Derivace

Robert Mařík

16. září 2004

Obsah

Derivujte $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

Derivujte $y = \dfrac{x}{x^2+1}$.

$$y' = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)'$$

Funkce je ve tvaru podílu.

Derivujte $y = \dfrac{x}{x^2+1}$.

$$y' = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)'$$
$$= \frac{(x)' \cdot (x^2+1) - x \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

Užijeme pravidlo pro derivaci podílu $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$.

Derivujte $y = \dfrac{x}{x^2+1}$.

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' \\
&= \frac{(x)' \cdot (x^2+1) - x \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot (2x+0)}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

- $x' = 1$ podle derivace mocninné funkce.
- $(x^2+1)' = (x^2)' + (1)' = 2x + 0 = 2x$ podle derivace součtu a derivace mocninné funkce.

Derivujte $y = \dfrac{x}{x^2+1}$.

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' \\ &= \frac{(x)'\cdot(x^2+1) - x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot(2x+0)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

Roznásobíme závorky a upravíme čitatele.

Derivujte $y = \dfrac{1 - x^3}{x^2}$

Derivujte $y = \dfrac{1-x^3}{x^2}$

$$y' = \left(\frac{1-x^3}{x^2}\right)'$$

Funkce je ve tvaru podílu.

Derivujte $y = \dfrac{1-x^3}{x^2}$

$$y' = \left(\frac{1-x^3}{x^2}\right)'$$
$$= \frac{(1-x^3)' \cdot x^2 - (1-x^3) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2}$$

Užijeme pravidlo $\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}}$.

Derivujte $y = \dfrac{1-x^3}{x^2}$

$$y' = \left(\frac{1-x^3}{x^2}\right)'$$
$$= \frac{(1-x^3)' \cdot x^2 - (1-x^3) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2}$$
$$= \frac{(0-3x^2) \cdot x^2 - (1-x^3) \cdot 2x}{(x^2)^2}$$

- Výraz $(1-x^3)'$ derivujeme jako součet.
- Výrazy x^2 a x^3 derivujeme jako mocninné funkce.

Derivujte $y = \dfrac{1-x^3}{x^2}$

$$y' = \left(\frac{1-x^3}{x^2}\right)'$$
$$= \frac{(1-x^3)' \cdot x^2 - (1-x^3) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2}$$
$$= \frac{(0-3x^2) \cdot x^2 - (1-x^3) \cdot 2x}{(x^2)^2}$$
$$= \frac{-3x^4 - 2x + 2x^4}{x^4}$$

Roznásobíme.

Derivujte $y = \dfrac{1 - x^3}{x^2}$

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{1-x^3}{x^2}\right)' \\ &= \frac{(1-x^3)' \cdot x^2 - (1-x^3)\cdot (x^2)'}{(x^2)^2} \\ &= \frac{(0-3x^2)\cdot x^2 - (1-x^3)\cdot 2x}{(x^2)^2} \\ &= \frac{-3x^4 - 2x + 2x^4}{x^4} = -\frac{2+x^3}{x^3} \end{aligned}$$

Upravíme.

Derivujte $y = x \ln^2 x$.

Derivujte $y = x \ln^2 x$.

$$y' = (x \ \ln^2 x)' = (x)' \ \ln^2 x + x \ (\ln^2 x)'$$

Derivujeme jako součin $(uv)'$, kde $u = x$ a $v' = \ln^2 x$.

$$\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$$

Derivujte $y = x \ln^2 x$.

$$y' = (\ x\ \ln^2 x\ )' = (x)'\ \ln^2 x + x\ (\ln^2 x)'$$

$$= 1\ \ln^2 x$$

Derivace funkce x je vzorec.

Derivujte $y = x\ln^2 x$.

$$y' = (\ x\ \ln^2 x\ )' = (x)'\ \ln^2 x + x\ (\ln^2 x)'$$

$$= 1\ \ln^2 x + x\ 2\ln x\ (\ln x)'$$

- Funkce $\ln^2 x$ je složená, jedná se o funkci $(\ln x)^2$.
- Vnější složka je druhá mocnina, vnitřní je logaritmus.
- Pro derivaci složené funkce užijeme řetězové pravidlo

$$\boxed{[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)} \qquad \boxed{(g^2(x))' = 2g(x)g'(x)}.$$

Derivujte $y = x \ln^2 x$.

$$y' = (\ x\ \ln^2 x\ )' = (x)'\ \ln^2 x + x\ (\ln^2 x)'$$

$$= 1\ \ln^2 x + x\ 2 \ln x\ (\ln x)'$$

$$= \ln^2 x + x\ 2 \ln x\ \frac{1}{x}$$

Derivace logaritmu je tabelována.

