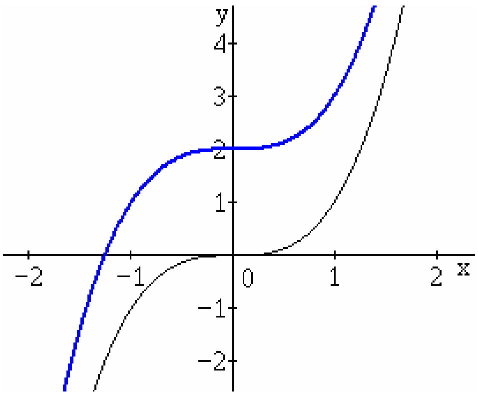
Grafy elementárních funkcí v posunutém tvaru

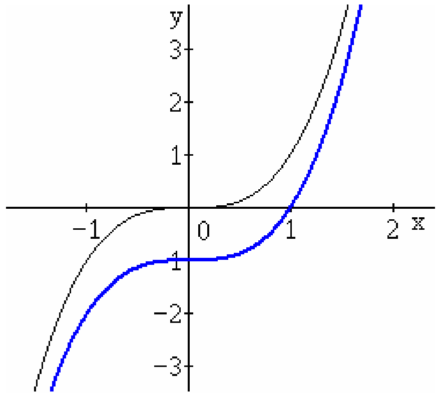
Vysvětlíme si, jak se změní graf funkce, jestliže se částečně změní funkční předpis základní elementární funkce. Všechny změny původního grafu budou demonstrovány na mocninné funkci $y = x^3$, ale popsaná pravidla platí i pro všechny ostatní funkce.

Přičtení (odečtení) čísla k hodnotě funkce.

Nechť je dáno reálné číslo c a funkce $y = f(x)$. Graf funkce $y = f(x) + c$ je množina bodů $[x, f(x) + c]$, kde $[x, f(x)]$ jsou body grafu funkce $f(x)$. Graf funkce $y = f(x) + c$ (případně $y = f(x) - c$) tedy dostaneme posunutím grafu zadané funkce $f(x)$ o c jednotek nahoru (dolů).



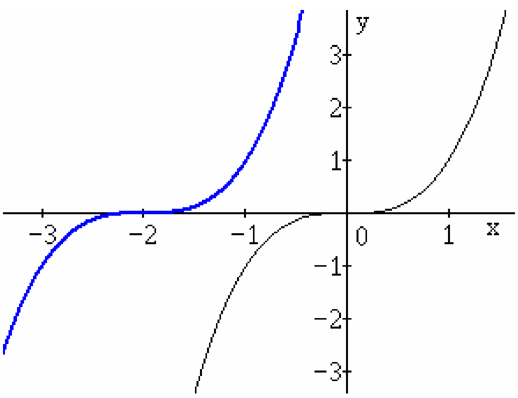
$y = x^3 + 2$



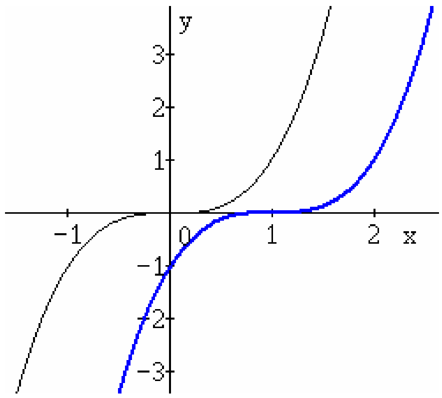
$y = x^3 - 1$

Přičtení (odečtení) čísla k argumentu funkce.

Nechť je dáno reálné číslo c a funkce $y = f(x)$. Graf funkce $y = f(x + c)$ je množina bodů $[x - c, f(x)]$, kde $[x, f(x)]$ jsou body grafu funkce $f(x)$. Graf funkce $y = f(x + c)$ (případně $y = f(x - c)$) tedy dostaneme posunutím grafu zadané funkce $f(x)$ o c jednotek doleva (doprava).



