DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

1) Pojem funkce, graf funkce

Def.: Funkcí reálné proměnné *x* nazýváme pravidlo, které každému reálnému číslu $x \in D$ přiřazuje právě jedno reálné číslo $y \in H$. Toto pravidlo značíme nejčastěji písmenem *f* a píšeme pak $y = f(x)$.

x - nezávisle proměnná, argument funkce,
y - závisle proměnná, funkční hodnota,
D(*f*) - definiční obor (není-li uvedeno jinak, je to množina čísel, pro která má daná funkce smysl),
H(*f*) - obor funkčních hodnot.

Podmínky, které je třeba brát v úvahu při určování definičních oborů funkce :

- Funkce tvaru $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ je definovaná pro $g(x) \neq 0$,
- Funkce tvaru $y = \sqrt{f(x)}$ je definovaná pro $f(x) \geq 0$,
- Funkce tvaru $y = \log_a f(x)$ je definovaná pro $f(x) > 0$,
- Funkce tvaru $y = \mathrm{tg}(f(x))$ je definovaná pro $f(x) \neq (2k+1) \cdot \dfrac{\pi}{2}$,
- Funkce tvaru $y = \mathrm{cotg}(f(x))$ je definovaná pro $f(x) \neq k\pi$.

Def.: Graf funkce $y = f(x)$ s definičním oborem *D*(*f*) je množina všech bodů v rovině o souřadnicích $[x, f(x)]$, kde $x \in D(f)$.

Způsoby zadání funkce :

- Explicitní rovnicí $y = f(x)$
- Implicitní rovnicí $F(x, y) = 0$
- Tabulkou
- Graficky

2) Vlastnosti funkce

Sudost a lichost funkce

Def.: Funkce $y = f(x)$ s definičním oborem $D(f) = (-a, a)$, kde $a > 0$, se nazývá :

a) **sudá**, když pro každé $x \in D(f)$ platí $f(-x) = f(x)$,

b) **lichá**, když pro každé $x \in D(f)$ platí $f(-x) = -f(x)$.

Graf sudé funkce je souměrný podle osy *y*, graf liché funkce je souměrný podle počátku.

Periodičnost funkce

Def.: Funkci $y = f(x)$ nazýváme **periodickou** s periodou p, jestliže pro každé číslo $x \in D(f)$ platí vztah $f(x + p) = f(x)$.

Monotónnost funkce

Def.: O funkci $y = f(x)$ s definičním oborem $D(f)$ říkáme, že je na tomto oboru

a) **rostoucí**, jestliže pro libovolná čísla $x_1 < x_2 \in D(f)$ platí $f(x_1) < f(x_2)$,

b) **klesající**, jestliže pro libovolná čísla $x_1 < x_2 \in D(f)$ platí $f(x_1) > f(x_2)$,

c) neklesající, jestliže pro libovolná čísla $x_1 < x_2 \in D(f)$ platí $f(x_1) \le f(x_2)$,

d) nerostoucí, jestliže pro libovolná čísla $x_1 < x_2 \in D(f)$ platí $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Má-li funkce pouze jednu z vlastností a) nebo b), nazývá se **ryze monotónní**.

Prostá funkce

Definice : Funkce $y = f(x)$ s definičním oborem $D(f)$ je prostá, když pro libovolná čísla $x_1, x_2 \in D(f)$, pro která je $x_1 \ne x_2$, platí $f(x_1) \ne f(x_2)$.

Vztah mezi prostou a monotónní funkcí.

Prostá funkce nabývá každé své funkční hodnoty právě jednou.
Každá ryze monotónní funkce je prostá, protože pro dvě libovolná čísla, pro která $x_1 < x_2$, kde $x_1, x_2 \in D(f)$ platí $f(x_1) < f(x_2)$ nebo $f(x_1) > f(x_2)$, tedy $f(x_1) \ne f(x_2)$.
Opačné tvrzení ale neplatí, protože prostá funkce nemusí být ryze monotónní.

Ohraničená funkce

Definice 1.9.: O funkci $y = f(x)$ s definičním oborem $D(f)$ říkáme, že je na tomto oboru

- ohraničená shora (zdola), jestliže existuje takové číslo *H* (*D*), že pro všechna čísla $x \in D(f)$ platí $f(x) \le H$ ($f(x) \ge D$),
- ohraničená, je-li ohraničená shora i zdola. V opačném případě se funkce nazývá neohraničená.