Derivujte $y = x\ln^2 x$.

$$y' = (x \ln^2 x)' = (x)' \ln^2 x + x (\ln^2 x)'$$

$$= 1 \ln^2 x + x\, 2\ln x\, (\ln x)'$$

$$= \ln^2 x + x\, 2\ln x\, \frac{1}{x}$$

$$= (2 + \ln x)\ln x$$

$x\dfrac{1}{x} = 1$ a vytkneme $\ln x$.

Derivujte $y = (x^2 + 3x)e^{-2x}$

Derivujte $y = (x^2 + 3x)e^{-2x}$

$$y' = \left(x^2 + 3x\right)' e^{-2x} + (x^2 + 3x)\left(e^{-2x}\right)'$$

Derivujeme součin funkce $\boxed{u = x^2 + 3x}$ a $\boxed{v = e^{-2x}}$.

Derivujte $y = (x^2 + 3x)e^{-2x}$

$$y' = \left(x^2 + 3x\right)' e^{-2x} + (x^2 + 3x)\left(e^{-2x}\right)'$$

$$= \left((x^2)' + 3(x)'\right)e^{-2x} + (x^2 + 3x)e^{-2x}(-2x)'$$

Derivujeme součet. Užijeme pravidlo pro derivaci součtu a pravidlo pro derivaci násobku konstantou.

Derivujte $y = (x^2 + 3x)e^{-2x}$

$$y' = \left(x^2 + 3x\right)' e^{-2x} + (x^2 + 3x)\left(e^{-2x}\right)'$$

$$= \left((x^2)' + 3(x)'\right)e^{-2x} + (x^2 + 3x)e^{-2x}(-2x)'$$

- Derivujeme složenou funkci e^{-2x}.
- Vnější složka je exponenciální funkce a ta se při derivaci nemění.
- $\boxed{(e^{f(x)})' = e^{f(x)} f'(x)}$
- Vnitřní složka je $-2x$.

Derivujte $y = (x^2 + 3x)e^{-2x}$

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(x^2 + 3x\right)' e^{-2x} + (x^2 + 3x)\left(e^{-2x}\right)' \\
&= \left((x^2)' + 3(x)'\right)e^{-2x} + (x^2 + 3x)e^{-2x}(-2x)' \\
&= \left(2x + 3 \cdot 1\right)e^{-2x}
\end{aligned}
$$

Derivace funkcí x^2 a x jsou tabelovány.

Derivujte $y = (x^2 + 3x)e^{-2x}$

$$\begin{aligned} y' &= \left(x^2 + 3x\right)' e^{-2x} + (x^2 + 3x)\left(e^{-2x}\right)' \\ &= \left((x^2)' + 3(x)'\right)e^{-2x} + (x^2 + 3x)e^{-2x}(-2x)' \\ &= \left(2x + 3 \cdot 1\right)e^{-2x} + (x^2 + 3x)e^{-2x}(-2)(x)' \end{aligned}$$

Derivace funkce $(-2x)$ může být vypočítána podle derivace násobku …

Derivujte $y = (x^2 + 3x)e^{-2x}$

$$
\begin{aligned}
y' &= \Big(x^2 + 3x\Big)' e^{-2x} + (x^2 + 3x)\Big(e^{-2x}\Big)' \\
&= \Big((x^2)' + 3(x)'\Big) e^{-2x} + (x^2 + 3x)e^{-2x}(-2x)' \\
&= \Big(2x + 3 \cdot 1\Big) e^{-2x} + (x^2 + 3x)e^{-2x}(-2)(x)' \\
&= \Big(2x + 3\Big) e^{-2x} + (x^2 + 3x)e^{-2x}(-2)1
\end{aligned}
$$

…a derivace mocninné funkce ($x = x^1$ a tedy $x' = 1x^0 = 1$).

