Integrály

Robert Mařík

13. září 2004

Obsah

1 Základní vzorce

Najděte $\int (2x + 3\sqrt[4]{+}\frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x.$

$$I = \int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x$$

Najděte $\int (2x + 3\sqrt[4]{+}\frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x.$

$$I = \int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\int x\,\mathrm{d}x + 3\int x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x + 6\int x^{-3}\,\mathrm{d}x - \int \sin x\,\mathrm{d}x + \int e^x\,\mathrm{d}x$$

- Integrál ze součtu je součet integrálů.
- Integrál násobku funkce je násobek integrálu.
- Některé funkce je možno přepsat na mocninné funkce.

Najděte $\int (2x + 3\sqrt[4]{+}\frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\int x\,\mathrm{d}x + 3\int x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x + 6\int x^{-3}\,\mathrm{d}x - \int \sin x\,\mathrm{d}x + \int e^x\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^{5/4}}{5/4} + 6\frac{x^{-2}}{-2} - (-\cos x) + e^x + C$$

- $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
- $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x$
- $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x$

Najděte $\int (2x + 3\sqrt[4]{+} \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} I &= \int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int x\,\mathrm{d}x + 3\int x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x + 6\int x^{-3}\,\mathrm{d}x - \int \sin x\,\mathrm{d}x + \int e^x\,\mathrm{d}x \\ &= 2\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^{5/4}}{5/4} + 6\frac{x^{-2}}{-2} - (-\cos x) + e^x + C \\ &= x^2 + \frac{12}{5}x^{5/4} - 3\frac{1}{x^2} + \cos x + e^x + C \end{aligned}$$

Najděte $\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x$.

$$I = \int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x$$

Najděte $\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{\sin x}{\cos x} \,\mathrm{d}x$$

Použijeme definici funkce tangens.

Najděte $\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x \\
&= - \int \frac{- \sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

- Platí $(\cos x)' = -\sin x$. Čitatel se tedy liší od derivace jmenovatele jenom konstantím násobkem.
- Vynásobíme a vydělíme integrál tímto násobkem.

Najděte $\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \,\mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \,\mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Formálně použijeme vztah $(\cos x)' = -\sin x$, abychom viděli vzorec $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}x = \ln |f(x)| + C$.

Najděte $\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x \\
&= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x \\
&= -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} \, \mathrm{d}x \\
&= -\ln|\cos x| + C
\end{aligned}
$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$$

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

- Platí $(x^2+4x+5)' = 2x+4$. Čitatel se tedy liší od derivace jmenovatele jenom konstantím násobkem.
- Vynásobíme a vydělíme integrál tímto násobkem.

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Přepíšeme do tvaru $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)+C
\end{aligned}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \frac{x+5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$$

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \frac{x+5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \quad \frac{x}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$$

- Derivace jmenovatele je x, v čitateli však není násobek této funkce.
- Vzorec $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ nelze přímo použít.
- Rozdělíme zlomek na dva.

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x.$

$$I = \int \frac{x+5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$$

- V prvním zlomku je v čitateli polovina derivace jmenovatele.
- Proto první zlomek vynásobíme a vydělíme dvěma.

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{x+5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + 5\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C
\end{aligned}
$$

- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{A^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{x}{A}$

Najděte $\displaystyle\int \frac{1}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \frac{1}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x$$

Najděte $\int \frac{1}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \frac{1}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int (x+6)^{-3}\,\mathrm{d}x$$

Jedná se o mocninnou funkci.

Najděte $\int \frac{1}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \frac{1}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int (x+6)^{-3}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{(x+6)^{-2}}{-2}$$

- $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$, kde F je integrál z f.
- V našem případě je $f(x) = x^{-3}$, $F(x) = \frac{x^{-2}}{-2}$ a $a = 1$.

Najděte $\int \frac{1}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x \\ &= \int (x+6)^{-3}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{(x+6)^{-2}}{-2} \\ &= -\frac{1}{2(x+6)^2} + C \end{aligned}$$

Upravíme.

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{(2-x)^5}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int e^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int e^{3x}\,\mathrm{d}x =$$

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + C$$

$$\int \frac{1}{(2-x)^5}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int e^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int e^{3x}\,\mathrm{d}x =$$

$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$, v našem případě $a=2$

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + C$$

$$\int \frac{1}{(2-x)^5}\,\mathrm{d}x = \int (2-1\cdot x)^{-5}\,\mathrm{d}x$$

$$\int e^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int e^{3x}\,\mathrm{d}x =$$

Přepíšeme na mocninnou funkci.

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + C$$

$$\int \frac{1}{(2-x)^5}\,\mathrm{d}x = \int (2-1\cdot x)^{-5}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(2-x)^{-4}}{-4}\cdot\frac{1}{-1}$$

$$\int e^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int e^{3x}\,\mathrm{d}x =$$

$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$, v našem případě $a=-1$

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + C$$

$$\int \frac{1}{(2-x)^5}\,\mathrm{d}x = \int (2-1\cdot x)^{-5}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(2-x)^{-4}}{-4}\cdot\frac{1}{-1}$$

$$= \frac{1}{4(2-x)^4} + C$$

$$\int e^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int e^{3x}\,\mathrm{d}x =$$

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + C$$

$$\int \frac{1}{(2-x)^5}\,\mathrm{d}x = \int (2-1\cdot x)^{-5}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(2-x)^{-4}}{-4}\cdot\frac{1}{-1}$$

$$= \frac{1}{4(2-x)^4} + C$$

$$\int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x} + C$$

$$\int e^{3x}\,\mathrm{d}x =$$

$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$, v našem případě $a=-1$

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + C$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(2-x)^5}\,\mathrm{d}x &= \int (2-1\cdot x)^{-5}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{(2-x)^{-4}}{-4}\cdot\frac{1}{-1}\\ &= \frac{1}{4(2-x)^4} + C\end{aligned}$$

$$\int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x} + C$$

$$\int e^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{(2x-4)}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

"Zašifrujeme" derivaci jmenovatele, tj. výraz $(2x-4)$, do čitatele.

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

- Musíme upravit zlomek tak, aby se zlomky v prvním a druhém integrálu rovnaly.
- K těmto úpravám použijeme jenom multiplikativní a aditivní konstanty (nenadělají “moc velkou neplechu” při integraci).
- Přidáním násobku $\dfrac{1}{2}$ máme ve druhém zlomku v čitateli výraz $\dfrac{1}{2}(2x-4) = x-2$. Koeficient u x je v pořádku.