3) Základní elementární funkce

- **Konstantní funkce**

$y = c$, kde c je konstanta

- **Obecná mocnina**

$y = x^n$, kde $x \in (0,\infty)$, $n \in R$

Definiční obor a vlastnosti funkce obecná mocniny závisí na hodnotě exponentu *n*.

(pro *n* liché definujeme $\sqrt[n]{-x} := -\sqrt[n]{x}$, tedy např. $\sqrt[3]{-8} := -\sqrt[3]{8} = -2$)

- **Goniometrické funkce**

$y = \sin x$ $\quad$ $y = \cos x$ $\quad$ $y = \mathrm{tg} x$ $\quad$ $y = \mathrm{cotg}\, x$

- **Exponenciální funkce**

Funkce $y = a^x$, kde $a > 0$, $a \neq 1$ je reálné číslo, se nazývá obecná exponenciální funkce.

Pokud $a = e \cong 2{,}71$, mluvíme o přirozené exponenciální funkci $y = e^x$.

Pro $a > 1$ je graf exponenciální funkce rostoucí, pro $a \in (0,1)$ klesající.

- **Logaritmická funkce**

Obecná logaritmická funkce $y = \log_a x$ o základu *a* (kde $a > 0$, $a \neq 1$ je reálné číslo) přiřazuje každému kladnému číslu *x* takovou hodnotu *y*, pro kterou platí $x = a^y$.

Pokud $a = e \cong 2{,}71$, mluvíme o přirozené logaritmické funkci a značíme ji $y = \ln x$.

Pro $a > 1$ je graf logaritmické funkce rostoucí, pro $a \in (0,1)$ klesající.

- **Cyklometrické funkce**

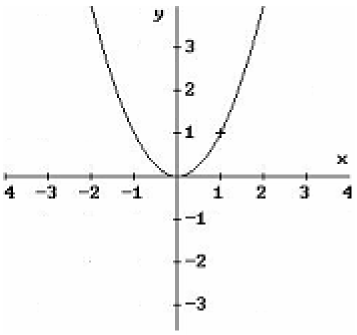
Jsou to funkce inverzní k funkcím goniometrickým.

$y = \arcsin x$ $\quad$ $y = \arccos x$ $\quad$ $y = \mathrm{arctg}\, x$ $\quad$ $y = \mathrm{arccotg}\, x$

