Lineární algebra
Řešené příklady

Robert Mařík

7. září 2004

Obsah

1 Hodnost

Problem 1

Najděte hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Najděte hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

- Zvolíme červený řádek jako klíčový.
- Tento řádek zůstává a píšeme ho jako první.

Najděte hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2 \\ (-3) \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$2R_1 - 3R_2 = \ldots$

Najděte hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ (-3) \\ 2 \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$2R_3 - 3R_2 = \dots$

Najděte hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} (-1) \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$R_4 - R_2 = \dots$

Najděte hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

První řádek zůstává.

Najděte hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

- Další klíčový řádek bude jeden z červených řádků.
- Protože by vytváření dalších nul bulo složitější, uděláme mezikrok – vytvoříme nejprve jedničku.
- Druhý řádek ponecháme na svém místě.

Najděte hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ \color{red}{0} & \color{red}{-5} & \color{red}{3} & \color{red}{-4} & \color{red}{5} \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ \color{blue}{0} & \color{blue}{2} & \color{blue}{2} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} \\ & & & & \end{pmatrix}$$

Zvolíme červený řádek jako klíčový a provedeme $R_2 - R_3 = \ldots$

Najděte hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ (-1) \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vytvoříme jedničku i v dalším řádku: $R_2 - R_4 = \ldots$.

Najděte hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Řádek R_3 je násobkem řádku R_4.
- Jeden z nich můžeme tedy odstranit.

Najděte hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ & & & & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

- Odstranili jsme třetí řádek.
- První řádek zůstává.
- Nový klíčový řádek bude řádek s jedničkou. Píšeme jej jako druhý.

Najděte hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ & & & & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\boxed{5} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Vytvoříme nulu místo čísla -5. Provedeme tedy $5R_3 + R_2 = \ldots$

Najděte hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{h}\,(A) = 3$

- Matice je ve schodovitém tvaru.
- Schodovitý tvar má tři řádky.
- $\mathrm{h}\,(A) = 3$.

Problem 2

Najděte hodnost matice B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Najděte hodnost matice B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

- Řádek R_1 bude klíčový.
- Zůstane jako první a pomocí něj budeme nulovat zbylá čísla v prvním sloupci.

Najděte hodnost matice B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -3 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

Vynulujeme prvek a_{21}. Provedeme $-3R_1 + R_2$.

Najděte hodnost matice B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

Vynulujeme prvek a_{31}. Provedeme $R_1 + R_3$.

Najděte hodnost matice B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Prvek a_{41} je nulový a tento řádek tedy stačí pouze opsat.

Najděte hodnost matice B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

- První řádek (původně klíčový) zůstane.
- Červeně označený řádek obsahuje jedničku na začátku a zvolíme jej jako další klíčový řádek. To je nejšikovnější, protože $a_{42} = 1$, zatímco $a_{22} = -5$ a $a_{23} = 4$.

Najděte hodnost matice B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} 5$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

Vynulujeme prvek a_{22}. Provedeme $5R_4 + R_2$.

Najděte hodnost matice B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -4 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{pmatrix}$$

Vynulujeme prvek a_{32}. Provedeme $-4R_4 + R_2$.

Najděte hodnost matice B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Poslední řádek můžeme vydělit číslem 18.
- Ostatní řádky zůstanou.

Najděte hodnost matice B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

- První dva řádky zůstanou.
- Prvek $a_{34} = -1$ je šikovnější pro další úpravy, než $a_{33} = 26$. Proto jako další klíčový volíme řádek R_4.

Najděte hodnost matice B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} 26$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Vynulujeme prvek a_{33}. Provedeme $26R_4 + R_3$.

Najděte hodnost matice B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{h}(B) = 4$

- Matice je ve schodovitém tvaru.
- Schodovitý tvar má čtyři řádky. Hodnost je čtyři.