Derivujte $y = (x^2 + 3x)e^{-2x}$

$$\begin{aligned}
y' &= \Big(x^2 + 3x\Big)' e^{-2x} + (x^2 + 3x)\Big(e^{-2x}\Big)' \\
&= \Big((x^2)' + 3(x)'\Big)e^{-2x} + (x^2 + 3x)e^{-2x}(-2x)' \\
&= \Big(2x + 3 \cdot 1\Big)e^{-2x} + (x^2 + 3x)e^{-2x}(-2)(x)' \\
&= \Big(2x + 3\Big)e^{-2x} + (x^2 + 3x)e^{-2x}(-2)1 \\
&= \Big(2x + 3 + (-2)(x^2 + 3x)\Big)e^{-2x}
\end{aligned}$$

Vytkneme e^{-2x}.

Derivujte $y = (x^2 + 3x)e^{-2x}$

$$
\begin{aligned}
y' &= \Big(x^2 + 3x\Big)' e^{-2x} + (x^2 + 3x)\Big(e^{-2x}\Big)' \\
&= \Big((x^2)' + 3(x)'\Big)e^{-2x} + (x^2 + 3x)e^{-2x}(-2x)' \\
&= \Big(2x + 3\cdot 1\Big)e^{-2x} + (x^2 + 3x)e^{-2x}(-2)(x)' \\
&= \Big(2x + 3\Big)e^{-2x} + (x^2 + 3x)e^{-2x}(-2)1 \\
&= \Big(2x + 3 + (-2)(x^2 + 3x)\Big)e^{-2x} \\
&= \Big(-2x^2 - 4x + 3\Big)e^{-2x}
\end{aligned}
$$

Upravíme uvnitř závorky.

Derivujte $y = (x^2+3x)e^{-2x}$

$$\begin{aligned}
y' &= \left(x^2+3x\right)' e^{-2x} + (x^2+3x)\left(e^{-2x}\right)' \\
&= \left((x^2)' + 3(x)'\right)e^{-2x} + (x^2+3x)e^{-2x}(-2x)' \\
&= \left(2x + 3\cdot 1\right)e^{-2x} + (x^2+3x)e^{-2x}(-2)(x)' \\
&= \left(2x+3\right)e^{-2x} + (x^2+3x)e^{-2x}(-2)1 \\
&= \left(2x+3+(-2)(x^2+3x)\right)e^{-2x} \\
&= \left(-2x^2-4x+3\right)e^{-2x} = -\left(2x^2+4x-3\right)e^{-2x}
\end{aligned}$$

Vytkneme.

Derivujte $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$.

Derivujte $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$.

$$y' = \frac{1}{3}\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{-2/3}\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)'$$

Třetí odmocninu bereme jako mocninu s exponentem $\dfrac{1}{3}$. Derivujeme tedy jako mocninnou funkci.

Derivujte $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$.

$$y' = \frac{1}{3}\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{-2/3} \left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)'$$

Výraz pod odmocninou je vnitřní funkce. Podle řetězového pravidla násobíme derivací vnitřní složky.

$$\left(\sqrt[3]{f(x)}\right)' = \frac{1}{3} f^{\frac{1}{3}-1}(x) f'(x)$$

Derivujte $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$.

$$y' = \frac{1}{3}\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{-2/3}\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)'$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)^{2/3}\cdot\frac{(1+x^3)'(1-x^3)-(1+x^3)(1-x^3)'}{(1-x^3)^2}$$

Vnitřní složka je podíl. Užijeme pravidlo
$\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}}$.

Derivujte $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$.

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{3}\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{-2/3}\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)' \\
&= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)^{2/3}\cdot\frac{(1+x^3)'(1-x^3)-(1+x^3)(1-x^3)'}{(1-x^3)^2} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)^{2/3}\frac{3x^2(1-x^3)-(1+x^3)(-3x^2)}{(1-x^3)^2}
\end{aligned}$$

Derivace v čitateli a jmenovateli je možno vypočítat jako derivace součtu (rozdílu) a mocninné funkce.

Derivujte $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$.

$$y' = \frac{1}{3}\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)^{2/3} \frac{3x^2(1-x^3)-(1+x^3)(-3x^2)}{(1-x^3)^2}$$

Tohle zatím máme.

Derivujte $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$.

$$y' = \frac{1}{3}\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)^{2/3} \frac{3x^2(1-x^3)-(1+x^3)(-3x^2)}{(1-x^3)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)^{2/3} \frac{6x^2}{(1-x^3)^2}$$

Upravíme čitatel . . .