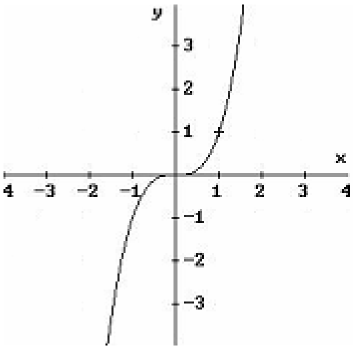
Grafy elementárních funkcí

Obecná mocnina

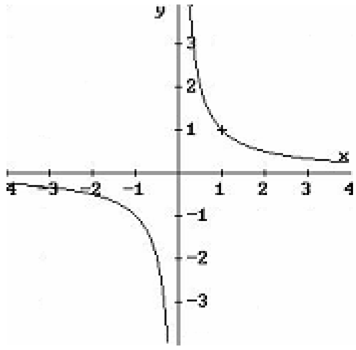
$y = x^2$



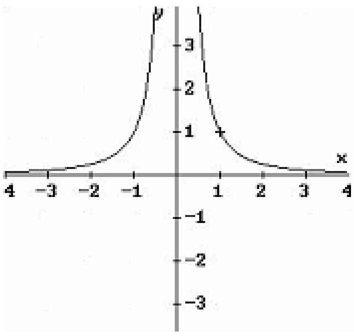
$y = x^3$



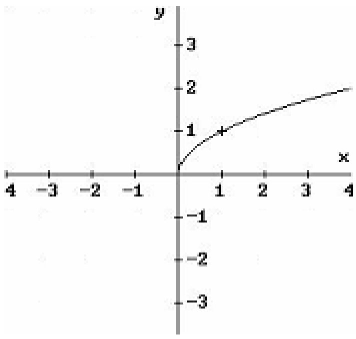
$y = \frac{1}{x}$



$y = \frac{1}{x^2}$

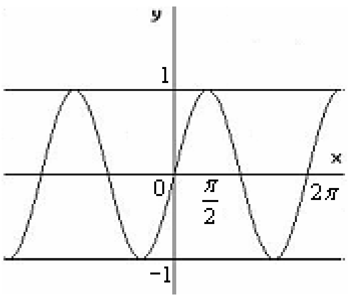


$y = \sqrt{x}$

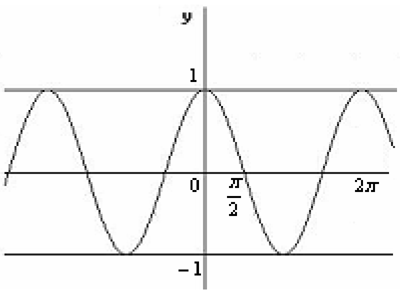


Goniometrické funkce

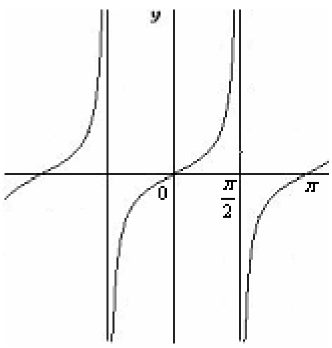
$y = \sin x$



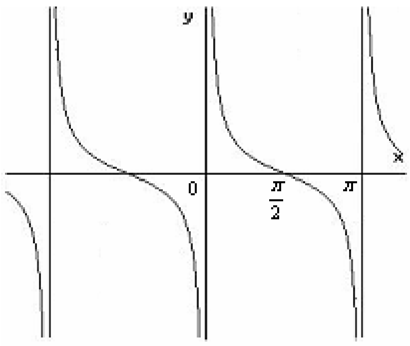
$y = \cos x$



$y = \mathrm{tg}\, x$

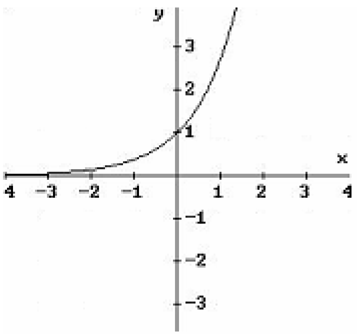


$y = \mathrm{cotg}\, x$



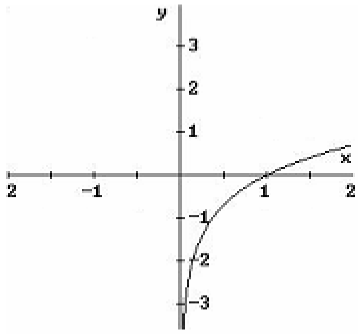
Přirozená exponenciální funkce

$$y = e^x$$



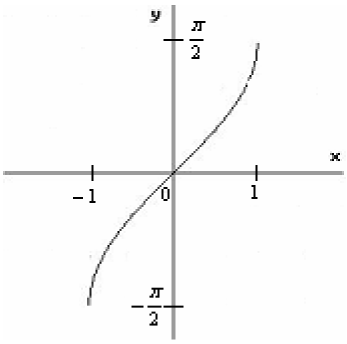
Přirozená logaritmická funkce

$$y = \ln x$$

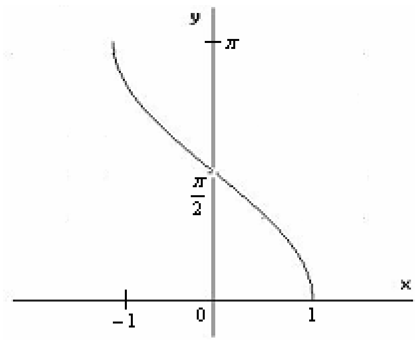


Cyklometrické funkce

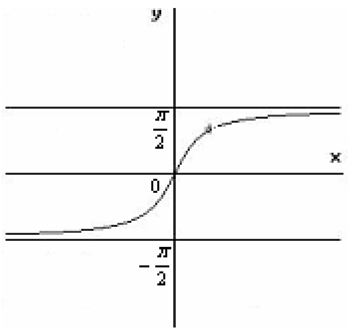
$$y = \arcsin x$$



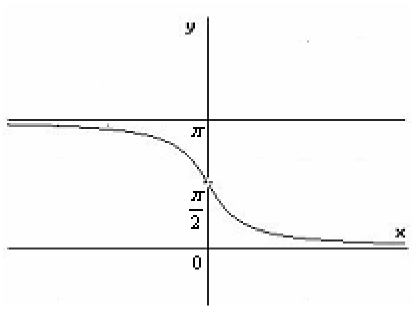
$$y = \arccos x$$



$$y = \operatorname{arctg} x$$



$$y = \operatorname{arccotg} x$$



4) Složená a inverzní funkce

Def.: Nechť je dána funkce $u = \varphi(x)$ s definičním oborem $D(\varphi)$ a oborem funkčních hodnot $H(\varphi)$ a funkce $y = f(u)$, která je definovaná na množině $D(f) \supseteq H(\varphi)$.
Ke každému $x \in D(\varphi)$ nyní přiřaďme hodnotu $y = F(x) = f(\varphi(x))$. Tato funkce se nazývá **složená funkce**, přičemž *f* je její vnější složka a φ vnitřní složka.