2 Soustavy lineárních rovnic

Problem 3

Řešte soustavu
$$\begin{aligned}
6x_1+2x_2-\ \ x_3+7x_4 &= 0\\
4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\
x_1+\ \ x_2-\ \ x_3-\ \ x_4 &= 0\\
x_1\qquad\ \ +\ \ x_3\qquad\ \ &= 3
\end{aligned}$$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ \ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ \ x_2-\ \ x_3-\ \ x_4 &= 0\\ x_1 \qquad\ \ +\ \ x_3 \qquad\quad &= 3 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0\\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Napíšeme rozšířenou matici soustavy A^*.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ \ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ \ x_2-\ \ x_3-\ \ x_4 &= 0\\ x_1 \qquad\quad +\ \ x_3 \qquad\quad &= 3 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 6 & 2 & -1 & 7 & 0\\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right)$$

- Jako klíčový řádek zvolíme řádek poslední.
- Tento řádek napíšeme jako první.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1\quad\ +\ x_3\qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0\\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) (-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right)$$

$R_3 - R_4 = \ldots$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1 \qquad +\ x_3 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0\\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) (-4) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16 \end{array}\right)$$

$R_2 - 4R_4 = \ldots$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1 \qquad +\ x_3 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0\\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) (-6) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16\\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array}\right)$$

$R_1 - 6R_4 = \ldots$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned}6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1\qquad +\ x_3\qquad &= 3\end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0\\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16\\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18\end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right)$$

První řádek zůstane a druhý řádek bude novým klíčovým řádkem.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1\qquad +\ x_3\qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0\\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16\\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-2)\\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ & & & & \end{array}\right)$$

$-2R_2 + R_3 = \ldots$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned}
6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\
4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\
x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\
x_1\qquad +\ x_3\qquad &= 3
\end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0\\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16\\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array}\right) (-2) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & -3 & 9 & -12 \end{array}\right)$$

$-2R_2 + R_4 = \dots$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ \ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1 \qquad +\ x_3 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 6 & 2 & -1 & 7 & 0\\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16\\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & -3 & 9 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \end{array}\right)$$

- První dva řádky zůstanou.
- Třetí řádek bude novým klíčovým řádkem a zůstane také.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned}6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4&=0\\4x_1+2x_2-3x_3+5x_4&=-4\\x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4&=0\\x_1\qquad+\ x_3\qquad&=3\end{aligned}$$

$$A^*\sim\left(\begin{array}{cccc|c}6&2&-1&7&0\\4&2&-3&5&-4\\1&1&-1&-1&0\\1&0&1&0&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&3\\0&1&-2&-1&-3\\0&2&-7&5&-16\\0&2&-7&7&-18\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&3\\0&1&-2&-1&-3\\0&0&-3&7&-10\\0&0&-3&9&-12\end{array}\right)(-1)\ \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&3\\0&1&-2&-1&-3\\0&0&-3&7&-10\\0&0&0&2&-2\end{array}\right)$$

$-R_3+R_4=\ldots$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ \ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ \ x_2-\ \ x_3-\ \ x_4 &= 0\\ x_1 \qquad +\ \ x_3 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Rozšířená matice soustavy je řádkově ekvivalentní modré matici, která je ve schodovitém tvaru.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1 \qquad + x_3 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$2x_4 = -2$

- Soustava má řešení, neboť $\mathrm{h}(A) = \mathrm{h}(A^*) = 4$. Navíc $n = 4$ (počet neznámých) a soustava má tedy jediné řešení (nula parametrů).
- Začneme dopočítávat neznámé. Napíšeme rovnici odpovídající poslednímu řádku ...

Řešte soustavu
$$\begin{aligned}6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1 \qquad + \ x_3 \qquad &= 3\end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2\end{array}\right)$$

$2x_4 = -2 \qquad \Rightarrow \qquad x_4 = -1$

a řešíme vzhledem k x_4.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1\qquad +\ x_3\qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$2x_4 = -2 \quad \Rightarrow \quad x_4 = -1$

$-3x_3 + 7x_4 = -10$

Napíšeme rovnici odpovídající předposlednímu řádku.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ \ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ \ x_2-\ \ x_3-\ \ x_4 &= 0\\ x_1\qquad\ \ +\ \ x_3\qquad\quad &= 3 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$2x_4 = -2 \qquad \Rightarrow \qquad x_4 = -1$