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

- $\dfrac{1}{2}(2x-4) = x-2$
- $\dfrac{1}{2}(2x-4)+2 = x$
- Nyní je v čitateli jenom x. Chybí číslo 5.

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x.$

$$I = \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$

- $\dfrac{1}{2}(2x-4) = x-2$
- $\dfrac{1}{2}(2x-4)+2 = x$
- $\dfrac{1}{2}(2x-4)+2+5 = x+5$
- První a druhý zlomek jsou stejné, nedopustili jsme se žádné úpravy, která by změnila hodnotu zlomku.

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-4}{x^2-4x+9}+\frac{2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Rozdělíme zlomek na dva.

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + \int \frac{7}{(x-2)^2+5}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$$

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + \int \frac{7}{(x-2)^2+5}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Doplníme na čtverec ve jmenovateli druhého zlomku.

$$x^2-4x+9 = x^2-2\cdot 2\cdot x+2^2-4+9 = (x-2)^2+5$$

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + \int \frac{7}{(x-2)^2+5}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + 7\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1}
\end{aligned}$$

$\displaystyle\int \frac{1}{A^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{x}{A}$, kde v našem případě $A=\sqrt{5}$

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + \int \frac{7}{(x-2)^2+5}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + 7\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1} \end{aligned}$$

$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$, v našem případě $a=1$

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + \int \frac{7}{(x-2)^2+5}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + 7\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1} \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + 7\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{5}} + C
\end{aligned}$$

Upravíme.

2 Parciální zlomky.

Rozložte na parciální zlomky (neurčité koeficienty nepočítejte).

$$\frac{x^2}{(x-1)x(x+3)} =$$

$$\frac{x}{x^3-1} =$$

$$\frac{3x-2}{(x-1)^2x^2} =$$

$$\frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)^2} =$$

Rozložte na parciální zlomky (neurčité koeficienty nepočítejte).

$$\frac{x^2}{(x-1)x(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+3},$$

$$\frac{x}{x^3-1} =$$

$$\frac{3x-2}{(x-1)^2x^2} =$$

$$\frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)^2} =$$

- První zlomek obsahuje tři reálné jednoduché kořeny.
- Dostaneme tři parciální zlomky s konstantou v čitateli a lineárním výrazem ve jmenovateli.

Rozložte na parciální zlomky (neurčité koeficienty nepočítejte).

$$\frac{x^2}{(x-1)x(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+3},$$

$$\frac{x}{x^3-1} =$$

$$\frac{3x-2}{(x-1)^2x^2} =$$

$$\frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)^2} =$$

Nejprve rozložíme na součin ve jmenovateli. Rozklad je
$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$.

Rozložte na parciální zlomky (neurčité koeficienty nepočítejte).

$$\frac{x^2}{(x-1)x(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+3},$$

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1},$$

$$\frac{3x-2}{(x-1)^2x^2} =$$

$$\frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)^2} =$$

- Rozklad $(x-1)(x^2+x+1)$ ukazuje, že jmenovatel má jeden reálný jednoduchý kořen a dva komplexně sdružené kořeny.
- Parciální zlomek příslušný ke komplexním kořenům obsahuje v čitateli lineární funkci.

Rozložte na parciální zlomky (neurčité koeficienty nepočítejte).

$$\frac{x^2}{(x-1)x(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+3},$$

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1},$$

$$\frac{3x-2}{(x-1)^2x^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2}$$

$$\frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)^2} =$$

Jmenovatel má dva reálné kořeny. Oba jsou násobnosti dva.

Rozložte na parciální zlomky (neurčité koeficienty nepočítejte).

$$\frac{x^2}{(x-1)x(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+3},$$

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1},$$

$$\frac{3x-2}{(x-1)^2x^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2}$$

$$\frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}$$

Jmenovatel má jeden jednoduchý reálný kořen a dva komplexně sdružené kořeny.

Vypočtěte $I_1 = \displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)}\,\mathrm{d}x.$

Vypočtěte $I_1 = \int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

Napíšeme rozklad s neurčitými koeficienty.

Vypočtěte $I_1 = \int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

$$x^2+1 = A(x+2)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+2)$$

Vynásobíme rovnici společným jmenovatelem.

Vypočtěte $I_1 = \int \dfrac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

$$x^2+1 = A(x+2)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+2)$$

$$x = 1$$

Dosadíme $x = 1$ do červeného vztahu.

Vypočtěte $I_1 = \int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

$$x^2+1 = A(x+2)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+2)$$

$$x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 2 = A3(-1) + B0 + C0$$

Dostáváme rovnici neobsahující ani B, ani C. Tuto rovnici řešíme vzhledem k A.

Vypočtěte $I_1 = \displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

$$x^2+1 = A(x+2)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+2)$$

$$x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 2 = A3(-1) + B0 + C0 \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{2}{3}$$

Vypočtěte $I_1 = \int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

$$x^2+1 = A(x+2)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+2)$$

$$x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 2 = A3(-1) + B0 + C0 \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{2}{3}$$

$$x = -2$$

Dosadíme $x = -2$ do červeného vztahu.

Vypočtěte $I_1 = \int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

$$x^2+1 = A(x+2)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+2)$$

$$x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 2 = A3(-1) + B0 + C0 \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{2}{3}$$

$$x = -2 \qquad \Rightarrow \qquad 5 = A0 + B\,(-3)\,(-4) + C0$$

Výsledná rovnice obsahuje pouze koeficient B.

Vypočtěte $I_1 = \int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

$$x^2+1 = A(x+2)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+2)$$

$$x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 2 = A3(-1) + B0 + C0 \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{2}{3}$$

$$x = -2 \qquad \Rightarrow \qquad 5 = A0 + B\,(-3)\,(-4) + C0 \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{5}{12}$$

Vypočteme koeficient B.

Vypočtěte $I_1 = \displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

$$x^2+1 = A(x+2)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+2)$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 = A3(-1) + B0 + C0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{2}{3}$$

$$x = -2 \quad \Rightarrow \quad 5 = A0 + B\,(-3)\,(-4) + C0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{5}{12}$$

$$x = 2$$

Dosadíme $x = 2$ do červeného vztahu.