$y = (x + 2)^3$

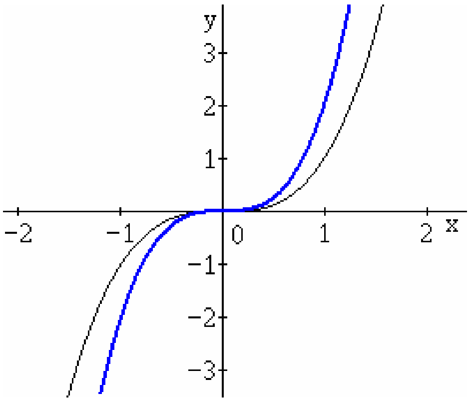


$y = (x - 1)^3$

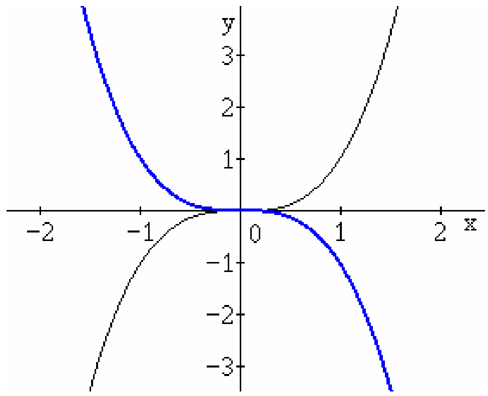
Vynásobení hodnoty funkce číslem.

Nechť je dáno reálné číslo c a funkce $y = f(x)$. Graf funkce $y = c \cdot f(x)$ je množina bodů $[x, c.f(x)]$, kde $[x, f(x)]$ jsou body grafu funkce $f(x)$.

Druhá souřadnice bodů grafu funkce $c \cdot f(x)$ je tedy c-krát větší (je-li $c > 1$) nebo c-krát menší (je-li $c < 1$) než druhá souřadnice původního grafu. Graf funkce $y = -f(x)$ je souměrný s grafem funkce $y = f(x)$ podle osy x.



$y = 2x^3$

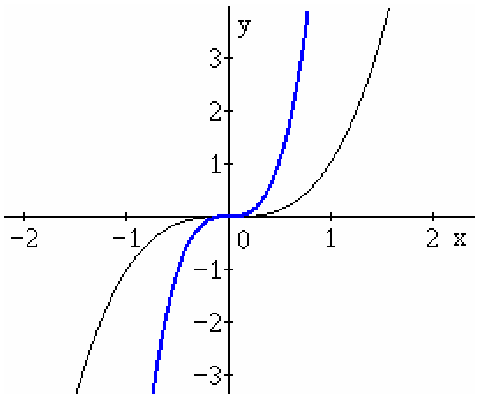


$y = -x^3$

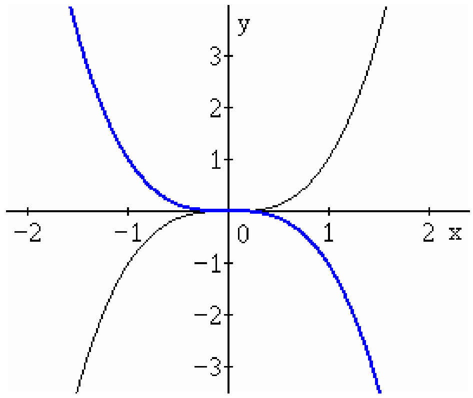
Vynásobení argumentu funkce číslem.

Nechť je dáno reálné číslo c a funkce $y = f(x)$. Graf funkce $y = f(c.x)$ je množina bodů $\left[\dfrac{x}{c}, f(x)\right]$, kde $[x, f(x)]$ jsou body grafu funkce $f(x)$.

Graf funkce $y = f(-x)$ je souměrný s grafem funkce $y = f(x)$ podle osy y.