Derivujte $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$.

$$y' = \frac{1}{3}\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)^{2/3} \frac{3x^2(1-x^3)-(1+x^3)(-3x^2)}{(1-x^3)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)^{2/3} \frac{6x^2}{(1-x^3)^2}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} \cdot \frac{1-x^3}{1+x^3} \cdot \frac{2x^2}{(1-x^3)^2}$$

...a ještě více upravíme.

Derivujte $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$.

$$y' = \frac{1}{3}\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)^{2/3} \frac{3x^2(1-x^3)-(1+x^3)(-3x^2)}{(1-x^3)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)^{2/3} \frac{6x^2}{(1-x^3)^2}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} \cdot \frac{1-x^3}{1+x^3} \cdot \frac{2x^2}{(1-x^3)^2} = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}\,\frac{2x^2}{1-x^6}$$

Hotovo!

Derivujte $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$.

Derivujte $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$.

$$y' = 2\frac{x-1}{x+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'$$

- Jedná se o druhou mocninu zlomku. Vnější složka, druhá mocnina, se derivuje jako mocninná funkce.
- Derivace vnitřní složky následuje (podle řetězového pravidla).

$$\boxed{(f^2(x))' = 2f(x)f'(x)}$$

Derivujte $y = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$.

$$y' = 2\frac{x-1}{x+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'$$
$$= 2\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}$$

Derivace podílu:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Derivujte $y = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$.

$$y' = 2\frac{x-1}{x+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'$$
$$= 2\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}$$
$$= 2\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{1.(x+1)-(x-1).1}{(x+1)^2}$$

Derivace čitatele a jmenovatele jsou již lehké.

Derivujte $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$.

$$\begin{aligned} y' &= 2\frac{x-1}{x+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' \\ &= 2\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= 2\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{1.(x+1)-(x-1).1}{(x+1)^2} \\ &= 2\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Upravíme.

Derivujte $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$.

$$
\begin{aligned}
y' &= 2\frac{x-1}{x+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' \\
&= 2\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} \\
&= 2\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{1.(x+1)-(x-1).1}{(x+1)^2} \\
&= 2\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{2}{(x+1)^2} = 4\frac{x-1}{(x+1)^3}
\end{aligned}
$$

Vynásobíme.

Derivujte $y' = x\ln(x^2-1)$.

Derivujte $y' = x\ln(x^2-1)$.

$$y' = x'\ln(x^2-1) + x\Big(\ln(x^2-1)\Big)'$$

Derivace součinu

$$(uv)' = u'v + uv'$$

kde $u = x$ a $v = \ln(x^2-1)$.

Derivujte $y' = x\ln(x^2-1)$.

$$y' = x'\ln(x^2-1) + x\Big(\ln(x^2-1)\Big)'$$
$$= 1\ln(x^2-1) + x\frac{1}{x^2-1}(x^2-1)'$$

- Derivace $u = x$ je lehká.
- Funkce $\ln(x^2-1)$ je složená s vnější složkou $\ln(\cdot)$ a vnitřní složkou x^2-1.

Derivujte $y' = x\ln(x^2-1)$.

$$\begin{aligned} y' &= x'\ln(x^2-1) + x\Big(\ln(x^2-1)\Big)' \\ &= 1\ln(x^2-1) + x\frac{1}{x^2-1}(x^2-1)' \\ &= \ln(x^2-1) + x\frac{1}{x^2-1}2x \end{aligned}$$

$$(x^2-1)' = 2x - 0 = 2x$$

Derivujte $y' = x\ln(x^2-1)$.

$$\begin{aligned} y' &= x'\ln(x^2-1) + x\Big(\ln(x^2-1)\Big)' \\ &= 1\ln(x^2-1) + x\frac{1}{x^2-1}(x^2-1)' \\ &= \ln(x^2-1) + x\frac{1}{x^2-1}2x \\ &= \ln(x^2-1) + \frac{2x^2}{x^2-1} \end{aligned}$$

Upravíme.

Derivujte $y = \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

Derivujte $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

$$y' = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2}$$

Funkce je konstantní násobek logaritmické funkce.

$$\boxed{\text{Derivujte } y = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}.}$$

$$y' = \frac{1}{4}\cdot\frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2}$$

- Logaritmus je pouze vnější funkce. Vnitřní funkcí je zlomek.
- Derivujeme vnější složku podle pravidla $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$ a podle řetězového pravidla.
- Platí $\boxed{(\ln f(x))' = \dfrac{1}{f(x)}f'(x)}$ a $\dfrac{1}{\frac{x^2-1}{x^2+1}} = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

Derivujte $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

$$y' = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1)2x}{(x^2+1)^2}$$

Pokračujeme derivací vnitřní složky.

