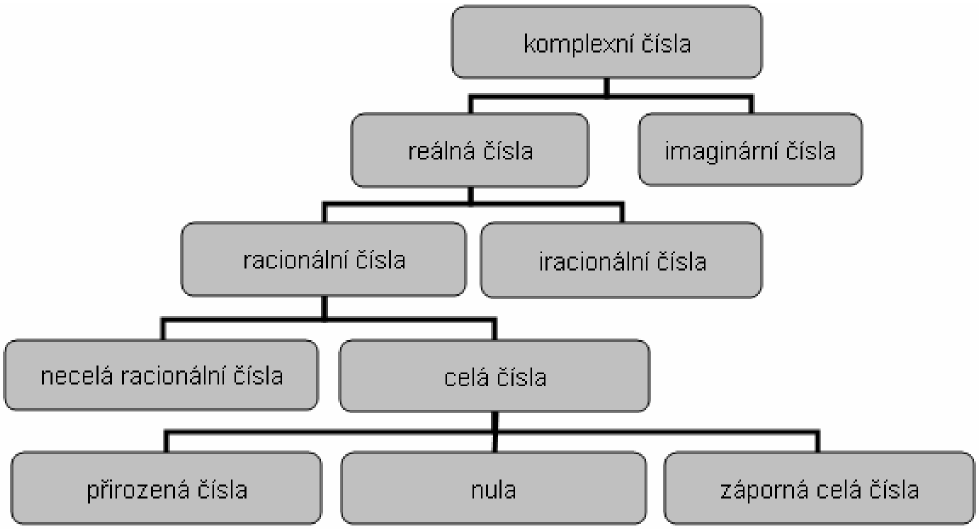
Intervaly a okolí bodu

Tato příloha je věnována přehledu číselných množin a jejich nejdůležitějších podmnožin : intervalům a okolím bodu. Jsou zde připomenuty způsoby jejich značení a grafického vyjádření.

Číselné množiny

V průběhu studia matematiky jste se postupně seznámili s různými číselnými množinami. Nejprve to byla přirozená čísla, později čísla racionální a reálná a na závěr komplexní čísla. Vztahy mezi jednotlivými druhy číselných množin vyjadřuje následující schéma :



Množinou **přirozených čísel** rozumíme množinu kladných celých čísel $\{1, 2, 3, ..., n, ...\}$. Značíme ji symbolem **N**.

Rozšíříme-li množinou přirozených čísel o nulu a záporná celá čísla, dostaneme množinu **celých čísel**. Je to tedy množina $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$. Značíme ji symbolem **Z**.

Množina **racionálních čísel** je tvořena čísly, které je možné napsat ve tvaru $\frac{p}{q}$, kde čísla p a q jsou celá čísla ($q \neq 0$). Značíme ji symbolem **Q**. Každé racionální číslo má periodický desetinný rozvoj. Tento rozvoj může být konečný (např. $\frac{5}{4} = 1{,}25$) nebo nekonečný (např. $\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}$). Racionální čísla dělíme na celá (např. $\frac{4}{2} = 2$) a necelá (např. $\frac{3}{4}$).

Čísla, která nejsou racionální, se nazývají **iracionální**. Značíme je symbolem **I**. Tato čísla mají neukončený a neperiodický desetinný rozvoj (např. $\sqrt{2} = 1{,}41421356...$). Mezi nejznámější iracionální čísla patří například Ludolfovo číslo $\pi = 1{,}14159265...$ nebo Eulerovo číslo $\mathrm{e} = 2{,}71828182.....$

Sjednocením množiny racionálních a iracionálních čísel dostaneme množinu **reálných čísel**. Značíme ji symbolem **R**.

Reálná čísla je možné definovat rovněž jako čísla, kterým jsou jednoznačně přiřazeny body nekonečné přímky - číselné osy. Existuje totiž vzájemně jednoznačné zobrazení množiny reálných čísel na přímku, kde

- obrazem každého reálného čísla je právě jeden bod přímky,
- každý bod přímky je obrazem právě jednoho reálného čísla.

Graficky znázorňujeme reálná čísla na číselné ose. Je to přímka *o*, na které jsou určeny dva různé body *O*, *J*, kde bod *O* je obrazem čísla 0 a nazývá se počátek, bod *J* je obrazem čísla 1. Každému reálnému číslu přiřadíme na číselné ose bod tzv. obraz čísla. Polopřímce *OJ* říkáme kladná poloosa, opačné polopřímce záporná poloosa číselné osy. Kladné číslo *k* zobrazíme na polopřímce *OJ* ve vzdálenosti *k* od počátku. Záporné číslo na opačné polopřímce k polopřímce *OJ* ve vzdálenost *k* od počátku.

Rozšířením množiny reálných čísel jsou komplexní čísla.

Komplexním číslem nazveme číslo tvaru $a + bi$, kde a a b jsou reálná čísla.
Písmenem i značíme imaginární jednotku, která se zavádí jako číslo splňující rovnici $i^2 + 1 = 0$, tj. jako odmocnina z čísla -1, která v reálných číslech neexistuje. Množinu komplexních čísel značíme symbolem **C.**
Reálné číslo a se nazývá reálnou částí tohoto komplexního čísla a číslo b jeho imaginární částí. Pokud je $b = 0$, jde o reálné číslo a. Tedy reálná čísla tvoří podmnožinu čísel komplexních. Pokud je $a = 0$, mluvíme o ryze imaginárním číslu.
S komplexními čísly se setkáváme například při řešení kvadratických rovnic.