Def.: Nechť $y = f(x)$ je prostá funkce s definičním oborem $D(f)$. Funkce, která každému číslu $y \in H(f)$ přiřazuje takové číslo $x \in D(f)$, pro které platí $y = f(x)$, se nazývá inverzní funkce k funkci $f(x)$. Značíme ji f^{-1}, tedy $x = f^{-1}(y)$.

Provedeme-li záměnu proměnných, lze psát inverzní funkce ve tvaru $y = f^{-1}(x)$ tak, aby nezávisle proměnná byla označena písmenem *x*.
Obory funkcí f a f^{-1} jsou vzájemně zaměněné, tedy $D(f) = H(f^{-1})$ a $H(f) = D(f^{-1})$.
Grafy funkcí f a f^{-1} jsou souměrné podle přímky $y = x$.

5) Polynomy

Def.: Polynomem stupně *n* nazýváme funkci $y = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, kde $a_0, a_1, a_2, ... a_n \in R$ jsou koeficienty polynomu a $n \geq 0$ je celé číslo.

Def.: Číslo *c* se nazývá **kořen polynomu** *P*(*x*), jestliže $P(c) = 0$. Výraz $(x - c)$ pak nazýváme **kořenový činitel**.

Vlastnosti polynomů

- Polynom stupně *n* má právě *n* kořenů (mohou být reálné nebo komplexní).
- Je-li číslo *c* kořenem polynomu $P_n(x)$, můžeme tento polynom napsat ve tvaru $P_n(x) = (x - c).Q_{n-1}(x)$, kde $Q_{n-1}(x)$ je vhodný polynom stupně $(n-1)$.
- Má-li polynom $P_n(x)$ kořeny $x_1, x_2, ..., x_n$, lze jej rozložit na součin kořenových činitelů $P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$.

Jsou-li v rozkladu polynomu některé kořeny stejné, mluvíme o vícenásobných kořenech. Vyskytuje-li se kořen v rozkladu pouze jednou, jde o jednoduchý kořen.
Při rozkladu polynomu na kořenové činitele v reálném oboru (nepočítáme s komplexními kořeny) se v součinu vyskytují tyto typy činitelů :

$(x - x_i)$ - jde-li o jednoduchý kořen x_i,

$(x - x_j)^k$ - jde-li o *k*-násobný kořen x_j,

$(ax^2 + bx + c)$ - jde o polynom 2.stupně, který má komplexní kořeny ($D = b^2 - 4ac < 0$).

Hornerovo schéma

Jde o algoritmus, pomocí kterého je možné počítat hodnotu polynomu v daném bodě, a který se používá při rozkladu polynomu na součin kořenových činitelů.
Je-li zadaný polynom $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ a x_0, má Hornerovo schéma

tvar tabulky

	a_0	a_1	...	a_n
x_0	$b_0 = a_0$	b_1	...	$b_n = P_n(x_0)$

,

kde na prvním řádku jsou koeficienty polynomu a čísla na druhém řádku se počítají pomocí rovnic $b_i = a_i + x_0b_{i-1}$. Funkční hodnota $P_n(x_0)$ je pak rovna číslu b_n.

6) Racionální lomená funkce

Racionální lomenou funkcí nazýváme funkci $y = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, kde $P_m(x)$ a $Q_n(x)$ jsou polynomy.

Je-li stupeň polynomu $P(x) \geq$ stupeň polynomu $Q(x)$, jde o neryze lomenou funkci.
Je-li stupeň polynomu $P(x) <$ stupeň polynomu $Q(x)$, jde o ryze lomenou funkci.

Neryze lomenou racionální funkci je možné dělením vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

7) Limita funkce

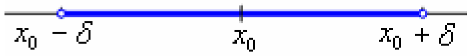
Okolí bodu

Jsou daná reálná čísla $x_0, \delta > 0$.