Derivujte $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

$$y' = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1)2x}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

Upravíme čitatel druhého zlomku. Členy s x^3 se ruší a zůstane $4x$.

Derivujte $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{4x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)} \end{aligned}$$

Vynásobíme.

Derivujte $y = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$.

Derivujte $y = \sqrt{x+1} - \ln(1+\sqrt{x+1})$.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot 1 - \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} \left(0 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$$

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

podle derivace mocninné funkce. Toto musíme spojit s řetězovým pravidlem

$$(\sqrt{x+1})' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

Derivujte $y = \sqrt{x+1} - \ln(1+\sqrt{x+1})$.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot 1 - \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} \left(0 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \left(1 - \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\right)$$

Vytkneme $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

Derivujte $y = \sqrt{x+1} - \ln(1+\sqrt{x+1})$.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot 1 - \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\left(0 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\left(1 - \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

Převedeme na společného jmenovatele a sečteme.

Derivujte $y = \sqrt{x+1} - \ln(1+\sqrt{x+1})$.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot 1 - \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} \left(0 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \left(1 - \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})} \end{aligned}$$

Zkrátíme $\sqrt{x+1}$. Hotovo.

Derivujte $y = \sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}$

Derivujte $y = \sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x}$

$$y' = (\sqrt{1-x})' \cdot \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \cdot (\arcsin \sqrt{x})'$$

Derivace součinu.

Derivujte $y = \sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}$

$$\begin{aligned}
y' &= (\sqrt{1-x})' \cdot \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{1-x} \cdot (\arcsin\sqrt{x})' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot (1-x)' \cdot \arcsin\sqrt{x} \\
&\qquad + \sqrt{1-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot (\sqrt{x})'
\end{aligned}$$

Řetězové pravidlo pro $\sqrt{1-x}$ a pro $\arcsin(\sqrt{x})$

Derivujte $y = \sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} y' &= (\sqrt{1-x})' \cdot \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \cdot (\arcsin \sqrt{x})' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot (1-x)' \cdot \arcsin \sqrt{x} \\ &\quad + \sqrt{1-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot (\sqrt{x})' \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Derivace vnitřní složky.

Derivujte $y = \sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}$

$$
\begin{aligned}
y' &= (\sqrt{1-x})' \cdot \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{1-x} \cdot (\arcsin\sqrt{x})' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot (1-x)' \cdot \arcsin\sqrt{x} \\
&\qquad + \sqrt{1-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot (\sqrt{x})' \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{1-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= -\frac{\arcsin\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

Výraz $\sqrt{1-x}$ se zkrátí. Hotovo!

Derivujte $y = (x^2 + 1)\sin x + x\cos x$

Derivujte $y = (x^2 + 1)\sin x + x\cos x$

$$y' = \left((x^2+1)\sin x\right)' + (x\cos x)'$$

Derivace součtu.

Derivujte $y = (x^2+1)\sin x + x\cos x$

$$y' = \Big((x^2+1)\sin x\Big)' + (x\cos x)'$$
$$= (x^2+1)'\sin x + (x^2+1)(\sin x)' + x'\cos x + x(\cos x)'$$

Dvakrát derivace součinu.

Derivujte $y = (x^2 + 1)\sin x + x\cos x$

$$y' = \left((x^2+1)\sin x\right)' + (x\cos x)'$$
$$= (x^2+1)'\sin x + (x^2+1)(\sin x)' + x'\cos x + x(\cos x)'$$
$$= 2x\sin x + (x^2+1)\cos x + 1\cdot\cos x + x(-\sin x)$$

Aplikace vzorců.

$\boxed{(x^2)' = 2x}$ $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$ $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$

Derivujte $y = (x^2+1)\sin x + x\cos x$

$$
\begin{aligned}
y' &= \Big((x^2+1)\sin x\Big)' + (x\cos x)' \\
&= (x^2+1)'\sin x + (x^2+1)(\sin x)' + x'\cos x + x(\cos x)' \\
&= 2x\sin x + (x^2+1)\cos x + 1\cdot\cos x + x(-\sin x) \\
&= (2x - x)\sin(x) + (x^2+1+1)\cos x
\end{aligned}
$$

Vytkneme goniometrické funkce

Derivujte $y = (x^2+1)\sin x + x\cos x$

$$\begin{aligned} y' &= \Big((x^2+1)\sin x\Big)' + (x\cos x)' \\ &= (x^2+1)'\sin x + (x^2+1)(\sin x)' + x'\cos x + x(\cos x)' \\ &= 2x\sin x + (x^2+1)\cos x + 1\cdot\cos x + x(-\sin x) \\ &= (2x-x)\sin(x) + (x^2+1+1)\cos x \\ &= x\sin x + (x^2+2)\cos x \end{aligned}$$

Upravíme.