$-3x_3 + 7x_4 = -10 \qquad \Rightarrow \qquad -3x_3 - 7 = -10$

Dosadíme $x_4 = -1\dots$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ \ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ \ x_2-\ \ x_3-\ \ x_4 &= 0\\ x_1 \qquad +\ \ x_3 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$2x_4 = -2 \qquad \Rightarrow \qquad x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10 \qquad \Rightarrow \qquad -3x_3 - 7 = -10 \qquad \Rightarrow \qquad x_3 = 1$$

a řešíme vzhledem k x_3.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ \ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ \ x_3-\ \ x_4 &= 0\\ x_1 \qquad +\ x_3 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$2x_4=-2 \quad\Rightarrow\quad x_4=-1$$

$$-3x_3+7x_4=-10 \quad\Rightarrow\quad -3x_3-7=-10 \quad\Rightarrow\quad x_3=1$$

$$x_2-2x_3-x_4=-3$$

Napíšeme rovnici odpovídající druhému řádku.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ \ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ \ x_2-\ \ x_3-\ \ x_4 &= 0\\ x_1\qquad+\ \ x_3\qquad\quad &= 3 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$2x_4 = -2 \quad\Rightarrow\quad x_4 = -1$$

$$-3x_3+7x_4 = -10 \quad\Rightarrow\quad -3x_3-7 = -10 \quad\Rightarrow\quad x_3 = 1$$

$$x_2-2x_3-x_4 = -3 \quad\Rightarrow\quad x_2-2+1 = -3$$

Dosadíme $x_4 = -1$ a $x_3 = 1\ldots$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned}6x_1+2x_2-\ \ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1\qquad +\ x_3\qquad &= 3\end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$2x_4 = -2 \quad\Rightarrow\quad x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10 \quad\Rightarrow\quad -3x_3 - 7 = -10 \quad\Rightarrow\quad x_3 = 1$$

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3 \quad\Rightarrow\quad x_2 - 2 + 1 = -3 \quad\Rightarrow\quad x_2 = -2$$

a vyřešíme vzhledem k x_2.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ \ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1 \qquad +\ x_3 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$2x_4 = -2 \quad\Rightarrow\quad x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10 \quad\Rightarrow\quad -3x_3 - 7 = -10 \quad\Rightarrow\quad x_3 = 1$$

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3 \quad\Rightarrow\quad x_2 - 2 + 1 = -3 \quad\Rightarrow\quad x_2 = -2$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

Napíšeme rovnici odpovídající prvnímu řádku.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ \ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ \ x_2-\ \ x_3-\ \ x_4 &= 0\\ x_1 \qquad +\ \ x_3 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$2x_4 = -2 \quad \Rightarrow \quad x_4 = -1$

$-3x_3 + 7x_4 = -10 \quad \Rightarrow \quad -3x_3 - 7 = -10 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1$

$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3 \quad \Rightarrow \quad x_2 - 2 + 1 = -3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2$

$x_1 + x_3 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 1 = 3$

Dosadíme $x_3 = 1$.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1\qquad +\ x_3\qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$2x_4 = -2 \quad\Rightarrow\quad x_4 = -1$

$-3x_3 + 7x_4 = -10 \quad\Rightarrow\quad -3x_3 - 7 = -10 \quad\Rightarrow\quad x_3 = 1$

$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3 \quad\Rightarrow\quad x_2 - 2 + 1 = -3 \quad\Rightarrow\quad x_2 = -2$

$x_1 + x_3 = 3 \quad\Rightarrow\quad x_1 + 1 = 3 \quad\Rightarrow\quad x_1 = 2$

Najdeme $x_1 = 2$.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ \ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ \ x_2-\ \ x_3-\ \ x_4 &= 0\\ x_1 \qquad + \ \ x_3 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$2x_4 = -2 \quad \Rightarrow \quad x_4 = -1$

$-3x_3 + 7x_4 = -10 \quad \Rightarrow \quad -3x_3 - 7 = -10 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1$

$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3 \quad \Rightarrow \quad x_2 - 2 + 1 = -3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2$

$x_1 + x_3 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2$

Jediné řešení je $[x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = -1]$.

Vypočítali jsme všechny neznámé.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+x_2-x_3-x_4 &= 0\\ x_1+x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$2x_4 = -2 \quad \Rightarrow \quad x_4 = -1$

$-3x_3 + 7x_4 = -10 \quad \Rightarrow \quad -3x_3 - 7 = -10 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1$

$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3 \quad \Rightarrow \quad x_2 - 2 + 1 = -3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2$

$x_1 + x_3 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2$

Jediné řešení je $[x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = -1]$.

Vyřešeno.