$y = (2x)^3$



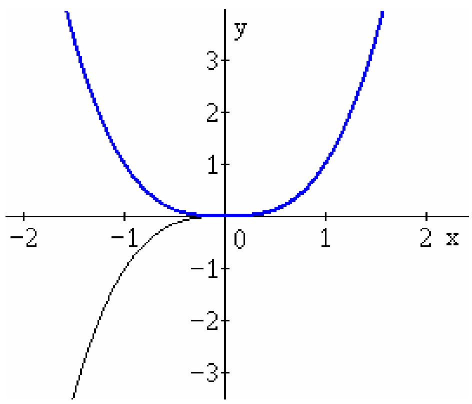
$y = (-x)^3$

Absolutní hodnota funkce.

Připomeňme, že absolutní hodnotou čísla $x \in \mathbf{R}$ rozumíme nezáporné číslo, které značíme $|x|$, a které definujeme vztahy :

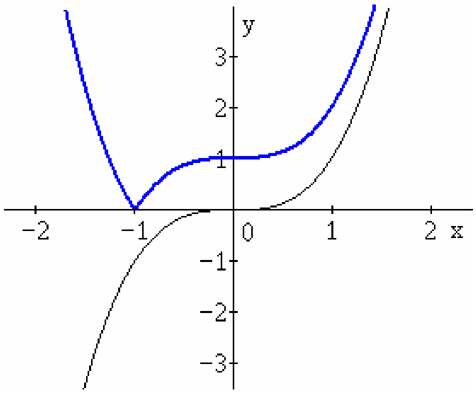
$$|x| = x \text{ pro } x \geq 0, \quad |x| = -x \text{ pro } x < 0.$$

Graf funkce $y = |f(x)|$ je množina bodů $[x, |f(x)|]$, kde $[x, f(x)]$ jsou body grafu funkce $f(x)$. Pro ta x, pro která je $f(x) \geq 0$, jsou grafy funkcí $f(x)$ a $|f(x)|$ shodné. Pro ta x, pro která je $f(x) < 0$, jsou grafy funkcí $f(x)$ a $|f(x)|$ souměrné podle osy x.

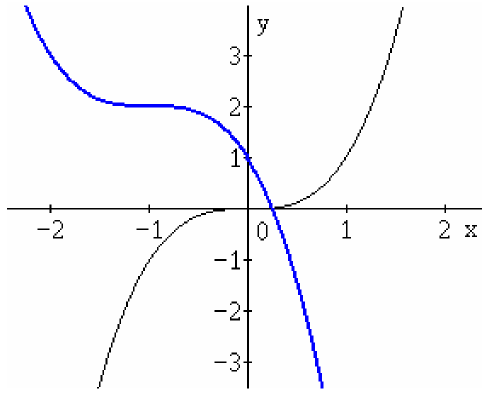


$y = |x^3|$

Při kombinaci více modifikací původního grafu musíme na tento graf postupně aplikovat všechna odpovídající pravidla.



$y = \left|(-x)^3 - 1\right|$



$y = 2-(x+1)^3$

Příklad 1.

Načrtněte graf funkce a určete její průsečíky s osami souřadnic :

a) $f : y = \dfrac{1}{x-1} + 3$, b) $g : y = 2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}$, c) $h : y = 1 + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, d) $k : y = 2 - \sqrt{x+1}$,

e) $l : y = \log_{0,5}(x+1) - 2$.

Řešení : a) Graf funkce *f* vznikne posunutím grafu funkce $y = \dfrac{1}{x}$ o 1 jednotku doprava po ose *x* a o 3 jednotky nahoru po ose *y*.

Definiční obor funkce $f : y = \dfrac{1}{x-1} + 3$ je množina $D(f) = \mathbf{R} / \{1\}$.