Interval $\langle x_0, x_0 + \delta)$ nazveme **pravým** δ **okolím** bodu x_0:

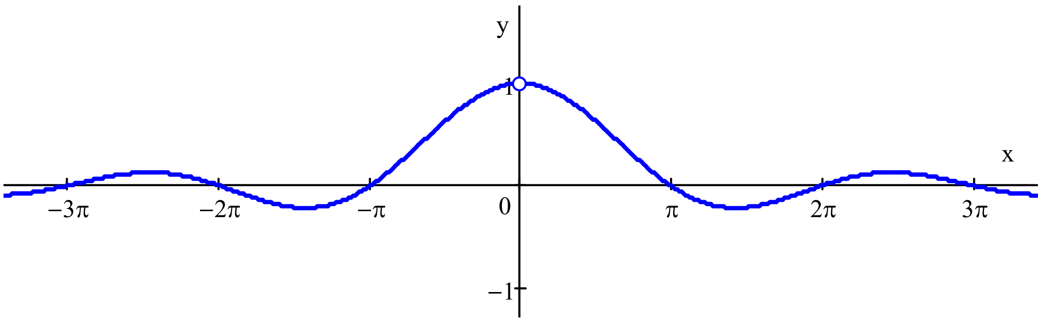
Interval $(x_0 - \delta, x_0\rangle$ nazveme **levým** δ **okolím** bodu x_0:

Interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nazveme δ **okolím** bodu x_0:



Vynecháme-li z δ okolí bodu x_0 samotný bod x_0, dostaneme **ryzí** δ **okolí** bodu x_0:

Př.: Budeme sledovat chování funkce $y = \dfrac{\sin x}{x}$ v okolí bodu $x = 0$.



V tomto bodě není daná funkce definovaná, ale dosazujeme-li za *x* čísla, která se blíží číslu 0, blíží se funkční hodnoty číslu 1. Tuto hodnotu nazýváme limitou funkce $y = \dfrac{\sin x}{x}$ pro *x* blížící se 0.

Def.: Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu A, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechna *x*, která patří do ryzího δ okolí bodu x_0 platí $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Jestliže v definici limity nahradíme pojem ryzí δ okolí pojmem levé (pravé) ryzího δ okolí, dostaneme definici **limity zleva (zprava)**.

Píšeme $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ $(\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A)$.

Věta : 1) Funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu.

2) Funkce má v bodě x_0 limitu A právě když $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

Vlastnosti limit

Pro počítání s limitami platí : jestliže $\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \lim_{x \to x_0} g(x) = B$ pak

$\lim_{x \to x_0} (c.f(x)) = c.A$, $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$,

$\lim_{x \to x_0} (f(x).g(x)) = A.B$, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ je − li $B \neq 0$.

Nevlastní limita funkce

Poznámka : Rozšířenou množinou reálných čísel rozumíme množinu reálných čísel, rozšířenou o prvky $\pm\infty$. Značíme ji $\mathbf{R}^*$. Tedy $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Prvky množiny **R** nazýváme vlastní body, zatímco $\pm\infty$ nazýváme nevlastní body.

Přitom pro libovolné číslo $a \in \boldsymbol{R}$ platí:

1) $a + \infty = \infty$, $a - \infty = -\infty$, $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$,

2) $\infty \cdot \infty = -\infty \cdot (-\infty) = \infty$, $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$, $\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$,

Nejsou definovány operace : $\infty - \infty$, $\pm\infty \cdot 0$, dělení nulou, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Def.: Funkce má v bodě x_0 **nevlastní limitu** $+\infty(-\infty)$, když ke každému číslu $K > 0$ existuje takové ryzí δ okolí bodu x_0, že pro všechna x z tohoto okolí platí $f(x) > K$ $(f(x) < K)$.

Píšeme $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $(\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty)$.

Nevlastní limita vyjadřuje skutečnost, že v okolí bodu x_0 funkce neomezeně roste nebo klesá.

