2 VYBRANÉ NUMERICKÉ METODY

1) Přibližné řešení algebraických rovnic

Jde o rovnice $P_n(x) = 0$, které umíme řešit pro $n = 1, 2$. Pro větší n najdeme celočíselné kořeny pomocí Hornerova schématu. V případě neceločíselných kořenů budeme určovat alespoň přibližné řešení algebraických rovnic (s libovolnou přesností) metodou půlení.

Postup :

- Určení intervalu, ve kterém leží všechny reálné kořeny.

Je-li v rovnici $P_n(x) = 0$ koeficient u x^n roven 1, leží všechny reálné kořeny této rovnice v intervalu $\langle -A-1, A+1 \rangle$, kde A je největší z koeficientů rovnice bez ohledu na znaménko.

- Separace kořenů.

Jde o určení intervalů, ve kterých leží právě jeden kořen dané rovnice. Využíváme přitom Bolzanovu větu, podle které v intervalu (a,b), pro který platí $P_n(a).P_n(b) < 0$, leží jeden nebo lichý počet kořenů rovnice $P_n(x) = 0$.

Postupujeme tak, že interval $\langle -A-1, A+1 \rangle$ rozdělíme na menší intervaly a pomocí Hornerova schématu hledáme ten z podintervalů, v jehož krajních bodech platí $P_n(a).P_n(b) < 0$. Zde musí ležet podle Bolzanovy věty kořen.

- Aproximace kořenů metodou půlení.

Pro interval, který jsme získali separací, určíme přibližnou hodnotu kořene s libovolnou přesností metodou půlení intervalu.
Výpočet provádíme pomocí následující tabulky :

k	a_k	b_k	$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$	$P_n(x_k)$	chyba $= \frac{b_k - a_k}{2}$
1	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

2) Aproximace funkce

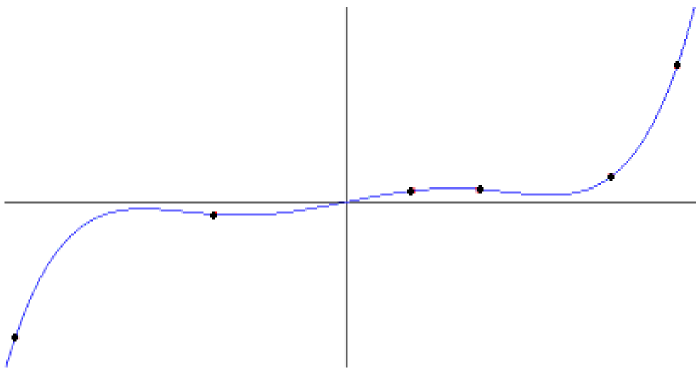
Při numerickém řešení úloh často nahrazujeme funkci $f(x)$, jejíž přesný tvar neznáme, nebo která je příliš složitá, funkcí $\varphi(x)$, která funkci $f(x)$ vhodným způsobem „napodobuje" a přitom se snadno zpracovává. Takovou funkci $\varphi(x)$ budeme nazývat **aproximací** funkce $f(x)$. Funkcí $\varphi(x)$ nejčastěji bývají polynomy.

a) Aproximace Lagrangeovým polynomem

Používá se v případě, že funkce $f(x)$ je daná hodnotami v $n+1$ bodech. Nejčastěji to bývá tabulka hodnot, vzniklá jako výsledek měření nebo výpočtů :

x_i	x_0	x_1	...	x_n
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	...	$f(x_n)$

Cílem je najít takovou funkci $\varphi(x)$, která body tabulky prochází. Jednou z možností je aproximace funkce $f(x)$ Lagrangeovým polynomem.

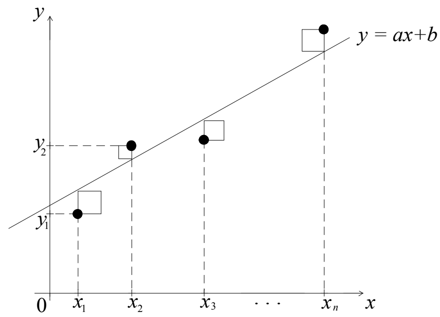


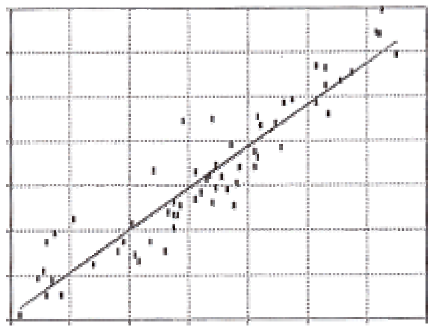
Má tvar: $L_n(x) = f(x_0).l_0(x) + f(x_1).l_1(x) + ... + f(x_n).l_n(x)$,

kde $l_k(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_n)}$, přičemž v čitateli je vynechán výraz $(x-x_k)$ a ve jmenovateli výraz (x_k-x_k).

b) Metoda nejmenších čtverců

Používá se pro aproximaci funkce dané tabulkou, jsou-li hodnoty $f(x_i)$ zatíženy chybami (například při měření) nebo je-li jich velký počet. V těchto případech nepožadujeme, aby aproximační funkce $\varphi(x)$ body souboru procházela, ale prokládáme je polynomem nebo jinou funkcí tak, aby součet vzdáleností aproximační funkce $\varphi(x)$ od hodnot z tabulky byl co nejmenší.





K aproximaci používáme přímku, parabolu, exponenciální funkci atd. podle toho, na jakou závislost mezi body souboru usuzujeme.
V případě lineární závislosti aproximujeme soubor bodů přímkou $y = ax + b$, kde koeficienty a a b určíme řešením soustavy :

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + b.n = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Při výpočtu potřebných součtů přitom používáme následující tabulku :

x_i	y_i	x_i^2	$x_i . y_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_i . y_i$