Vypočtěte $I_1 = \int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

$$x^2+1 = A(x+2)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+2)$$

$$x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 2 = A3(-1) + B0 + C0 \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{2}{3}$$

$$x = -2 \qquad \Rightarrow \qquad 5 = A0 + B\,(-3)\,(-4) + C0 \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{5}{12}$$

$$x = 2 \qquad \Rightarrow \qquad 5 = A0 + B0 + 4C$$

Výsledná rovnice obsahuje pouze koeficient C.

Vypočtěte $I_1 = \int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

$$x^2+1 = A(x+2)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+2)$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 = A3(-1) + B0 + C0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{2}{3}$$

$$x = -2 \quad \Rightarrow \quad 5 = A0 + B\,(-3)\,(-4) + C0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{5}{12}$$

$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad 5 = A0 + B0 + 4C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{5}{4}$$

Vypočteme C.

Vypočtěte $I_1 = \int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

$$x^2+1 = A(x+2)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+2)$$

$$x=1 \quad \Rightarrow \quad 2 = A3(-1) + B0 + C0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{2}{3}$$

$$x=-2 \quad \Rightarrow \quad 5 = A0 + B\,(-3)\,(-4) + C0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{5}{12}$$

$$x=2 \quad \Rightarrow \quad 5 = A0 + B0 + 4C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{5}{4}$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = -\frac{\frac{2}{3}}{x-1} + \frac{\frac{5}{12}}{x+2} + \frac{\frac{5}{4}}{x-2}$$

Použijeme vypočtené hodnoty koeficientů A, B a C v červeném vztahu.

Vypočtěte $I_1 = \int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = -\frac{\frac{2}{3}}{x-1} + \frac{\frac{5}{12}}{x+2} + \frac{\frac{5}{4}}{x-2}$$

$$I_1 = -\frac{2}{3}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \frac{5}{12}\int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x + \frac{5}{4}\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{5}{12}\ln|x+2| + \frac{5}{4}\ln|x-2| + C$$

Vypočteme integrál pomocí základních vzorců.

Vypočtěte $I_2 = \int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2}\,\mathrm{d}x.$

Vypočtěte $I_2 = \int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}$$

Racionální funkce není ryze lomená. Nejprve proto vydělíme (zde dělení vynecháváme, předpokládáme znalost této operace).

Vypočtěte $I_2 = \int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$$

Napíšeme formální tvar rozkladu na parciální zlomky s neurčitými koeficienty.

Vypočtěte $I_2 = \int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$$

$$x^2 - x + 1 = A(x+1) + Bx(x+1) + Cx^2$$

Vynásobíme společným jmenovatelem.

Vypočtěte $I_2 = \int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} \,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$$

$$x^2 - x + 1 = A(x+1) + Bx(x+1) + Cx^2$$

$$x = 0$$

Dosadíme $x = 0$ do červeného vztahu.

Vypočtěte $I_2 = \int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$$

$$x^2 - x + 1 = A(x+1) + Bx(x+1) + Cx^2$$

$x = 0$ $\quad 1 = A + 0B + 0C;$ $\quad A = 1$

Nalezneme A.

Vypočtěte $I_2 = \int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} \, \mathrm{d}x.$

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$$

$$x^2 - x + 1 = A(x+1) + Bx(x+1) + Cx^2$$

$x = 0$ $\quad 1 = A + 0B + 0C;$ $\quad A = 1$

$x = -1$

Dosadíme $x = -1$ do červeného vztahu.

Vypočtěte $I_2 = \displaystyle\int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$$

$$x^2 - x + 1 = A(x+1) + Bx(x+1) + Cx^2$$

$x = 0$	$1 = A + 0B + 0C;$	$A = 1$
$x = -1$	$3 = 0A + 0B + 1C;$	$C = 3$

Nalezneme C.

Vypočtěte $I_2 = \displaystyle\int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$$

$$x^2 - x + 1 = A(x+1) + Bx(x+1) + Cx^2$$

$x = 0$ $\qquad 1 = A + 0B + 0C;$ $\qquad A = 1$

$x = -1$ $\qquad 3 = 0A + 0B + 1C;$ $\qquad C = 3$

$$x^2 - x + 1 = Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx^2$$

Zbývá najít B. Roznásobíme součiny v červené rovnici a obdržíme modrou rovnici.

Vypočtěte $I_2 = \int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$$

$x^2 - x + 1 = A(x+1) + Bx(x+1) + Cx^2$

$x = 0$ $\quad 1 = A + 0B + 0C;$ $\quad A = 1$

$x = -1$ $\quad 3 = 0A + 0B + 1C;$ $\quad C = 3$

$x^2 - x + 1 = Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx^2$

x^2: $1 = B + C,$ $\quad x^1$: $-1 = A + B,$ $\quad x^0$: $1 = A$

Porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin. Koeficienty, které stojí nalevo a napravo u stejných mocnin musí být stejné.

Vypočtěte $I_2 = \int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$$

$$x^2 - x + 1 = A(x+1) + Bx(x+1) + Cx^2$$

$x = 0$ $\quad 1 = A + 0B + 0C;$ $\quad A = 1$

$x = -1$ $\quad 3 = 0A + 0B + 1C;$ $\quad C = 3$

$$x^2 - x + 1 = Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx^2$$

x^2: $1 = B + C,$ $\quad x^1$: $-1 = A + B,$ $\quad x^0$: $1 = A$

$B = -2$

Dosadíme C do první nebo A do druhé rovnice a nalezneme B.

Vypočtěte $I_2 = \int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$$

$A = 1$, $B = -2$, $C = 3$

$$I_2 = \int x - 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{3}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

Máme vypočteny hodnoty koeficientů. Tyto hodnoty použijeme v rozkladu na součin.

Vypočtěte $I_2 = \int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$$

$A = 1$, $B = -2$, $C = 3$

$$I_2 = \int x - 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{3}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{x} - 2\ln|x| + 3\ln|x+1| + C$$

Zintegrujeme pomocí vzroců.

Vypočtěte $I_3 = \int \frac{x}{x^3 - 8}\,\mathrm{d}x.$

Vypočtěte $I_3 = \displaystyle\int \frac{x}{x^3 - 8}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

Vypočtěte $I_3 = \displaystyle\int \frac{x}{x^3 - 8}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

$$x = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2)$$

Vynásobíme společným jmenovatelem.

Vypočtěte $I_3 = \int \frac{x}{x^3 - 8}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

$$x = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2)$$

$x = 2$ $\quad\quad 2 = 12A, \quad\quad A = \frac{1}{6}$

Dosadíme $x = 2$

Vypočtěte $I_3 = \int \frac{x}{x^3 - 8}\,\mathrm{d}x$.