Rozšířená množina reálných čísel.
Nechť **R** je množina všech reálných čísel. Rozšířenou množinou reálných čísel budeme nazývat množinu reálných čísel, rozšířenou o prvky $\pm\infty$. Značíme ji $\mathbf{R}^*$. Tedy $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Prvky množiny **R** nazýváme **vlastní body**, zatímco $\pm\infty$ nazýváme **nevlastní** body.
Na množinu $\mathbf{R}^*$ lze přirozeným způsobem rozšířit operace sčítání, odčítání, násobení, dělení a umocňování.
Přitom pro libovolné číslo $a \in \mathbf{R}$ platí :

$a + \infty = \infty$, $a - \infty = -\infty$, $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = \infty$,

pro $a > 0$ je $a(+\infty) = +\infty$, $a(-\infty) = -\infty$,

$\infty.\infty = -\infty.(-\infty) = \infty$, $\infty.(-\infty) = -\infty$,

$\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$.

Nedefinovány jsou operace : $\infty - \infty$, $\pm\infty.0$, $\frac{\pm\infty}{0}$, $\frac{a}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0.\infty$, 1^{∞}, ∞^{0}.

Příklad : Určete hodnotu výrazu $\dfrac{4.(-\infty)+(-\infty)}{\frac{1}{+\infty}+3}$.

Řešení : $\dfrac{4.(-\infty)+(-\infty)}{\frac{1}{+\infty}+3}=\dfrac{-\infty-\infty}{0+3}=\dfrac{-\infty}{3}=\dfrac{1}{3}(-\infty)=-\infty$

Intervaly a okolí bodu

Mezi nejdůležitější podmnožiny množiny reálných čísel patří intervaly a okolí bodu.
V matematice interval označuje množinu reálných čísel ležících mezi dvěma určitými čísly, která se nazývají meze intervalu. Intervaly rozlišujeme uzavřené a otevřené, resp. konečné a nekonečné.

Definice konečných intervalů : Nechť a, b jsou dvě libovolná reálná čísla, kde $a < b$. Potom
a) uzavřený interval, který značíme $\langle a,b\rangle$, je množina všech reálných čísel x, pro která platí $a \le x \le b$,
b) otevřený interval, který značíme (a,b), je množina všech reálných čísel x, pro která platí $a < x < b$,
c) polouzavřený interval , který značíme $\langle a,b)$, je množina všech reálných čísel x, pro která platí $a \le x < b$,
d) polootevřený interval , který značíme $(a,b\rangle$, je množina všech reálných čísel x, pro která platí $a < x \le b$.

Grafické znázornění konečných intervalů.
Otevřený interval označujeme kulatými závorkami a graficky ho znázorňujeme úsečkou s prázdnými krajními body.
Uzavřený interval označujeme hranatými závorkami a graficky ho znázorňujeme úsečkou s plnými krajními body.

a)

b)

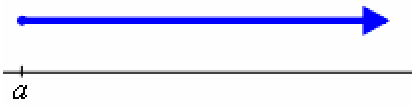
c)

d)

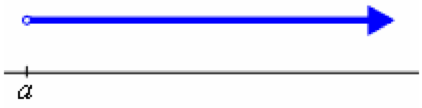
Definice nekonečných intervalů : Nechť a je libovolné reálné číslo, pak
a) interval $\langle a,+\infty)$ je množina všech reálných čísel x, pro která platí $x \ge a$,
b) interval $(a,+\infty)$ je množina všech reálných čísel x, pro která platí $x > a$,
c) interval $(-\infty,a\rangle$ je množina všech reálných čísel x, pro která platí $x \le a$,
d) interval $(-\infty,a)$ je množina všech reálných čísel x, pro která platí $x < a$,
e) interval $(-\infty,+\infty)$ je množina všech reálných čísel.

Grafické znázornění nekonečných intervalů.
Nekonečný interval značíme úsečkou se šipkou.

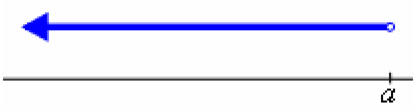
a)



b)



c)



d)

Definice okolí bodu : Okolím bodu $x_0 \in \mathbf{R}$ rozumíme libovolný otevřený interval, který obsahuje bod x_0. Bod x_0 bývá nejčastěji středem tohoto intervalu.

Nechť x_0 a $\delta > 0$ jsou reálná čísla.

a) Interval $\langle x_0, x_0 + \delta)$ nazveme pravým δ okolím bodu x_0.

b) Interval $(x_0 - \delta, x_0\rangle$ nazveme levým δ okolím bodu x_0.

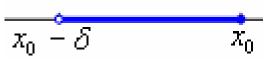
c) Interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nazveme δ okolím bodu x_0.

d) Interval $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ nazveme ryzím δ okolím bodu x_0.

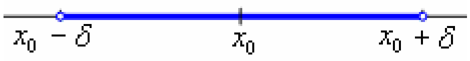
Grafické znázornění okolí bodu.

a)

b)



c)



d)