Lineární algebra

1) Vektor, lineární závislost a nezávislost

Def.: Číselným vektorem *n*-rozměrného prostoru nazýváme uspořádanou množinu *n* čísel

$$\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, \ldots a_n).$$

Čísla $a_1, a_2, \ldots a_n$ nazýváme souřadnice vektoru, číslo *n* dimenzí nebo rozměrem vektoru.

Operace s vektory : sečítání vektorů, násobení vektoru číslem

Př.: Vypočítejte vektor $\vec{\mathbf{a}} = 3\vec{\mathbf{b}} - 2\vec{\mathbf{c}}$, kde $\vec{\mathbf{b}} = (2,-3,5)$, $\vec{\mathbf{c}} = (-1,2,3)$.

Řešení : $\vec{\mathbf{a}} = 3(2,-3,5) - 2(-1,2,3) = (6,-9,15) - (-2,4,6) = (8,-13,9)$

Skalární součin vektorů : $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + \ldots + a_n.b_n$

Př.: Vypočítejte skalární součin vektorů $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}$, kde $\vec{\mathbf{a}} = (-1,2,3)$, $\vec{\mathbf{b}} = (2,-3,5)$, .

$\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = (-1,2,3).(2,-3,5) = (-1).2 + 2.(-3) + 3.5 = -2 - 6 + 15 = 7$

Uvažujme vektory $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_k$.

a) Každý vektor $\vec{\mathbf{v}} = c_1.\vec{\mathbf{v}}_1 + c_2.\vec{\mathbf{v}}_2 + \ldots + c_k.\vec{\mathbf{v}}_k$, kde c_i jsou konstanty, nazýváme **lineární kombinací** daných *k* vektorů.

b) Je-li možné aspoň jeden z vektorů $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_k$ vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů, říkáme, že tyto vektory jsou **lineárně závislé**.

c) Není-li možné žádný z vektorů $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_k$ vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů, říkáme, že tyto vektory jsou **lineárně nezávislé**.

Př.: Vektor $\vec{\mathbf{v}} = (-8,12)$ je lineární kombinací vektorů $\vec{\mathbf{v}}_1 = (2,3)$ a $\vec{\mathbf{v}}_2 = (4,-2)$, protože platí

$\vec{\mathbf{v}} = 2.\vec{\mathbf{v}}_1 - 3\vec{\mathbf{v}}_2 = 2(2,3) - 3(4,-2) = (4,6) - (12,-6) = (-8,12)$.

Př.: Vektory $\vec{\mathbf{v}}_1 = (1,2)$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = (3,1)$, $\vec{\mathbf{v}}_3 = (1,1)$ jsou lineárně závislé, protože jeden z nich je možné vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních : $(3,1) = -2.(1,2) + 5(1,1)$.

2) Matice

Def.: Maticí typu *m/n* nazýváme *m.n* reálných čísel, sestavených do *m* řádků a *n* sloupců ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

První index *i* značí řádek a druhý index *j* sloupec, ke kterém prvek a_{ij} leží.

Prvky a_{ii}, které mají stejné indexy tvoří hlavní diagonálu matice.

Druhy matic

- čtvercová ($m = n$)
- obdélníková ($m \neq n$)
- transponovaná matice k matici **A** (matice, která vznikne z matice **A** záměnou řádků za sloupce při zachování pořadí), značíme ji $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$
- jednotková (čtvercová matice, která má na hlavní diagonále samé jedničky a všude jinde samé nuly), značíme ji $\mathbf{I}$
- stupňová (každý následující řádek má na začátku alespoň o jednu nulu více než řádek předchozí)

Operace s maticemi

Součet matic (obě matice musí být stejného typu) : $\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B},\ \text{kde } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$

Součin čísla *k* a matice $\mathbf{A}$: $\boxed{\mathbf{B} = k.\mathbf{A},\ \text{kde } b_{ij} = k.a_{ij}}$

Součinem matic $\mathbf{A}.\mathbf{B}$ (kde první matice je typu *m/n* a druhá matice je typu *n/p*) je matice $\mathbf{C}$ typu *m/p*, kde $\boxed{c_{ij} = \vec{\mathbf{a}}_i . \vec{\mathbf{b}}_j}$ (jde o skalární součin řádku *i* matice **A** a sloupce *j* matice **B**).