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

$$x = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2)$$

$$x = 2 \qquad 2 = 12A, \qquad A = \frac{1}{6}$$

$$x = Ax^2 + 2Ax + 4A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C$$

Roznásobíme. Hledáme B a C.

Vypočtěte $I_3 = \int \frac{x}{x^3-8}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

$$x = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2)$$

$$x = 2 \qquad 2 = 12A, \qquad A = \frac{1}{6}$$

$$x = Ax^2 + 2Ax + 4A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C$$

$$0 = A + B, \qquad 1 = 2A - 2B + C, \qquad 0 = 4A - 2C$$

Porovnáním koeficientů u odpovídajících si mocnin obdržíme rovnice pro koeficienty B a C.

Vypočtěte $I_3 = \int \frac{x}{x^3-8}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

$$x = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2)$$

$$x = 2 \qquad 2 = 12A, \qquad A = \frac{1}{6}$$

$$x = Ax^2 + 2Ax + 4A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C$$

$$0 = A + B, \qquad 1 = 2A - 2B + C, \qquad 0 = 4A - 2C$$

$$B = -\frac{1}{6},\ C = \frac{1}{3}$$

Vyřešíme tyto rovnice.

Vypočtěte $I_3 = \displaystyle\int \frac{x}{x^3-8}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

$$x = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2)$$

$$x = 2 \qquad 2 = 12A, \qquad A = \frac{1}{6}$$

$$x = Ax^2 + 2Ax + 4A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C$$

$$0 = A + B, \qquad 1 = 2A - 2B + C, \qquad 0 = 4A - 2C$$

$$B = -\frac{1}{6},\ C = \frac{1}{3}$$

$$I_3 = \int \frac{1}{6}\,\frac{1}{x-2} + \frac{-\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x$$

Dosadíme hodnoty koeficientů do rozkladu.

Vypočtěte $I_3 = \int \frac{x}{x^3-8}\,\mathrm{d}x.$

$$I_3 = \int \frac{1}{6}\,\frac{1}{x-2} + \frac{-\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{1}{6}\int \frac{x-2}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x$$

První člen integrujeme pomocí vzorce.

Vypočtěte $I_3 = \int \frac{x}{x^3-8}\,\mathrm{d}x.$

$$I_3 = \int \frac{1}{6}\,\frac{1}{x-2} + \frac{-\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{1}{6}\int \frac{x-2}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{1}{6}\int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-1-2}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x$$

- Ve druhém zlomku "zašifrujeme" do čitatele derivaci jmenovatele.
- K tomu můžeme použít multiplikativní a aditivní konstanty.

Vypočtěte $I_3 = \int \frac{x}{x^3-8}\,\mathrm{d}x.$

$$I_3 = \int \frac{1}{6}\,\frac{1}{x-2} + \frac{-\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{1}{6}\int \frac{x-2}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{1}{6}\int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-1-2}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{1}{6}\int \frac{1}{2}\,\frac{2x+2}{x^2+2x+4} + \frac{-3}{(x^2+2x+1)+3}\,\mathrm{d}x$$

Rozdělíme zlomek.

Vypočtěte $I_3 = \displaystyle\int \frac{x}{x^3-8}\,\mathrm{d}x.$

$$I_3 = \int \frac{1}{6}\,\frac{1}{x-2} + \frac{-\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{1}{6}\int \frac{x-2}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{1}{6}\int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-1-2}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{1}{6}\int \frac{1}{2}\,\frac{2x+2}{x^2+2x+4} + \frac{-3}{(x^2+2x+1)+3}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{12}\ln|x^2+2x+4| + \frac{3}{6}\int \frac{1}{(x+1)^2+3}\,\mathrm{d}x$$

- První zlomek má v čitateli derivaci jmenovatele.
- V druhém zlomku doplníme jmenovatel na čtverec.

Vypočtěte $I_3 = \int \frac{x}{x^3-8}\,\mathrm{d}x$.

$$I_3 = \int \frac{1}{6}\,\frac{1}{x-2} + \frac{-\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{1}{6}\int \frac{x-2}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{1}{6}\int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-1-2}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{1}{6}\int \frac{1}{2}\,\frac{2x+2}{x^2+2x+4} + \frac{-3}{(x^2+2x+1)+3}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{2}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{12}\ln|x^2+2x+4| + \frac{3}{6}\int \frac{1}{(x+1)^2+3}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{12}\ln(x-2)^2 - \frac{1}{12}\ln|x^2+2x+4| + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$$

Dokončíme integraci použitím vzorce.

3 Integrály per-partés

Vypočtěte $\int (x^2 + 1)e^{-x}\,\mathrm{d}x.$

Vypočtěte $\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Integruje součin polynomu a exponenciální funkce.

Vypočtěte $\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}}$$

- Integrujeme per-partés.
- Polynom budeme derivovat a exponencielu integrovat.
- Nezapomeňme, že $\int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x}$.

Vypočtěte $\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Vzorec je $\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x$.

Vypočtěte $\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}}$$

- Opět polynom krát exponenciální funkce.
- Opět integrujeme per-partés. Opět derivujeme polynom.

Vypočtěte $\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x\right)$$

Vzorec pro červenou část je $\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x$, zbytek zůstane.

Vypočtěte $\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x})$$

$$\int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x}$$

Vypočtěte $\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) = -e^{-x}(x^2+2x+3) + C,$$

Vytkneme $(-e^{-x})$.

Vypočtěte $\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x.$

Vypočtěte $\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$$

Jedná se o součin polynomu a funkce arkustangens.

Vypočtěte $\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & u' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ v' = x & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}}$$

Budeme integrovat metodou per-partés. Budeme integrovat polynom a derivovat arkustangens.

Vypočtěte $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & u' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ v' = x & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}} = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$$

$$\int u v' \, dx = uv - \int u' v \, dx$$

Vypočtěte $\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x & u' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ v' = x & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix}} = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

Musíme integrovat racionální funkci, která není ryze lomená. Provedeme dělení:

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$$

Vypočtěte $\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & u' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ v' = x & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}} = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

K dokončení zbývá integrovat jedničku a jeden parciální zlomek. To provedeme pomocí příslušných vzorců.