Problem 4

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5\\
x_1 \phantom{{}-2x_2} + 2x_3 - x_4 + 2x_5 &= 3\\
x_1 + 2x_2 + 2x_3 \phantom{{}+2x_4-4x_5} &= 1\\
2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5
\end{aligned}$$

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5 &= 5\\ x_1 \qquad +2x_3-\ x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2x_2+2x_3 \qquad\qquad &= 1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5\\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array}\right)$$

Napíšeme rozšířenou matici soustavy.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5 \\ x_1 \qquad + 2x_3 - x_4 + 2x_5 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \qquad\qquad &= 1 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right)$$

Druhý řádek bude klíčový a opíšeme jej na první místo.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5 &= 5\\ x_1 \qquad +2x_3- \ x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2x_2+2x_3 \qquad\qquad &= 1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5\\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-3) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4\\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right)$$

Spravíme první řádek.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5 &= 5\\ x_1 \qquad +2x_3-\ \ x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2x_2+2x_3 \qquad\qquad &= 1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5\\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array}\right) (-1) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ & & & & & \end{array}\right)$$

Spravíme třetí řádek.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5 &= 5\\ x_1+2x_3-x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2x_2+2x_3 &= 1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5\\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-2) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array}\right)$$

Spravíme poslední řádek.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5 &= 5\\ x_1 \qquad +2x_3- \; x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2x_2+2x_3 \qquad\qquad &= 1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5\\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right)$$

- První řádek zůstane.
- Červený řádek bude nový klíčový řádek a napíšeme jej jako druhý.

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5 \\ x_1 \qquad + 2x_3 - \ x_4 + 2x_5 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \qquad\qquad &= 1 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -12 & -6 \\ & & & & & \end{array}\right)$$

Spravíme druhý řádek.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5&=5\\ x_1+2x_3-x_4+2x_5&=3\\ x_1+2x_2+2x_3&=1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5&=5 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5\\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4\\ \color{red}0 & \color{red}2 & \color{red}0 & \color{red}1 & \color{red}-2 & \color{red}-2\\ \color{green}0 & \color{green}-6 & \color{green}0 & \color{green}4 & \color{green}-8 & \color{green}-1 \end{array}\right) \boxed{3} \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -12 & -6\\ \color{blue}0 & \color{blue}0 & \color{blue}0 & \color{blue}7 & \color{blue}-14 & \color{blue}-7 \end{array}\right)$$

Spravíme poslední řádek.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5 &= 5\\ x_1+2x_3-x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2x_2+2x_3 &= 1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5\\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -12 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 7 & -14 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Zelené řádky můžeme vydělit čísly 6 a 7.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned}3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5&=5\\x_1+2x_3-x_4+2x_5&=3\\x_1+2x_2+2x_3&=1\\2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5&=5\end{aligned}$$

$$A^*\sim\left(\begin{array}{rrrrr|r}3&-2&6&2&-4&5\\1&0&2&-1&2&3\\1&2&2&0&0&1\\2&-6&4&2&-4&5\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r}1&0&2&-1&2&3\\0&-2&0&5&-10&-4\\0&2&0&1&-2&-2\\0&-6&0&4&-8&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrrrr|r}1&0&2&-1&2&3\\0&2&0&1&-2&-2\\0&0&0&6&-12&-6\\0&0&0&7&-14&-7\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r}1&0&2&-1&2&3\\0&2&0&1&-2&-2\\0&0&0&1&-2&-1\end{array}\right)$$

Poslední dva řádky jsou stejné a stačí dále pracovat jenom s jedním z nich.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5 &= 5\\ x_1+2x_3-x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2x_2+2x_3 &= 1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

- Rozšířená matice soustavy má hodnost 3, matice soustavy také. Systém proto má řešení.
- Počet parametrů je

$$\text{neznámé} - \text{hodnost} = 5 - 3 = 2.$$

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

Napíšeme rovnici příslušnou poslednímu řádku.

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5 &= 5\\ x_1 \qquad +2x_3- \ x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2x_2+2x_3 \qquad\qquad &= 1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$x_4 - 2x_5 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad x_5 = t, \qquad x_4 = 2t - 1,$

- Jsou zde dvě neznámé, ale jenom jedna rovnice. Jednu z neznámých volíme rovnu parametru.
- Buď tedy $x_5 = t$, kde t je libovolné reálné číslo. Vypočteme x_4.