Součin matic není komutativní, tedy obecně $\mathbf{A}.\mathbf{B} \neq \mathbf{B}.\mathbf{A}$.

Př.: Jsou dány matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Vypočítejte matici $3\mathbf{A},\ 2\mathbf{B} - \mathbf{A} + 4\mathbf{I},\ \mathbf{A}.\mathbf{B}$.

Řešení : $3\mathbf{A} = 3.\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -9 & 12 \end{pmatrix}$

$$2\mathbf{B} - \mathbf{A} + 4\mathbf{I} = 2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3 + 3.2 & 2.(-1) + 3.0 \\ -3.3 + 4.2 & -3.(-1) + 4.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice

Def.: Hodnost matice A udává počet lineárně nezávislých řádků této matice. Píšeme $h(\mathbf{A})$.

Dvě matice, které mají stejnou hodnost se nazývají ekvivalentní a píšeme $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

K určení matice používáme následující větu.

Věta : Hodnost matice ve stupňovém tvaru je rovna počtu nenulových řádků této matice (= počtu řádků, které neobsahují samé nuly).

Při určování hodnosti je tedy potřeba matici nejprve upravit na stupňový tvar. K tomu používáme tzv. **ekvivalentní úpravy**, které nemění hodnost matice. Jsou to následující úpravy :

a) transponování matice,
b) výměna řádků,

c) násobení řádku nenulovým číslem,

d) přičtení *k*-násobku některého řádku k jinému řádku,

e) vynechání řádku, který obsahuje samé nuly.

Všechny uvedené úpravy je možné bez změny hodnosti provádět i se sloupci.

Př.: Určete hodnost matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -18 & 5 & -7 \\ 0 & -9 & 5 & -3 \\ 0 & -27 & 10 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tedy $h(\mathbf{A}) = 3$.

Inverzní matice

Def.: Matici $\mathbf{A}^{-1}$ nazveme **inverzní maticí** ke čtvercové matici $\mathbf{A}$, jejíž determinant $|\mathbf{A}| \neq 0$, jestliže platí :

$\mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Postup určování inverzní matice.

Napíšeme vedle sebe matici $\mathbf{A}$ a jednotkovou matici stejného rozměru. Tuto „dvojmatici“ $(\mathbf{A}|\mathbf{I})$ převedeme pomocí ekvivalentních úprav tak, aby na místě matice $\mathbf{A}$ vznikla jednotková matice. Napravo od ní pak automaticky vznikne matice $\mathbf{A}^{-1}$.

Tedy $(\mathbf{A}|\mathbf{I}) \sim \ldots \sim (\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1})$

3) Determinanty

Def.: Determinant 2.řádu je reálné číslo $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$, které je přiřazeno čtvercové matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Píšeme $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$.

Př.: Vypočítejte hodnotu determinantu 2. řádu $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$.

Řešení : $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 2.(-3) - 4.5 = -6 - 20 = -26$

Def.: Determinant 3.řádu je reálné číslo $a_{11}.a_{22}a_{33}+a_{21}.a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$,

které je přiřazeno čtvercové matici $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Př.: Vypočítejte hodnotu determinantu 3. řádu $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Řešení : $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6.3.2+0.1.2+6.1.(-1)-2.3.6-6.(-1).1-1.0.2=0$

Def.: Determinant řádu *n* je reálné číslo $(-1)^{1+1}.a_{11}\mathbf{A}_{11}+(-1)^{1+2}.a_{12}\mathbf{A}_{12}+\ldots+(-1)^{1+n}.a_{1n}\mathbf{A}_{1n}$, které je

přiřazeno čtvercové matici $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Přitom $\mathbf{A}_{ij}$ je determinant vzniklý z původního

determinantu vynecháním řádku *i* a sloupce *j*.