Vypočtěte $\int \ln x \, \mathrm{d}x$

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x$$

Vypočtěte $\int \ln x \, \mathrm{d}x$

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \\ v' = 1 & v = \end{array}}$$

Ve funkci je "zašifrovaný" součin polynomu a logaritmické funkce:

$$\int 1 \cdot \ln x \, \mathrm{d}x.$$

Integrujeme per-partés při volbě

$$\int uv' \, \mathrm{d}x = uv - \int u'v \, \mathrm{d}x$$

$u = \ln x$ a $v' = 1$.

Vypočtěte $\int \ln x \, \mathrm{d}x$

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\int 1 \, \mathrm{d}x = x$$

Vypočtěte $\int \ln x \, \mathrm{d}x$

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}} = x \ln x - \int 1 \, \mathrm{d}x$$

$$\int u v' \, \mathrm{d}x = uv - \int u' v \, \mathrm{d}x$$

Užijeme vztah $\dfrac{1}{x} x = 1$.

Vypočtěte $\int \ln x \, \mathrm{d}x$

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}} = x \ln x - \int 1 \, \mathrm{d}x$$

$$= x \ln x - x$$

$\int 1 \, \mathrm{d}x = x$

Vypočtěte $\int \ln x \,\mathrm{d}x$

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}} = x \ln x - \int 1 \,\mathrm{d}x$$

$$= x \ln x - x$$

$$= x(\ln x - 1) + C$$

Hotovo.

Vypočtěte $\int x \sin x \, \mathrm{d}x$

$$\int x \sin x \, \mathrm{d}x$$

Vypočtěte $\int x \sin x \, \mathrm{d}x$

$$\int x \sin x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = \\ v' = \sin x & v = \end{array}}$$

Integrujeme per-partés pomocí vzorce

$$\int uv' \, \mathrm{d}x = uv - \int u'v \, \mathrm{d}x$$

při $u = x$ a $v' = \sin x$.

Vypočtěte $\int x \sin x \, \mathrm{d}x$

$$\int x \sin x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}}$$

Integrujeme per-partés pomocí vzorce

$$\int uv' \, \mathrm{d}x = uv - \int u'v \, \mathrm{d}x$$

při $u = x$ a $v' = \sin x$.

Vypočtěte $\int x \sin x \, \mathrm{d}x$

$$\int x \sin x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{matrix}} = -x \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) \, \mathrm{d}x$$

Integrujeme per-partés pomocí vzorce

$$\int u v' \, \mathrm{d}x = uv - \int u' v \, \mathrm{d}x$$

při $u = x$ a $v' = \sin x$.

Vypočtěte $\int x \sin x \, \mathrm{d}x$

$$\int x \sin x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}} = -x \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) \, \mathrm{d}x$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, \mathrm{d}x$$

Upravíme.

Vypočtěte $\int x \sin x \,\mathrm{d}x$

$$\int x \sin x \,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}} = -x \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) \,\mathrm{d}x$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \,\mathrm{d}x$$

$$= -x \cos x + \sin x + C$$

- Integruje druhou část: $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x$
- Hotovo.

Vypočtěte $\int (x^2 + 1) \sin x \, \mathrm{d}x$

Vypočtěte $\int (x^2+1)\sin x \,\mathrm{d}x$

$$\int (x^2+1)\sin x \,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = \\ v' = \sin x & v = \end{array}}$$

- Funkce je součinem polynomu a funkce sinus.
- Budeme integrovat per-partés při volbě $u = (x^2+1)$ a $v' = \sin x$.

Vypočtěte $\int (x^2+1)\sin x \,\mathrm{d}x$

$$\int (x^2+1)\sin x \,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}}$$

$$(x^2+1)' = 2x$$

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x$$

Vypočtěte $\int (x^2+1)\sin x \, \mathrm{d}x$

$$\int (x^2+1)\sin x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\int x\cos x \, \mathrm{d}x$$

$$\int uv' \, \mathrm{d}x = uv - \int u'v \, \mathrm{d}x$$

Konstantní násobek 2dáme před integrál.

Vypočtěte $\int (x^2+1)\sin x\,\mathrm{d}x$

$$\int (x^2+1)\sin x\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\int x\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = \\ v' = \cos x & v = \end{array}}$$

Ještě jednou integrujeme per-partés. Nyní $u = x$ a $v' = \cos x$.

Vypočtěte $\int (x^2+1)\sin x \,\mathrm{d}x$

$$\int (x^2+1)\sin x \,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\int x\cos x \,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}}$$

$$x' = 1$$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x$$

Vypočtěte $\int (x^2+1)\sin x \, dx$

$$\int (x^2+1)\sin x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\int x\cos x \, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x \, dx\right)$$

$$\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$$

Vypočtěte $\int (x^2+1)\sin x \,\mathrm{d}x$

$$\int (x^2+1)\sin x \,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{matrix} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{matrix}}$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\int x\cos x \,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{matrix}}$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x \,\mathrm{d}x\right)$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2(x\sin x - (-\cos x))$$

Integrujeme sinus.

Vypočtěte $\int (x^2+1)\sin x \, \mathrm{d}x$

$$\int (x^2+1)\sin x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\int x\cos x \, \mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x \, \mathrm{d}x\right)$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2(x\sin x - (-\cos x))$$

$$= (1-x^2)\cos x + 2x\sin x + C$$

Hotovo.

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, \mathrm{d}x$

$$\text{Vypočtěte } \int \ln^2 x \, \mathrm{d}x$$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln^2 x & u' = \\ v' = 1 & v = \end{array}}$$

- Je zde "zašifrován" součin polynomu a druhé mocniny logaritmu.
- Upravíme funkci $\ln^2 x$ na součin $(1) \cdot (\ln^2 x)$ a integrujeme per-partés při volbě $u = \ln^2 x$ a $v' = 1$

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, \mathrm{d}x$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln^2 x & u' = \dfrac{2 \ln x}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}}$$

$$(\ln^2 x)' = 2 \ln x (\ln x)' = 2 \ln x \frac{1}{x}$$

$$\int 1 \, \mathrm{d}x = x$$

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln^2 x & u' = \dfrac{2 \ln x}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\int u v' \, dx = uv - \int u' v \, dx$$

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, \mathrm{d}x$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln^2 x & u' = \dfrac{2 \ln x}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, \mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \\ v' = 1 & v = \end{array}}$$

Tento trik již známe: Napíšeme funkci $\ln x$ jako součin $(1) \cdot \ln x$ a integrujeme per-partés při volbě $u = \ln x$ a $v' = 1$.