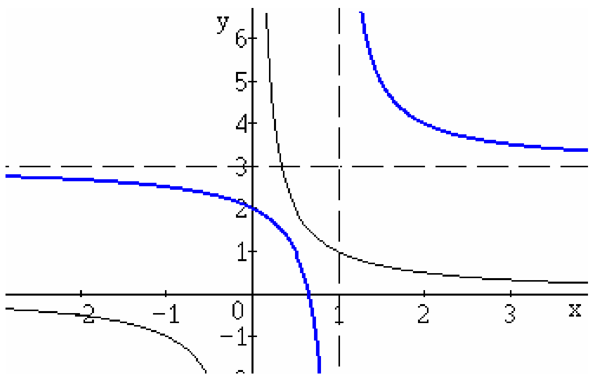
Nejprve vypočítáme průsečíky s osami souřadnic. Průsečík s osou *x* je bod o souřadnicích $[x, 0]$. Určíme ho dosazením nuly za *y* do rovnice funkce :

$0 = \dfrac{1}{x-1} + 3 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{2}{3}$. Tedy průsečík s osou *x* je bod $P_x = \left[\dfrac{2}{3}, 0\right]$.

Průsečík s osou *y* je bod o souřadnicích $[0, y]$. Určíme ho dosazením nuly za *x* do rovnice funkce :

$y = \dfrac{1}{0-1} + 3 \;\Rightarrow\; y = 2$. Tedy průsečík s osou *y* je bod $P_y = [0, 2]$.

Graf funkce *f* :



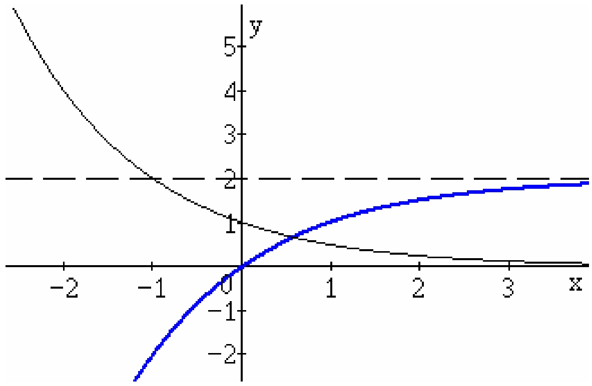
b) Graf funkce *g* vznikne posunutím grafu funkce $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ o 1 jednotku doprava po ose *x*, otočením kolem osy *x* a posunutím o 2 jednotky nahoru po ose *y*.

Definiční obor funkce $g: y = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ je množina $D(g) = \mathbf{R}$.

Průsečík s osou x : $0 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \Rightarrow 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \Rightarrow x = 0$.

Tedy průsečík s osou x je bod $P_x = [0, 0]$. Je zřejmé, že tento bod je zároveň průsečík s osou y (vzhledem k monotónnosti funkce je to jediný průsečík).

Graf funkce g :

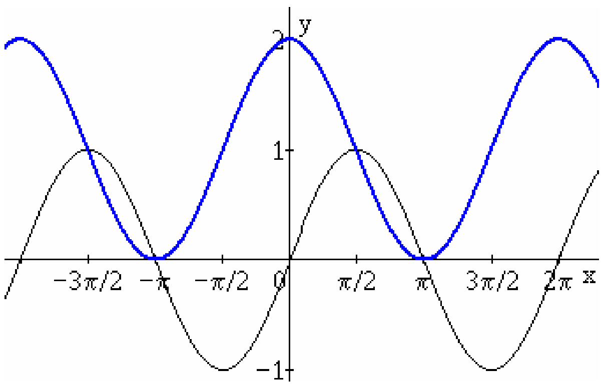


Poznámka : Pro přesnější kreslení grafů využíváme tzv. asymptoty. Jsou to přímky, ke kterým se graf funkce přibližuje. Například v poslední řešené úloze je to přímka $y = 2$. Asymptotami se budeme podrobněji zabývat ve 4. kapitole.

c) Graf funkce h vznikne posunutím grafu funkce $y = \sin x$ o $\frac{\pi}{2}$ doleva po ose x a o 1 jednotku nahoru po ose y. Definiční obor funkce h je množina $D(h) = \mathbf{R}$. Průsečík s osou x :

