Postup při rozkladu polynomu na součin kořenových činitelů.

Rozklad polynomu na součin kořenových činitelů provádíme pomocí Hornerovo schémtu. Využíváme přitom vlastnost polynomů, podle které celočíselnými kořeny polynomu $P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, který má koeficient a_0 roven jedné, mohou být pouze dělitelé absolutního členu a_n. Budeme počítat Hornerovo schéma pro tyto dělitele dokud nenarazíme na kořen. Koeficienty na tomto řádku Hornerova schématu nám současně vyjadřují „zbytkový" polynom $Q_{n-1}(x)$ z rovnosti $P_n(x) = (x-c).Q_{n-1}(x)$. Protože nalezený kořen c může být vícenásobný, je třeba postup zopakovat pro polynom $Q_{n-1}(x)$ a pak i další „zbytkové" polynomy nižších řádů, dokud je číslo c jejich kořenem. V opačném případě počítáme Hornerovo schéma pro dalšího dělitele absolutního členu a_n. Tak postupujeme, dokud „zbytkový" polynom není 2. řádu. Kořeny tohoto polynomu pak určíme (pokud jsou to reálná čísla) pomocí vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice.

Příklad

Určete celočíselné kořeny polynomu $P(x) = x^5 + 9x^4 + 26x^3 + 20x^2 - 24x - 32$.

Řešení : Celočíselnými kořeny daného polynomu mohou být pouze dělitelé čísla $a_n = -32$, tedy čísla : $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32$.

Pomocí Hornerova schématu zjišťujeme, zda některé z nich je skutečně kořenem. Postupujeme obyčejně od menších čísel k větším :

	1	9	26	20	-24	-32
1	1	10	36	56	32	0
1	1	11	47	103	$135 \neq 0$	

tedy číslo 1 je kořenem

Z třetího řádku tabulky vyplývá, že číslo 1 je jednoduchým kořenem a platí
$x^5 + 9x^4 + 26x^3 + 20x^2 - 24x - 32 = (x-1).(x^4 + 10x^3 + 36x^2 + 56x + 32)$. Hledáme kořeny „zbytkového" polynomu $x^4 + 10x^3 + 36x^2 + 56x + 32$, přičemž víme, že číslo 1 už to nebude. Dalšími možnými kořeny jsou zbývající celočíselní dělitelé čísla –32.

	1	10	36	56	32
-1	1	9	27	29	$3 \neq 0$
2	1	12	60	176	$384 \neq 0$
-2	1	8	20	16	0

Dalším kořenem je tedy číslo –2 a daný polynom lze psát ve tvaru součinu :
$x^5 + 9x^4 + 26x^3 + 20x^2 - 24x - 32 = (x-1).(x+2).(x^3 + 8x^2 + 20x + 16)$.

Dále hledáme kořeny polynomu $x^3 + 8x^2 + 20x + 16$. Možnými kořeny jsou opět celočíselní dělitelé čísla 16 : $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16$. Čísla $\pm 1, 2$ už nemohou být kořeny, u čísla –2 je nutno prověřit, zda není kořenem vícenásobným.

	1	8	20	16
-2	1	6	8	0

Tedy číslo –2 je alespoň dvojnásobným kořenem.

„Zbytkový" polynom $x^2 + 6x + 8$ již rozložíme pomocí kořenů kvadratické rovnice. Vzhledem k tomu, že jsou to čísla -2, -4, je rozklad $(x+2)(x+4)$. Tedy celkem můžeme daný polynom vyjádřit ve tvaru součinu kořenových činitelů : $P(x) = x^5 + 9x^4 + 26x^3 + 20x^2 - 24x - 32 = (x-1).(x+2)^3.(x+4)$.

Úlohy :

Rozložte polynomy na součin kořenových činitelů pomocí Hornerova schématu :

a) $P(x)=x^5-2x^4-10x^3+20x^2+9x-18$,

b) $Q(x)=x^4-14x^3+41x^2-4x-60$,

c) $S(x)=x^5-5x^4+9x^3-13x^2+14x-6$,

d) $T(x)=x^6-6x^5+11x^4-2x^3-12x^2+8x$.

Výsledky úloh :

a) $P(x)=(x-1).(x+1).(x-2).(x-3).(x+3)$,

b) $Q(x)=(x+1).(x-2).(x-3).(x-10)$,

c) $S(x)=(x-1)^2.(x-3).(x^2+2)$,

d) $T(x)=x.(x-1).(x+1).(x-2)^3$.