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln^2 x & u' = \dfrac{2\ln x}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$\int 1 \, dx = x$$

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, \mathrm{d}x$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln^2 x & u' = \dfrac{2 \ln x}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, \mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}}$$

$$= x \ln^2 x - 2\left(x \ln x - \int 1 \, \mathrm{d}x\right)$$

$$\int u v' \, \mathrm{d}x = uv - \int u' v \, \mathrm{d}x$$

Vypočtěte $\int \ln^2 x \,\mathrm{d}x$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln^2 x & u' = \dfrac{2\ln x}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}} = x\ln^2 x - 2\int \ln x \,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}}$$

$$= x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - \int 1 \,\mathrm{d}x\right)$$

$$= x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - x\right)$$

Dopočítáme integrál z jedničky.

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln^2 x & u' = \dfrac{2 \ln x}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}}$$

$$= x \ln^2 x - 2\left(x \ln x - \int 1 \, dx\right)$$

$$= x \ln^2 x - 2\left(x \ln x - x\right)$$

$$= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x$$

Upravíme. Hotovo.

4 Integrace pomocí substituce.

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$

Vypočtěte $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

- Vnitřní složka je $\ln x$.
- Derivace funkce $\ln x$ je $\frac{1}{x}$.
- Tato derivace, $\frac{1}{x}$, je v součinu s integrovanou funkcí.

Vypočtěte $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int \sin(\ln x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

- Vnitřní složka je $\ln x$.
- Derivace funkce $\ln x$ je $\frac{1}{x}$.
- Tato derivace, $\frac{1}{x}$, je v součinu s integrovanou funkcí.

Vypočtěte $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int \sin(\ln x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\ln x = t}$$

Zavedeme substituci $\ln x = t$.

Vypočtěte $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int \sin(\ln x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \boxed{\begin{aligned} \ln x &= t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned}}$$

Nalezneme vztah mezi $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}t$.

Vypočtěte $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int \sin(\ln x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} \ln x &= t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned}} = \int \sin t\,\mathrm{d}t$$

Dosadíme substituci.

Vypočtěte $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int \sin(\ln x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} \ln x &= t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned}} = \int \sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= -\cos t$$

Integrujeme.

Vypočtěte $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int \sin(\ln x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} \ln x &= t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned}} = \int \sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= -\cos t = -\cos(\ln x) + C$$

Použijeme substituci k návratu k proměnné x a přidáme integrační konstantu. Hotovo.

Vypočtěte $\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$

Vypočtěte $\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Zkusíme substituovat za vnitřní složku složené funkce e^{1-x^2}.

Vypočtěte $\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$1-x^2=t$$

Hledáme vztah mezi diferenciály.

Vypočtěte $\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{aligned} 1-x^2 &= t \\ -2x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned}}$$

Derivujeme obě strany substituce.

Vypočtěte $\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{aligned} 1-x^2 &= t \\ -2x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

Vyjádříme odsud výraz $x\,\mathrm{d}x$, který figuruje uvnitř integrálu.

Vypočtěte $\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} 1-x^2 &= t \\ -2x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}} = -\frac{1}{2}\int e^t\,\mathrm{d}t$$

Dosadíme.

Vypočtěte $\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} 1-x^2&=t\\ -2x\,\mathrm{d}x&=\mathrm{d}t\\ x\,\mathrm{d}x&=-\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}} = -\frac{1}{2}\int e^t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}e^t$$

Vypočtěte integrál pomocí vzorce.

Vypočtěte $\int x e^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int x e^{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} 1-x^2&=t\\ -2x\,\mathrm{d}x&=\mathrm{d}t\\ x\,\mathrm{d}x&=-\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}} = -\frac{1}{2}\int e^t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}e^t$$

$$= -\frac{1}{2}e^{1-x^2} + C$$

Použijeme substituci pro návrat k původní proměnné.

Vypočtěte $\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} 1-x^2 &= t \\ -2x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}} = -\frac{1}{2}\int e^t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}e^t$$

$$= -\frac{1}{2}e^{1-x^2} + C$$

Hotovo.

Vypočtěte $\int \frac{x}{x^4+16}\,\mathrm{d}x$

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+16}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{x}{x^4+16}\,\mathrm{d}x \qquad \boxed{x^2 = t}$$

- Substituce $x^4+16=t$, nebo $x^4=t$, nejsou úplně šikovné, protože vztah mezi diferenciály při této substituci je

$$4x^3\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t,$$

avšak člen $x^3\,\mathrm{d}x$ nikde v integrálu není.

- Člen $x\,\mathrm{d}x$ napovídá, použít substituci $x^2=t$.

Vypočtěte $\int \frac{x}{x^4+16}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{x}{x^4+16}\,\mathrm{d}x$$

$$x^2 = t$$
$$2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$
$$x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$$

Hledáme vztah mezi diferenciály a vyjádříme z něj výraz $x\,\mathrm{d}x$.

Vypočtěte $\int \frac{x}{x^4+16}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{x}{x^4+16}\,\mathrm{d}x \qquad \boxed{\begin{aligned} x^2 &= t \\ 2x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \\ x^4 &= t^2 \end{aligned}}$$

Substituce $x^2 = t$ vede k relaci $x^4 = (x^2)^2 = t^2$.

Vypočtěte $\int \frac{x}{x^4+16}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{x}{x^4+16}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} x^2 &= t \\ 2x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \\ x^4 &= t^2 \end{aligned}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+16}\,\mathrm{d}t$$

Dosadíme.

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+16}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{x}{x^4+16}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} x^2 &= t \\ 2x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \\ x^4 &= t^2 \end{aligned}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+16}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{t}{4}$$

Užijeme vzorec

$$\int \frac{1}{x^2+A^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{x}{A}$$

při $A = 4$.

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+16}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{x}{x^4+16}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{gathered} x^2 = t \\ 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \\ x^4 = t^2 \end{gathered}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+16}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{t}{4} = \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{4} + C$$

Užijeme zpětnou substituci $t = x^2$. Hotovo.

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

Vypočtěte $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int e^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$$

Vnitřní složka je $\sqrt{x+1}$. Derivace této vnitřní složky je

$$(\sqrt{x+1})' = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

Výskyt této člene $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ uvnitř integrálu (a v součinu) napovídá, že provést tuto substituci bude snadné.