Řešte soustavu rovnic $$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5 &= 5\\ x_1 \quad\; +2x_3- \;\; x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2x_2+2x_3 \qquad\qquad &= 1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$x_4 - 2x_5 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad x_5 = t, \qquad x_4 = 2t-1,$

$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$

Napíšeme rovnici odpovídající dalšímu řádku.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5 &= 5\\ x_1+2x_3-x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2x_2+2x_3 &= 1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$x_4 - 2x_5 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_5 = t, \quad x_4 = 2t-1,$

$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2 \quad \Rightarrow \quad 2x_2 + (2t-1) - 2t = -2$

Dosadíme za x_4 a x_5. Zůstává pouze neznámá x_2.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5 \\ x_1 \quad\quad + 2x_3 - x_4 + 2x_5 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \quad\quad\quad\quad &= 1 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$x_4 - 2x_5 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_5 = t, \quad x_4 = 2t - 1,$

$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2 \quad \Rightarrow \quad 2x_2 + (2t - 1) - 2t = -2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{1}{2}$

Nalezneme x_2. Dostáváme $2x_2 = -2 - 2t + 1 + 2t$ a odsud určíme x_2.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5&=5\\ x_1+2x_3-x_4+2x_5&=3\\ x_1+2x_2+2x_3&=1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5&=5 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$x_4-2x_5=-1 \quad \Rightarrow \quad x_5=t, \quad x_4=2t-1,$$

$$2x_2+x_4-2x_5=-2 \quad \Rightarrow \quad 2x_2+(2t-1)-2t=-2 \quad \Rightarrow \quad x_2=-\frac{1}{2}$$

$$x_1+2x_3-x_4+2x_5=3$$

Napíšeme rovnici odpovídající prvnímu řádku.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5 \\ x_1 \qquad + 2x_3 - \ \ x_4 + 2x_5 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \qquad\qquad &= 1 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad x_5 = t, \qquad x_4 = 2t - 1,$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2 \quad \Rightarrow \quad 2x_2 + (2t-1) - 2t = -2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 2x_3 - (2t-1) + 2t = 3, \quad x_3 = u$$

- Dosadíme. Po dosazení zůstanou neznámé x_1 a x_3. Jedna z těchto neznámých musí být parametr.
- Volme např. $x_3 = u$, kde u je libovolné reálné číslo.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5 \\ x_1 \qquad + 2x_3 - \ x_4 + 2x_5 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \qquad\qquad &= 1 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$x_4 - 2x_5 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_5 = t, \quad x_4 = 2t - 1,$

$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2 \quad \Rightarrow \quad 2x_2 + (2t-1) - 2t = -2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\dfrac{1}{2}$

$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 2x_3 - (2t-1) + 2t = 3, \quad x_3 = u$

$x_1 + 2u - (2t-1) + 2t = 3,$

$x_1 = 2 - 2u$

Vypočteme x_1.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5 &= 5\\ x_1 \qquad +2x_3- \ x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2x_2+2x_3 \qquad\qquad &= 1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$x_4 - 2x_5 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_5 = t, \quad x_4 = 2t - 1,$

$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2 \quad \Rightarrow \quad 2x_2 + (2t-1) - 2t = -2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{1}{2}$

$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 2x_3 - (2t-1) + 2t = 3, \quad x_3 = u$

$x_1 + 2u - (2t-1) + 2t = 3,$

$x_1 = 2 - 2u$

Řešení je $[x_1 = 2 - 2u, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = u, x_4 = 2t - 2, x_5 = t]$, kde t a u jsou parametry.

Vyřešeno! Jsme šikovní.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5 &= 5\\ x_1+2x_3-x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2x_2+2x_3 &= 1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$x_4 - 2x_5 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_5 = t, \quad x_4 = 2t-1,$

$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2 \quad \Rightarrow \quad 2x_2 + (2t-1) - 2t = -2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\dfrac{1}{2}$

$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 2x_3 - (2t-1) + 2t = 3, \quad x_3 = u$

$x_1 + 2u - (2t-1) + 2t = 3,$

$x_1 = 2 - 2u$

Řešení je $[x_1 = 2-2u, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = u, x_4 = 2t-2, x_5 = t]$, kde t a u jsou parametry.