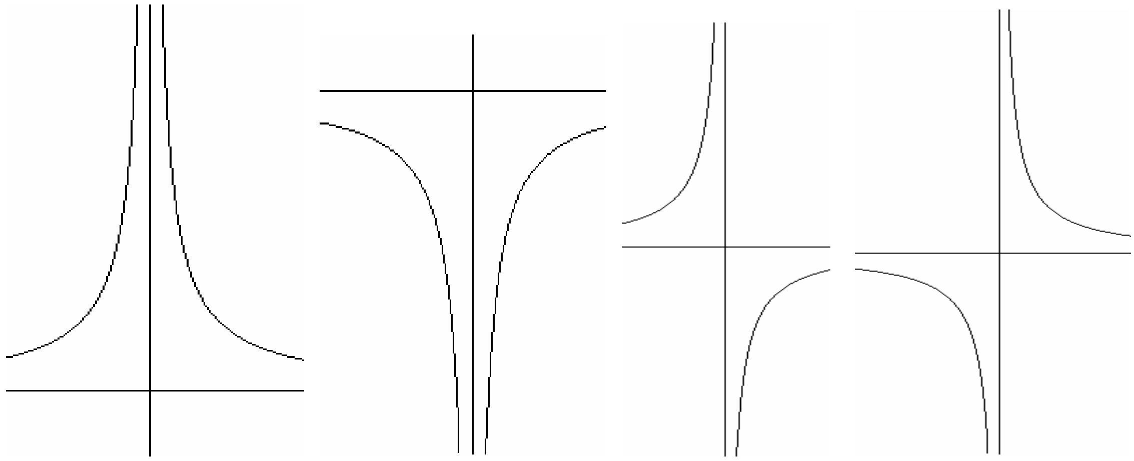
K nevlastním limitám docházíme například při výpočtu limity podílu funkcí $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, kdy po dosazení dostaneme výraz typu $\left\| \frac{k}{0} \right\|$.

Potom jestliže v levém i pravém okolí bodu x_0 platí $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, je $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

Jestliže v levém i pravém okolí bodu x_0 platí $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, je $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

Jestliže v levém i pravém okolí bodu x_0 má podíl $\frac{f(x)}{g(x)}$ různá znaménka, daná limita neexistuje.

Jde-li například o racionální lomenou funkci, definovanou v okolí bodu x_0, nastává při výpočtu limity v tomto bodě jeden z následujících 4 případů :



$L = +\infty = P$	$L = -\infty = P$	$L = +\infty \neq P = -\infty$	$L = -\infty \neq P = +\infty$
limita existuje	limita existuje	limita neexistuje	limita neexistuje

Přímky o rovnici $x = x_0$ se nazývají asymptoty grafu funkce.

Limita v nevlastním bodě

Def.: Funkce má **v nevlastním bodě** $+\infty$ $(-\infty)$ **limitu** A, když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové $K > 0$, že pro všechna $x > K$ ($x < -K$) platí $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Spojitost funkce

Def.: Funkce se nazývá **spojitá** v bodě x_0 je-li v tomto bodě definovaná a platí

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Říkáme, že funkce je spojitá v intervalu, je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu (v krajních bodech intervalu případně zprava resp. zleva).

Bod, ve kterém funkce není spojitá, nazýváme bod nespojitosti.

8) Derivace funkce

Def.: Nechť funkce $f(x)$ je definovaná v okolí bodu x_0. **Derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0** nazýváme konečnou limitu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Značíme ji $f'(x_0)$.

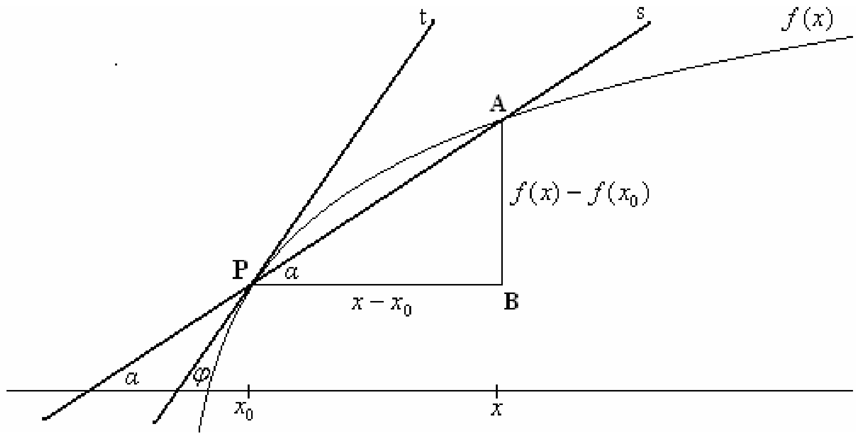
Říkáme, že funkce má derivaci v intervalu, má-li derivaci v každém bodě tohoto intervalu.

Geometrický význam derivace

Podíl $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ vyjadřuje hodnotu $\operatorname{tg}\alpha$, tj. směrnici přímky *s*.

