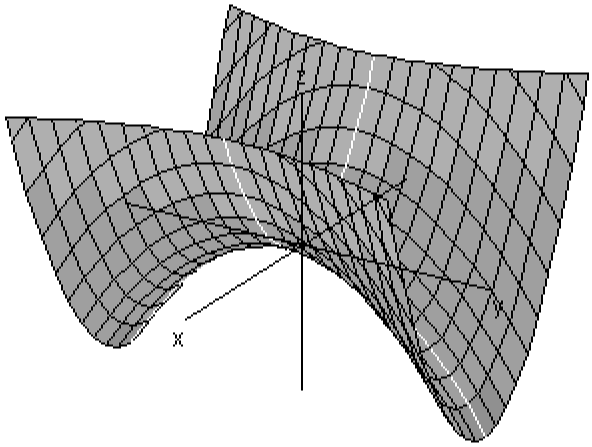
Paraboloidy.

Plocha určená rovnicí $2z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ se nazývá eliptický paraboloid (Obr. 9a).

Plocha určená rovnicí $2z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ se nazývá hyperbolický paraboloid (Obr. 9b).



Obr. 9a



Obr. 9b

Vlastnosti eliptického paraboloidu:
1) Řezy rovinami $z = k \in R^+$ jsou elipsy.
2) Řezy rovinami $x = k \in R$ jsou paraboly.
3) Řezy rovinami $y = k \in R$ jsou paraboly.
4) Pro $a = b$ dostaneme rotační paraboloid $x^2 + y^2 = 2a^2 z$.

Vlastnosti hyperbolického paraboloidu:
1) Řezy rovinami $z = k \neq 0,\ k \in R$ jsou hyperboly,
řez rovinou $z = 0$ tvoří dvě přímky $\frac{x}{a} = \pm\frac{y}{b}$.
2) Řezy rovinami $x = k \in R$ jsou paraboly.
3) Řezy rovinami $y = k \in R$ jsou paraboly.

Jestliže v rovnicích popsaných kvadrik bude místo x, y, z postupně $x - x_0, y - y_0, z - z_0$, dostaneme rovnice ploch se středem posunutým z počátku O do bodu (x_0, y_0, z_0) a s osami rovnoběžnými se souřadnicovými osami.

Mezi kvadriky patří také plochy o rovnici:
1) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, což jsou dvě různoběžné roviny $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ a $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$,
2) $x^2 - a^2 = 0$, což jsou dvě rovnoběžné roviny $x = a$ a $x = -a$,
3) $x^2 = 0$, což je tzv. dvojná rovina $x = 0$.

Kvadriky, tedy plochy 2. stupně, rozdělujeme buď na regulární (elipsoidy, hyperboloidy, paraboloidy) a singulární (válcové a kuželové plochy, dvojice rovin) nebo na středové (elipsoidy, hyperboloidy, kuželové plochy) a nestředové (paraboloidy, válcové plochy, dvojice rovin).