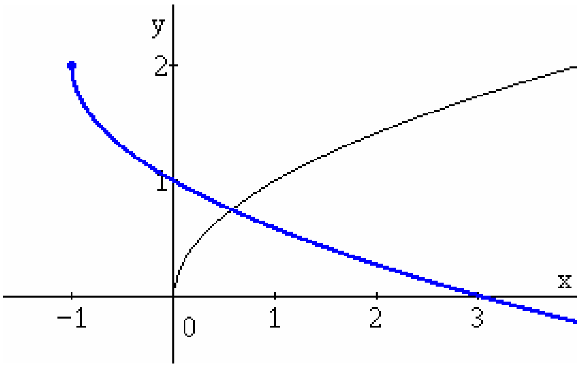
$0 = 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = (2k+1)\cdot \pi,\ k \in \mathbf{Z}$. Tedy společných bodů s osou x je nekonečně mnoho a zapíšeme je ve tvaru $[(2k+1)\pi,\ 0],\ k \in \mathbf{Z}$. Průsečík s osou y : $y = 1 + \sin\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = 2$. Tedy průsečík s osou y je bod $P_y = [0, 2]$.

Graf funkce h :



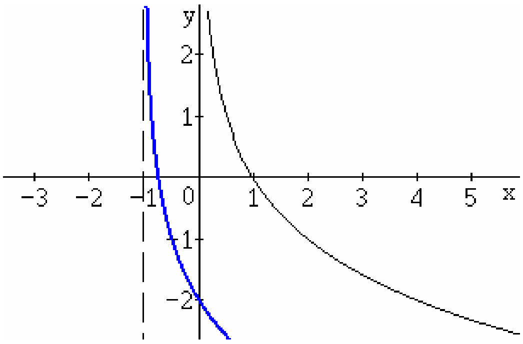
d) Graf funkce k vznikne posunutím grafu funkce $y = \sqrt{x}$ o 1 jednotku doleva po ose x, otočením kolem osy x a posunutím o 2 jednotky nahoru po ose y. Definiční obor funkce $k: y = 2 - \sqrt{x+1}$ je množina $D(k) = \langle -1, \infty)$. Průsečík s osou x : $0 = 2 - \sqrt{x+1} \Rightarrow x = 3$. Tedy průsečík s osou x je bod $P_x = [3, 0]$. Průsečík s osou y : $y = 2 - \sqrt{0+1} \Rightarrow y = 1$. Tedy průsečík s osou y je bod $P_y = [0, 1]$.

Graf funkce k :



e) Graf funkce l vznikne posunutím funkce $y = \log_{0,5} x$ o 1 jednotku doleva po ose x a o 2 jednotky dolů po ose y. Definiční obor funkce l je množina $D(l) = (-1, \infty)$. Průsečík s osou x : $0 = \log_{0,5}(x+1) - 2 \;\Rightarrow\; x = -\frac{3}{4}$. Tedy průsečík s osou x je bod $P_x = \left[-\frac{3}{4}, 0\right]$. Průsečík s osou y dostaneme řešením rovnice : $y = \log_{0,5}(0+1) - 2 \Rightarrow y = -2$ .Tedy průsečík s osou y $P_y = [0, -2]$.

Graf funkce l :

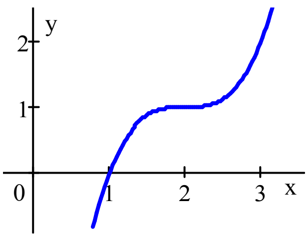


Úlohy

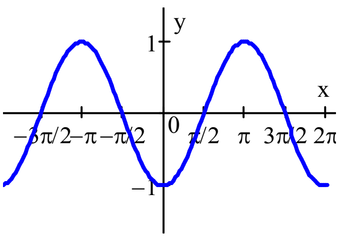
Sestrojte grafy funkcí : a) $y = (x-2)^3 + 1$, b) $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$, c) $y = 1 - \sqrt{x+1}$.

Výsledky úloh

a)



b)



c)