Jestliže $x \to x_0$ přejde sečna *s* v tečnu *t* v bodě P a $\operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

Tedy derivace $f'(x_0)$ značí směrnici $\operatorname{tg}\varphi$ tečny *t* sestrojené ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $P = [x_0, f(x_0)]$. Tato tečna má rovnici : $y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$.



Př.: Vypočítejte derivaci funkce $f(x) = x$.

Limitu je možné definovat rovněž vztahem $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Pro funkci $f(x) = x$ tedy $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x + h - x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{h} = 1$.

Pravidla pro derivování

Pro funkce $u(x)$, $v(x)$ a konstantu c platí :

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)' = u_1' + u_2' + \ldots + u_n'$$

$$[cu(x)]' = c \cdot u'(x) \qquad \left(\frac{u(x)}{c}\right)' = \frac{u'(x)}{c}$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Přehled vzorců pro derivování elementárních funkcí

I. $[c]' = 0$

II. $[x^n]' = nx^{n-1}$

III. $[a^x]' = a^x \ln a$

IV. $[e^x]' = e^x$

V. $[\log_a x]' = \dfrac{1}{x \ln a}$

VI. $[\ln x]' = \dfrac{1}{x}$

VII. $[\sin x]' = \cos x$

VIII. $[\cos x]' = -\sin x$

IX. $[tg\, x]' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

X. $[\cot g\, x]' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

XI. $[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

XII. $[\arccos x]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

XIII. $[arctg\, x]' = \dfrac{1}{1 + x^2}$

XIV. $[arc\cot g\, x]' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

XV. $\left[f(x)^{g(x)}\right]' = f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x) + g(x)\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]$, $\qquad f(x) > 0$

Derivace složené funkce

Má-li funkce $u = \varphi(x)$ derivaci v bodě x_0 a funkce $y = f(u)$ v bodě u_0, pak má derivaci také složená funkce $y = F(x) = f(\varphi(x))$ a platí $y' = F'(x_0) = f'(u_0).\varphi'(x_0)$.

Derivace složené funkce je tedy rovna součinu derivací jednotlivých složek.

Derivace vyšších řádů

Derivace funkce $f(x)$ je opět funkce. Má-li tato funkce $f'(x)$ derivaci, nazýváme ji druhou derivací funkce $f(x)$ a značíme ji $f''(x)$.

Obecně n-tou derivaci funkce $f(x)$ definujeme vztahem $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$.

Označení : $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$, … , $f^{(n)}(x)$

Derivace funkce $y = [f(x)]^{g(x)}$ **.**

Danou funkci přepíšeme pomocí vzorce $A^B = e^{B.\ln A}$ na tvar $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x).\ln(f(x))}$ a pak ji derivujeme jako složenou exponenciální funkci :

$$\left[f(x)^{g(x)}\right]' = f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right].$$

9) Užití derivace

a) L´Hospitalovo pravidlo

Používá se při výpočtu limit neurčitých výrazů typu $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ nebo $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$.

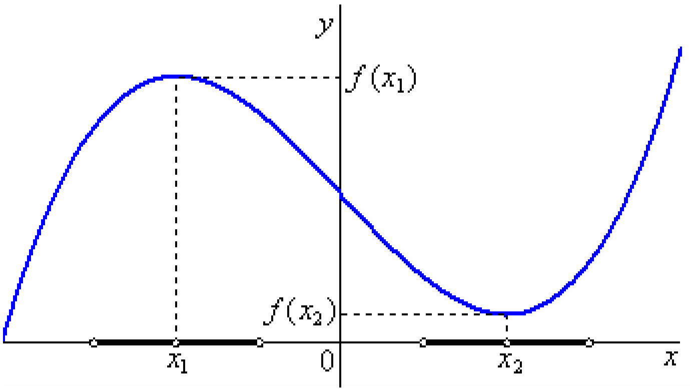
Věta : Jestliže limita $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ je typu $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ nebo $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$ a existuje-li limita $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, pak platí $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Převodem na limity typu $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ nebo $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$ s následným použitím L´Hospitalova pravidla lze řešit i některé další typy limit neurčitých výrazů (např. $\|0.\infty\|$, $\|\infty-\infty\|$, $\|\infty^0\|$ atd.- viz skripta).

b) Monotónnost funkce a lokální extrémy

Věta : Jestliže pro všechna $x \in (a,b)$ platí

- $f'(x) > 0$, je funkce $f(x)$ na tomto intervalu rostoucí,
- $f'(x) < 0$, je funkce $f(x)$ na tomto intervalu klesající.