Vypočtěte $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int e^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$$

$\sqrt{x+1} = t$

Použijeme navrženou substituci.

Vypočtěte $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int e^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{gathered} \sqrt{x+1} = t \\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t \end{gathered}}$$

Najdeme vztah mezi diferenciály $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}t$. Dostáváme

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

a tuto relaci vynásobíme číslem 2.

Vypočtěte $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int e^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sqrt{x+1} &= t \\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x &= 2\,\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

$$= \int e^t 2\,\mathrm{d}t$$

Dosadíme.

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int e^{\sqrt{x+1}}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sqrt{x+1} &= t \\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x &= 2\,\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

$$= \int e^t 2\,\mathrm{d}t = 2e^t$$

Zintegrujeme.

Vypočtěte $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int e^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{gathered}\sqrt{x+1} = t\\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\\ \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t\end{gathered}}$$

$$= \int e^t 2\,\mathrm{d}t = 2e^t = 2e^{\sqrt{x+1}} + C$$

Užijeme substituci $t = \sqrt{x+1}$ k návratu k původní proměnné. Hotovo.

Vypočtěte $\int \operatorname{tg}^3 x \, \mathrm{d}x.$

Vypočtěte $\int \operatorname{tg}^3 x \, \mathrm{d}x$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, \mathrm{d}x$$

Rozepíšeme funkci $\operatorname{tg} x$ pomocí funkcí $\sin x$ a $\cos x$.

Vypočtěte $\int \operatorname{tg}^3 x \, \mathrm{d}x$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, \mathrm{d}x$$

Lichá mocnina je i v čitateli, i ve jmenovateli. Vybereme si tu v čitateli.

Vypočtěte $\int \operatorname{tg}^3 x \, \mathrm{d}x$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, \mathrm{d}x$$

“Vytáhneme” jednu mocninu funkce $\sin x$ z čitatele.

Vypočtěte $\int \operatorname{tg}^3 x \,\mathrm{d}x$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x \,\mathrm{d}x$$

Sudou mocninu převedeme na funkci $\cos x$. Užijeme identitu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Vypočtěte $\int \operatorname{tg}^3 x \,\mathrm{d}x$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\sin x \,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}\sin x \,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\cos x = t}$$

Dosadíme $\cos x = t$.

Vypočtěte $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x \,\mathrm{d}x.$

$$\int \operatorname{tg}^3 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\sin x \,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}\sin x \,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= t \\ -\sin x \,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned}}$$

Nalezneme vztah mezi diferenciály $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}t$.

Vypočtěte $\int \mathrm{tg}^3 x \, \mathrm{d}x$.

$$\int \mathrm{tg}^3 x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, \mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, \mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= t \\ -\sin x \, \mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ \sin x \, \mathrm{d}x &= -\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

Přepíšeme výraz $\sin x \, \mathrm{d}x$ do nových proměnných.

Vypočtěte $\int \operatorname{tg}^3 x \,\mathrm{d}x$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x \,\mathrm{d}x \qquad \boxed{\begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \sin x \,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t \end{array}} = \int -\frac{1-t^2}{t^3} \,\mathrm{d}t$$

Dosadíme.

Vypočtěte $\int \operatorname{tg}^3 x \, \mathrm{d}x$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, \mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \sin x \, \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t \end{array}} = \int -\frac{1 - t^2}{t^3} \, \mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{1}{t} - t^{-3} \, \mathrm{d}t$$

Obdržená racionální funkce je ryze lomená. Protože je jmenovatel jednočlenný, nemusíme rozkládat na parciální zlomky, ale stačí vydělit čitatele výrazem t^3.

Vypočtěte $\int \operatorname{tg}^3 x \,\mathrm{d}x$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x \,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \sin x \,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t \end{array}} = \int -\frac{1 - t^2}{t^3} \,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{1}{t} - t^{-3} \,\mathrm{d}t = \ln|t| + \frac{1}{2} t^{-2}$$

Nyní integrujeme pomocí vzorců.

Vypočtěte $\int \operatorname{tg}^3 x \,\mathrm{d}x$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x \,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \sin x \,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t \end{array}} = \int -\frac{1-t^2}{t^3}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{1}{t} - t^{-3}\,\mathrm{d}t = \ln|t| + \frac{1}{2}t^{-2} = \ln|\cos x| + \frac{1}{2\cos^2 x} + C$$

Po integraci provedeme návrat k původní proměnné a přidáme integrační konstantu.

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x.$

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x$$

Lichá mocnina je ve jmenovateli.

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{(2+\cos x)\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

Vynásobíme a současně vydělíme výrazem $\sin x$. Tím se funkce nezmění a lichá mocnina je v čitateli.

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{(2+\cos x)\sin^2 x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}\sin x\,\mathrm{d}x$$

Převedeme druhou mocninu funkce $\sin x$ na $\cos x$. Použijeme vzorec $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{(2+\cos x)\sin^2 x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\cos x = t}$$

Budeme používat substituci $\cos x = t$.

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{(2+\cos x)\sin^2 x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\cos x = t\\ \sin x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t\end{array}}$$

Najdeme vztah mezi diferenciály.

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{(2+\cos x)\sin^2 x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}\sin x\,\mathrm{d}x \qquad \boxed{\begin{array}{c}\cos x = t\\ \sin x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t\end{array}}$$

$$= -\int \frac{1}{(2+t)(1-t^2)}\,\mathrm{d}t$$

Dosadíme ze substituce.

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{(2+\cos x)\sin^2 x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}\sin x\,\mathrm{d}x \qquad \boxed{\begin{array}{c}\cos x = t\\ \sin x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t\end{array}}$$

$$= -\int \frac{1}{(2+t)(1-t^2)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{(2+t)(1+t)(t-1)}\,\mathrm{d}t$$

Rozložíme jmenovatel na součin.

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{(2+\cos x)\sin^2 x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}\sin x\,\mathrm{d}x \qquad \boxed{\begin{array}{c}\cos x = t\\ \sin x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t\end{array}}$$

$$= -\int \frac{1}{(2+t)(1-t^2)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{(2+t)(1+t)(t-1)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int -\frac{1}{2}\frac{1}{1+t} + \frac{1}{6}\frac{1}{t-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{2+t}\,\mathrm{d}t$$

Rozložíme na parciální zlomky (tato pasáž je zde přeskočena, vyžaduje další a delší počítání).

