

Integrace pomocí základních vzorců a úpravami integrované funkce

- 1) $\int \left(x^2 + 2x - \frac{3}{x^2} \right) dx = \int (x^2 + 2x - 3x^{-2}) dx = |\text{vz.2}| = \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 3 \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{3}{x} + c$
- 2) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[3]{x}} \right) dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{3}} \right) dx = |\text{vz.2}| = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^2} + c$
- 3) $\int \frac{(x+2)^2}{x^2} dx = \int \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2} dx = \int \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} + \frac{4}{x^2} \right) dx = \int \left(1 + \frac{4}{x} + 4x^{-2} \right) dx = |\text{vz.2,3}| = x + 4 \ln|x| + 4 \frac{x^{-1}}{-1} + c$
- 4) $\int \text{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \text{tg} x - x + c$
- 5) $\int \frac{2}{x^2 + 9} dx = 2 \int \frac{1}{x^2 + 3^2} dx = |\text{vz.12}| = \frac{2}{3} \text{arctg} \frac{x}{3} + c$
- 6) $\int \frac{3}{x^2 + 4x + 10} dx = 3 \int \frac{1}{x^2 + 4x + 4 + 6} dx = 3 \int \frac{1}{(x+2)^2 + 6} dx = |\text{vz.12}| = \frac{3}{\sqrt{6}} \text{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{6}} + c$
- 7) $\int \frac{4}{\sqrt{x^2 - 3}} dx = |\text{vz.11}| = 4 \ln|x + \sqrt{x^2 - 3}| + c$
- 8) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 12}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2 + 3}} dx = |\text{vz.11}| = \ln|(x-3) + \sqrt{x^2 - 6x + 12}| + c$
- 9) $\int \frac{3}{\sqrt{2-x^2}} dx = |\text{vz.10}| = 3 \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + c$
- 10) $\int \frac{1}{4-x^2} dx = |\text{vz.13}| = \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{2+x}{2-x} \right| + c$
- 11) $\int \frac{5}{x^2 - 3} dx = -5 \int \frac{1}{3-x^2} dx = |\text{vz.13}| = -\frac{5}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x} \right| + c$

Integrace pomocí vzorce č.3

- 12) $\int \frac{2x}{x^2 - 5} dx = \ln|x^2 - 5| + c$
- 13) $\int \frac{2x^2}{x^3 + 2} dx = 2 \cdot \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3 + 2} dx = \frac{2}{3} \ln|x^3 + 2| + c$
- 14) $\int \text{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c$

Integrace pomocí vzorce č.14

$$15) \int \cos(3x+1) dx = \frac{1}{3} \sin(3x+1) + c$$

$$16) \int \sqrt{4x-3} dx = \int (4x-3)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{4} \frac{(4x-3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{6} \sqrt{(4x-3)^3} + c$$

$$17) \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} + c$$

Integrace jednoduchých racionálních lomených funkcí

Nerzyze lomenou racionální funkci vyjádříme vydělením jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce. Pokud má tato ryze lomená funkce tvar $\frac{A}{(ax+b)^n}$ nebo $\frac{A}{ax^2+bx+c}$, integrujeme ji pomocí některého ze vzorců 12,13,14 popřípadě 3.

$$18) \int \frac{x^2}{x^2+2} dx = |\text{dělíme}| = \int 1 - \frac{2}{x^2+2} dx = |\text{vz.12}| = x - 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + c$$

$$(\text{jiný způsob výpočtu : } \int \frac{x^2}{x^2+2} dx = \int \frac{x^2+2-2}{x^2+2} dx = \int \frac{x^2+2}{x^2+2} - \frac{2}{x^2+2} dx = \int 1 - \frac{2}{x^2+2} dx = \dots)$$

$$19) \int \frac{12x^3 - 13x^2 + 4x - 1}{4x+1} dx = |\text{dělíme}| = \int 3x^2 - 4x + 2 - \frac{3}{4x+1} dx = 3 \frac{x^3}{3} - 4 \frac{x^2}{2} + 2x - 3 \cdot \frac{1}{4} \ln|4x+1| + c =$$
$$= x^3 - 2x^2 + 2x - \frac{3}{4} \ln|4x+1| + c$$

$$20) \int \frac{2}{(3x-2)^4} dx = 2 \int (3x-2)^{-4} dx = |\text{vz.14}| = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-2)^{-3}}{-3} + c = -\frac{2}{9(3x-2)^3} + c$$