Problem 5

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ \ x_4 &= 1 \\ x_1+2x_2+\ \ x_3-2x_4 &= 1 \\ 3x_1+4x_2-\ \ x_3+2x_4 &= 5 \\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right)$$

Druhý řádek bude klíčový, protože $a_{21} = 1$.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ \ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ \ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ \ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) (-2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1\\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right)$$

$(-2)R_2 + R_1$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \overset{(-3)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1\\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2\\ & & & & \end{array}\right)$$

$(-3)R_2 + R_3$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ \ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ \ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ \ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \overset{(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1\\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$(-1)R_2 + R_4$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1\\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right)$$

Dalším klíčovým řádkem bude poslední řádek, protože $a_{42} = 1$ je lepší než $a_{22} = a_{23} = -2$.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1\\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) 2 \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5\\ & & & & \end{array}\right)$$

$2R_4 + R_2$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1\\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ \\ 2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{array}\right)$$

$2R_4 + R_3$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1\\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right)$$

První dva řádky zůstanou.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1\\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Poslední řádky můžeme vydělit.

Řešte soustavu $$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1\\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Z posledních dvou řádků stačí uvažovat pouze jeden.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned}2x_1+2x_2-2x_3+\ \ x_4&=1\\ x_1+2x_2+\ \ x_3-2x_4&=1\\ 3x_1+4x_2-\ \ x_3+2x_4&=5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4&=4\end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1\\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ & & & & \end{array}\right)$$

Vynecháme tedy poslední řádek.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

x_1 x_2 x_3 x_4

- Rozšířená matice soustavy je ve schodovitém tvaru.
- $\mathrm{h}\,(A) = 3, \mathrm{h}\,(A^*) = 3, n = 4$
- Soustava má nekonečně mnoho řešení s jedním parametrem.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned}2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4&=1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4&=1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4&=5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4&=4\end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

x_1 x_2 x_3 $x_4 = 1$

$x_4 = 1$

Napíšeme rovnici odpovídající poslednímu řádku. Tím známe x_1.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned}2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4&=1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4&=1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4&=5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4&=4\end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

x_1 x_2 x_3 $x_4 = 1$

$x_4 = 1$

$x_2 + 2x_3 = 3,$

Napíšeme rovnici odpovídající prostřednímu řádku.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned}2x_1+2x_2-2x_3+x_4&=1\\x_1+2x_2+x_3-2x_4&=1\\3x_1+4x_2-x_3+2x_4&=5\\x_1+3x_2+3x_3-2x_4&=4\end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

x_1 x_2 $x_3 = t$ $x_4 = 1$

$x_4 = 1$

$x_2 + 2x_3 = 3$, $x_3 = t \Rightarrow$

- Ze dvou neznámých bude jedna rovna parametru.
- Nechť například $x_3 = t$, kde t je libovolné reálné číslo.

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ \ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ \ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ \ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

x_1 $\qquad$ $x_2 = 3-2t;$ $\qquad$ $x_3 = t;$ $\qquad$ $x_4 = 1$

$x_4 = 1$

$x_2 + 2x_3 = 3,\ x_3 = t \Rightarrow x_2 = 3 - 2t$

Nalezneme x_2.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

x_1 $\quad x_2 = 3-2t;\quad x_3 = t;\quad x_4 = 1$

$x_4 = 1$

$x_2 + 2x_3 = 3,\ x_3 = t \Rightarrow x_2 = 3-2t$

$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$

Pokračujeme k další rovnici.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+x_4&=1\\ x_1+2x_2+x_3-2x_4&=1\\ 3x_1+4x_2-x_3+2x_4&=5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4&=4 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

x_1 $\qquad x_2 = 3-2t;$ $\qquad x_3 = t;$ $\qquad x_4 = 1$

$x_4 = 1$

$x_2 + 2x_3 = 3, x_3 = t \Rightarrow x_2 = 3-2t$

$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$

$x_1 + 2(3-2t) + t - 2 \cdot 1 = 1$

Dosadíme za x_2, x_3 a x_4.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

x_1 $\qquad$ $x_2 = 3-2t;$ $\qquad$ $x_3 = t;$ $\qquad$ $x_4 = 1$

$x_4 = 1$

$x_2 + 2x_3 = 3,\ x_3 = t \Rightarrow x_2 = 3-2t$

$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$

$x_1 + 2(3-2t) + t - 2\cdot 1 = 1$

$x_1 - 4t + t + 4 = 1$

Upravíme.