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{(2+\cos x)\sin^2 x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}\sin x\,\mathrm{d}x \qquad \boxed{\begin{array}{c}\cos x = t\\ \sin x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t\end{array}}$$

$$= -\int \frac{1}{(2+t)(1-t^2)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{(2+t)(1+t)(t-1)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int -\frac{1}{2}\frac{1}{1+t} + \frac{1}{6}\frac{1}{t-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{2+t}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1+t| + \frac{1}{6}\ln|t-1| + \frac{1}{3}\ln|2+t|$$

Užijeme vzorce k integraci.

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{(2+\cos x)\sin^2 x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}\sin x\,\mathrm{d}x \qquad \boxed{\begin{gathered}\cos x = t\\ \sin x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t\end{gathered}}$$

$$= -\int \frac{1}{(2+t)(1-t^2)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{(2+t)(1+t)(t-1)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int -\frac{1}{2}\frac{1}{1+t} + \frac{1}{6}\frac{1}{t-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{2+t}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1+t| + \frac{1}{6}\ln|t-1| + \frac{1}{3}\ln|2+t|$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1+\cos x) + \frac{1}{6}\ln(1-\cos x) + \frac{1}{3}\ln(2+\cos x) + C$$

Pomocí substitučního vztahu se vrátíme k původní proměnné.

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x.$

Vypočtěte $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

Člen $3x+2$ je pod odmocninou. Užijeme substituci, která umožní tuto odmocninu odstranit.

Vypočtěte $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$3x+2=t^2$$

Budeme dosazovat $3x+2=t^2$.

Vypočtěte $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$3x+2=t^2$$
$$3\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$$

Nalezneme vztah mezi $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}t$.

Vypočtěte $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$3x+2=t^2$$
$$3\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{d}x=\frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t$$

Vyjádříme $\mathrm{d}x$.

Vypočtěte $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$3x+2=t^2$$
$$3\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{d}x=\frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t$$
$$x=\frac{1}{3}(t^2-2)$$

Vyjádříme proměnnou x.

Vypočtěte $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{gathered} 3x+2=t^2 \\ 3\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x=\frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t \\ x=\frac{1}{3}(t^2-2) \\ t=\sqrt{3x+2} \end{gathered}}$$

Přichystáme si zpětnou substituci. Vyjádříme t pomocí x.

Vypočtěte $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x \qquad \boxed{\begin{aligned} 3x+2 &= t^2 \\ 3\,\mathrm{d}x &= 2t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x &= \frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t \\ x &= \frac{1}{3}(t^2-2) \\ t &= \sqrt{3x+2} \end{aligned}} = \int \frac{t-1}{\frac{1}{3}(t^2-2)+1}\,\frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t$$

Provedeme substituci.

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{gathered} 3x+2=t^2 \\ 3\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t \\ x=\frac{1}{3}(t^2-2) \\ t=\sqrt{3x+2} \end{gathered}} = \int \frac{t-1}{\frac{1}{3}(t^2-2)+1}\,\frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \frac{t-1}{t^2+1}t\,\mathrm{d}t$$

Upravíme.

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{gathered} 3x+2=t^2 \\ 3\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t \\ x = \frac{1}{3}(t^2-2) \\ t=\sqrt{3x+2} \end{gathered}} = \int \frac{t-1}{\frac{1}{3}(t^2-2)+1}\,\frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \frac{t-1}{t^2+1}t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2-t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Převedeme na jeden zlomek.

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} 3x+2 &= t^2 \\ 3\,\mathrm{d}x &= 2t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x &= \frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t \\ x &= \frac{1}{3}(t^2-2) \\ t &= \sqrt{3x+2} \end{aligned}} = \int \frac{t-1}{\frac{1}{3}(t^2-2)+1}\,\frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \frac{t-1}{t^2+1}t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2-t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int 1 + \frac{-t-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Vydělíme, protože funkce není ryze lomená.

$$\frac{t^2-t}{t^2+1} = \frac{(t^2+1)+(-t-1)}{t^2+1} = 1 + \frac{-t-1}{t^2+1}$$

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{gathered} 3x+2=t^2 \\ 3\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t \\ x = \frac{1}{3}(t^2-2) \\ t = \sqrt{3x+2} \end{gathered}} = \int \frac{t-1}{\frac{1}{3}(t^2-2)+1}\,\frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \frac{t-1}{t^2+1}t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2-t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int 1+\frac{-t-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int 1-\frac{t}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Získaná funkce je přímo parciální zlomek. Tento typ zlomku integrujeme rozdělíme na součet zlomku, který má v čitateli derivaci jmenovatele, a zlomku, který má v čitateli jen konstantu. Oba zlomky pak snadno zintegrujeme.

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} 3x+2&=t^2\\ 3\,\mathrm{d}x&=2t\,\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}x&=\frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t\\ x&=\frac{1}{3}(t^2-2)\\ t&=\sqrt{3x+2}\end{aligned}} = \int \frac{t-1}{\frac{1}{3}(t^2-2)+1}\,\frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \frac{t-1}{t^2+1}t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2-t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int 1+\frac{-t-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int 1-\frac{t}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\left(t-\frac{1}{2}\ln|t^2+1|-\operatorname{arctg} t\right)+C$$

Integrace je již snadná. Užijeme vztah

$$\int \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(t^2+1).$$

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} 3x+2&=t^2\\ 3\,\mathrm{d}x&=2t\,\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}x&=\frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t\\ x&=\frac{1}{3}(t^2-2)\\ t&=\sqrt{3x+2}\end{aligned}} = \int \frac{t-1}{\frac{1}{3}(t^2-2)+1}\,\frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \frac{t-1}{t^2+1}t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2-t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int 1+\frac{-t-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int 1-\frac{t}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\Big(t-\frac{1}{2}\ln|t^2+1|-\operatorname{arctg} t\Big)+C$$

$$= 2\sqrt{3x+2}-\ln|3x+3|-2\operatorname{arctg}\sqrt{3x+2}+C$$

Roznásobíme závorku a provedeme zpětnou substituci pro návrat k proměnné x.

5 Další . . .

Vypočtěte $\int \arcsin x \, \mathrm{d}x$

$$\int \arcsin x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \arcsin x & u' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v' = 1 & v = x \end{array}}$$

$$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{c} 1 - x^2 = t \\ -2x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x \, \mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2} \, \mathrm{d}t \end{array}}$$

$$= x \arcsin x - \int \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{t}$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

6 To je vše, děkuji za pozornost.