Def.: Funkce $f(x)$ má v bodě

- x_1 **lokální minimum**, když v nějakém okolí tohoto bodu platí $f(x) > f(x_1)$,
- x_2 **lokální maximum**, když v nějakém okolí tohoto bodu platí $f(x) < f(x_2)$.

Lokální maxima a lokální minima funkce nazýváme lokální extrémy.

Bod x_0, pro který platí $f'(x_0) = 0$, nazýváme **stacionárním bodem**.

Jestliže

- $f'(x) > 0$ v levém okolí stacionárního bodu x_0 a $f'(x) < 0$ v pravém okolí stacionárního bodu x_0, nastává v bodě x_0 lokální maximum,
- $f'(x) < 0$ v levém okolí stacionárního bodu x_0 a $f'(x) > 0$ v pravém okolí stacionárního bodu x_0, nastává v bodě x_0 lokální minimum.

Lokální extrém tedy nastává ve stacionárních bodech, ve kterých derivace funkce mění znaménko. Může však nastat také v bodech, ve kterých derivace neexistuje.

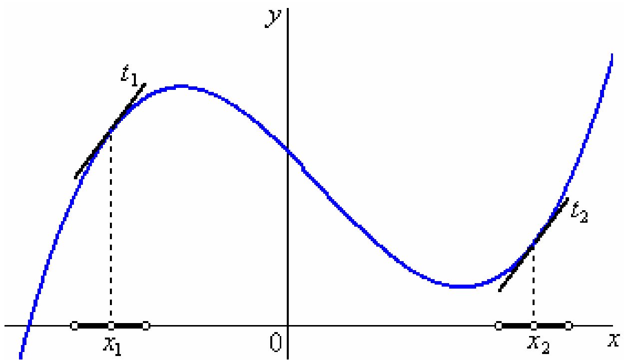
Absolutní extrém

Definice : Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathbf{I} \subseteq D(f)$ **absolutní maximum (minimum),** když pro každý bod $x \in \mathbf{I}$, takový, že $x \neq x_0$, platí $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).
Absolutní maximum a absolutní minimum nazýváme absolutní extrémy.

c) Konvexita, konkávita a inflexní bod

Def.: Funkci $f(x)$, která má derivaci v bodě x_0, nazveme **konvexní (konkávní)** v tomto bodě, jestliže její graf leží v nějakém okolí bodu x_0 **nad (pod) tečnou** v tomto bodě.

Funkci nazveme konvexní (konkávní) na intervalu, je-li konvexní (konkávní) v každém bodě tohoto intervalu.



Věta : Platí-li pro každé $x \in (a,b)$

- $f''(x) > 0$ je funkce na tomto intervalu konvexní,
- $f''(x) < 0$ je funkce na tomto intervalu konkávní.

Bod x_0, ve kterém graf funkce přechází z konvexity do konkávity nebo naopak, se nazývá **inflexní bod**. Může nastat v bodech, ve kterých je druhá derivace rovna nule nebo ve kterých druhá derivace neexistuje.

d) Asymptoty grafu funkce

Asymptoty jsou přímky, ke kterým se graf funkce přibližuje, vzdalujeme-li se od počátku.

Rozlišujeme dva typy asymptot :

- **rovnoběžná s osou *y*** (bez směrnice)

Nastává v bodech nespojitosti funkce nebo v krajních bodech definičního oboru, ve kterých má funkce nevlastní limitu.

Přímka $x = x_0$ se nazývá asymptotou rovnoběžnou s osou y grafu funkce $y = f(x)$, platí-li aspoň jeden ze vztahů $\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$.

- **různoběžná s osou *y*** (se směrnicí)

Přímka o rovnici $y = kx + q$ je asymptotou různoběžnou s osou *y*, existují-li konečné limity

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad\qquad q = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - kx \right] .$$

10) Vyšetřování průběhu funkce

Při vyšetřování průběhu funkce postupujeme podle následujících bodů :

a) definiční obor, body nespojitost,

b) průsečíky s osami, určení, kde je funkce kladná příp. záporná, vlastnosti funkce (sudost, lichost, periodičnost, atd.),

c) monotónnost, lokální extrémy,

d) konvexita, konkávita, inflexní body,

e) tabulka význačných hodnot a načrtnutí grafu funkce.