Řešte soustavu $\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4 &= 1 \\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4 &= 1 \\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 5 \\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

x_1 $\qquad x_2 = 3 - 2t; \qquad x_3 = t; \qquad x_4 = 1$

$x_4 = 1$

$x_2 + 2x_3 = 3,\ x_3 = t \Rightarrow x_2 = 3 - 2t$

$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$

$x_1 + 2(3 - 2t) + t - 2 \cdot 1 = 1$

$x_1 - 4t + t + 4 = 1$

$x_1 - 3t = -3$

Upravíme.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$x_1 = -3 + 3t;$ $x_2 = 3 - 2t;$ $x_3 = t;$ $x_4 = 1$

$x_4 = 1$

$x_2 + 2x_3 = 3,\ x_3 = t \Rightarrow x_2 = 3 - 2t$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$
$$x_1 + 2(3 - 2t) + t - 2 \cdot 1 = 1$$
$$x_1 - 4t + t + 4 = 1$$
$$x_1 - 3t = -3$$
$$x_1 = 3t - 3$$

Nalezneme x_1.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ \ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ \ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ \ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$x_1 = -3+3t;$ $x_2 = 3-2t;$ $x_3 = t;$ $x_4 = 1$

Řešení je

$$x_1 = -3+3t$$
$$x_2 = 3-2t$$
$$x_3 = t$$
$$x_4 = 1$$

kde t je libovolné reálné číslo.

3 Determinant

Problem 6

Najděte následující determinant

$$\begin{vmatrix} a & b \\ i & j \end{vmatrix}$$

Najděte následující determinant

$$\begin{vmatrix} a & b \\ i & j \end{vmatrix} = a(-1)^{1+1}|j|$$

Rozvineme determinant podél prvního řádku.

Najděte následující determinant

$$\begin{vmatrix} a & b \\ i & j \end{vmatrix} = a(-1)^{1+1}|j| + b(-1)^{1+2}|i|$$

Rozvineme determinant podél prvního řádku.

Najděte následující determinant

$$\begin{vmatrix} a & b \\ i & j \end{vmatrix} = a(-1)^{1+1}|j| + b(-1)^{1+2}|i| = aj - bi$$

Upravíme.

Najděte následující determinant

$$\begin{vmatrix} a & b \\ i & j \end{vmatrix} = a(-1)^{1+1}|j| + b(-1)^{1+2}|i| = aj - bi$$

Determinant 2×2 tedy počítáme tak, že násobíme prvky v hlavní diagonále a odečteme součin prvků ve vedlejší diagonále.

Problem 7

Najděte následující determinant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ i & j & k \\ x & y & z \end{vmatrix} = a(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} j & k \\ y & z \end{vmatrix} + b(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} i & k \\ x & z \end{vmatrix} + c(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} i & j \\ x & y \end{vmatrix}$$

$$= a(jz - ky) - b(iz - kx) + c(iy - jx)$$

$$= ajz - aky - biz + bkx + ciy - cjx$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ i & j & k \\ x & y & z \end{vmatrix} = ajz + iyc + xbk - (cjx + kya + zbi)$$

Najděte následující determinant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ i & j & k \\ x & y & z \end{vmatrix} = a(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} j & k \\ y & z \end{vmatrix} + b(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} i & k \\ x & z \end{vmatrix} + c(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} i & j \\ x & y \end{vmatrix}$$

$$= a(jz - ky) - b(iz - kx) + c(iy - jx)$$

$$= ajz - aky - biz + bkx + ciy - cjx$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ i & j & k \\ x & y & z \end{vmatrix} = ajz + iyc + xbk - (cjx + kya + zbi)$$

$$\begin{matrix} a & b & c \\ i & j & k \end{matrix}$$

Problem 8

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

Druhý řádek bude klíčový.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{(-2)}{=} \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

Upravíme první řádek. Pozor! Řádky nepřehazujeme.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ (-1) \\ \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ & & & \end{vmatrix}$$

Upravíme třetí řádek.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Poslední řádek pouze opíšeme.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{2+1}. \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