Uvedený způsob vyjádření hodnoty determinantu nazýváme rozvoj podle prvků prvního řádku. Rozvoj lze provést analogicky podle libovolného jiného řádku nebo sloupce. Je vhodné k rozvoji použít řadu, obsahující co nejvíce nulových prvků.

Př.: Vypočítejte rozvojem hodnotu determinantu 3. řádu

$$\begin{vmatrix} \underline{6} & \underline{1} & \underline{2} \\ 0 & 3 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2.6.\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^3.1.\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^4.2.\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 6.(6+1)-1.(0+6)+2.(0-18)=0$$

Př.: Vypočítejte rozvojem hodnotu determinantu 4. řádu

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & \underline{0} & 2 \\ 3 & 0 & \underline{2} & 1 \\ -1 & 2 & \underline{0} & -2 \\ 3 & 1 & \underline{1} & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}.0.\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}.2.\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}.0.\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{4+3}.1.\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0-2(4+6-2-12+4-1)+0-1(0+1+12-0-6-4)=-2.(-1)-1(3)=-1$$

Vlastnosti determinantů

Při výpočtu hodnoty determinantů vyšších řádů je možné používat následující pravidla, která nám umožní vytvořit nulové prvky na zvolených místech.

1) Hodnota determinantu se nezmění, překlopíme-li jej kolem hlavní diagonály.
2) Vyměníme-li dva řádky determinantu, hodnota determinantu změní znaménko.
3) Je-li některý řádek *k*-násobkem jiného řádku, je hodnota determinantu rovna nule.
4) Hodnota determinantu se nezmění, přičteme-li k některému řádku *k*-násobek jiného řádku.
5) Má-li determinant v některém řádku samé nuly, je jeho hodnota rovna nule.
6) Násobit determinant číslem *k* znamená násobit tímto číslem všechny prvky jednoho (libovolného) řádku nebo sloupce.

Vzhledem k prvnímu pravidlu je zřejmé, že uvedené vlastnosti determinantů platí i pro sloupce.

4) Řešení soustav lineárních rovnic

Soustavou *m* lineárních rovnic o *n* neznámých $x_1, x_2, \ldots x_n$ rozumíme soustavu :

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Řešením soustavy rozumíme každý vektor ($x_1, x_2, \ldots x_n$), který vyhovuje všem rovnicím soustavy.

Dvě soustavy lineárních rovnic se stejným počtem neznámých, které mají stejné řešení, se nazývají ekvivalentní. Následující ekvivalentní úpravy soustavy nemají vliv na řešení soustavy :

a) výměna pořadí rovnic,
b) násobení rovnice nenulovým číslem,
c) přičtení *k*-násobku některého rovnice k jiné rovnici.

Matice soustavy :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Rozšířená matice soustavy :

$$\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Ekvivalentním úpravám soustavy tedy odpovídají příslušné úpravy její rozšířené matice. Soustavu proto řešíme tak, že její rozšířenou matici převedeme na stupňový tvar. Tomuto tvaru odpovídá soustava, ze kterého zpětným dosazování snadno určíme řešení soustavy. Uvedený postup se nazývá **Gaussova eliminační metoda.**

Pomocí získané stupňovité matice můžeme navíc rozhodnout o řešitelnosti soustavy na základě Frobeniovy věty :

Věta : Soustava lineárních rovnic má řešení právě tehdy, když matice soustavy a rozšířená matice soustavy mají stejnou hodnost.

Soustava lineárních rovnic o n neznámých

Má řešení : $\boxed{h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_R)}$

Nemá řešení : $\boxed{h(\mathbf{A}) \neq h(\mathbf{A}_R)}$

a) Má právě 1 řešení : $\boxed{h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_R) = n}$

b) Má nekonečně mnoho řešení, závislých na $n - h(\mathbf{A})$ parametrech : $\boxed{h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_R) < n}$

Př.: Soustava odpovídající rozšířené matici

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$ má právě jedno řešení protože $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_R) = 3 = n$

Př.: Soustava odpovídající rozšířené matici

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$ má nekonečně mnoho řešení, závislých na jednom

parametru, protože $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_R) = 2$, $n = 3$, tedy $n - h(\mathbf{A}) = 1$