- Vytvoříme Laplaceův rozvoj podle prvního sloupce.
- Červený prvek zůstane, bude vynásoben výrazem $(-1)^{\text{řádek + sloupec}}$.
- Vynecháme první sloupec a druhý řádek.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{2+1}. \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -1\Big[-8.5.2 + (-8)(-1).5 + 3.(-9).1$$

$$- (5.5.3 + 1.(-1).(-8) + 2.(-9).(-8))\Big]$$

$$\begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \end{matrix}$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{2+1}. \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -1\Big[-8.5.2 + (-8)(-1).5 + 3.(-9).1$$

$$- (5.5.3 + 1.(-1).(-8) + 2.(-9).(-8))\Big]$$

$$= -1\Big[-80 + 40 - 27 - (75 + 8 + 144)\Big]$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{2+1}. \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -1\Big[-8.5.2 + (-8)(-1).5 + 3.(-9).1$$

$$- (5.5.3 + 1.(-1).(-8) + 2.(-9).(-8))\Big]$$

$$= -1\Big[-80 + 40 - 27 - (75 + 8 + 144)\Big]$$

$$= -\Big[-67 - 227\Big]$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{2+1}. \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -1\Big[-8.5.2 + (-8)(-1).5 + 3.(-9).1$$

$$- (5.5.3 + 1.(-1).(-8) + 2.(-9).(-8))\Big]$$

$$= -1\Big[-80 + 40 - 27 - (75 + 8 + 144)\Big]$$

$$= -\Big[-67 - 227\Big] = 294$$

4 Inverzní matice

Problem 9

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

We write the matrix A and the 3×3 identity matrix.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right)$$

We choose the second row as a pivot row. The reason is that the number -1 is more convenient for pivoting than the numbers 6 or 2. The pivot row comes as the first.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) 6 \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ & & & & & \end{array}\right)$$

We adjust the element $a_{11} = 6$ to zero.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \boxed{2} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

We adjust the element $a_{31} = 2$ to zero.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ & & & & & \end{array}\right)$$

The new pivot can be either the second or the third row. We choose the last row. This row has to be written as the second.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (-1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ & & & & & \end{array}\right)$$

We adjust the element $a_{12} = 1$ to zero.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) (-2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

We adjust the element $a_{22} = 2$ to zero.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

The last pivot will be the last row. This row has to remain as the last row.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

The second row is good. This row remains.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} (-1) \\ \\ 3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

We adjust the element $a_{13} = 3$ to zero.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

The matrix on the left is the identity matrix and hence the second matrix is the inverse.

Problem 10

Given a matrix A, find the inverse matrix A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Given a matrix A, find the inverse matrix A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

We start with the matrix and the 3×3 identity matrix.

Given a matrix A, find the inverse matrix A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right)$$

We choose the second row to be a pivot row (contains the smallest numbers). This pivot row will be the first row.

Given a matrix A, find the inverse matrix A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) (-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ & & & & & \end{array}\right)$$

We adjust the element $a_{11} = 1$ to zero.

Given a matrix A, find the inverse matrix A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) (-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

We adjust the element $a_{31} = 1$ to zero.

Given a matrix A, find the inverse matrix A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Given a matrix A, find the inverse matrix A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ & & & & & \end{array}\right)$$

We adjust the element $a_{12} = -1$ to zero.

Given a matrix A, find the inverse matrix A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \color{red}{0} & \color{red}{1} & \color{red}{3} & \color{red}{1} & \color{red}{-1} & \color{red}{0} \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) (-3) \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{blue}{-4} & \color{blue}{-3} & \color{blue}{2} & \color{blue}{1} \end{array}\right)$$

We adjust the element $a_{32} = 3$ to zero.

Given a matrix A, find the inverse matrix A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

The last row remains. It will be the new pivot row.

Given a matrix A, find the inverse matrix A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ 4 \\ 3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 4 & 0 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

We adjust the element $a_{23} = 3$ to zero.

Given a matrix A, find the inverse matrix A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

We adjust the element $a_{13} = 4$ to zero.

Given a matrix A, find the inverse matrix A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5/4 & 2/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array}\right)$$

We divide each row by the leftmost nonzero number.

Given a matrix A, find the inverse matrix A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5/4 & 2/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array}\right) ; A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -8 & 8 & 4 \\ -5 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

The identity matrix is on the left. The inverse matrix is on the right. The common denominator $\frac{1}{4}$ can be taken out.