Derivujte $y = (x^2 + 1)\cos(2x)$

Derivujte $y = (x^2 + 1)\cos(2x)$

$$y' = (x^2 + 1)' \cos(2x) + (x^2 + 1)\big(\cos(2x)\big)'$$

Derivace součinu.

Derivujte $y = (x^2+1)\cos(2x)$

$$y' = (x^2+1)'\cos(2x) + (x^2+1)\big(\cos(2x)\big)'$$
$$= 2x\cos(2x) + (x^2+1)\big(-\sin(2x)\big)(2x)'$$

Vypočteme derivace. Derivujeme složenou funkci.

$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$ $\boxed{[\cos(f(x))]' = -\sin(f(x))\cdot f'(x)}$

Derivujte $y = (x^2 + 1)\cos(2x)$

$$\begin{aligned} y' &= (x^2+1)'\cos(2x) + (x^2+1)\big(\cos(2x)\big)' \\ &= 2x\cos(2x) + (x^2+1)\big(-\sin(2x)\big)(2x)' \\ &= 2x\cos(2x) - (x^2+1)\sin(2x)2 \end{aligned}$$

Dopočítáme derivaci.

Derivujte $y = (x^2+1)\cos(2x)$

$$\begin{aligned} y' &= (x^2+1)'\cos(2x) + (x^2+1)\big(\cos(2x)\big)' \\ &= 2x\cos(2x) + (x^2+1)\big(-\sin(2x)\big)(2x)' \\ &= 2x\cos(2x) - (x^2+1)\sin(2x)2 \\ &= 2x\cos(2x) - 2(x^2+1)\sin(2x) \end{aligned}$$

Upravíme.

Derivujte $y = \dfrac{(x^2+1)^3}{x^4}$

Derivujte $y = \dfrac{(x^2+1)^3}{x^4}$

$$y' = \frac{\left[(x^2+1)^3\right]' x^4 - (x^2+1)^3 (x^4)'}{(x^4)^2}$$

Derivace podílu.

$$\text{Derivujte } y = \frac{(x^2+1)^3}{x^4}$$

$$y' = \frac{\left[(x^2+1)^3\right]' x^4 - (x^2+1)^3 (x^4)'}{(x^4)^2}$$

$$= \frac{3(x^2+1)^2(x^2+1)'x^4 - (x^2+1)^3 4x^3}{x^{2\cdot 4}}$$

Derivujeme složenou funkci.

$$\boxed{(x^3)' = 3x^2} \qquad \boxed{\left[\left(f(x)\right)^3\right]' = 3\left(f(x)\right)^2 f'(x)}$$

Derivujte $y = \dfrac{(x^2+1)^3}{x^4}$

$$y' = \frac{\left[(x^2+1)^3\right]' x^4 - (x^2+1)^3 (x^4)'}{(x^4)^2}$$

$$= \frac{3(x^2+1)^2 (x^2+1)' x^4 - (x^2+1)^3 4x^3}{x^{2\cdot 4}}$$

$$= \frac{3(x^2+1)^2 (2x) x^4 - (x^2+1)^3 4x^3}{x^8}$$

Derivujte $y = \dfrac{(x^2+1)^3}{x^4}$

$$y' = \frac{\left[(x^2+1)^3\right]' x^4 - (x^2+1)^3 (x^4)'}{(x^4)^2}$$
$$= \frac{3(x^2+1)^2 (x^2+1)' x^4 - (x^2+1)^3 4x^3}{x^{2\cdot 4}}$$
$$= \frac{3(x^2+1)^2 (2x) x^4 - (x^2+1)^3 4x^3}{x^8}$$
$$= \frac{2(x^2+1)^2 x^3 [3x^2 - 2(x^2+1)]}{x^8}$$

Vytkneme v čitateli.

Derivujte $y = \dfrac{(x^2+1)^3}{x^4}$

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{\left[(x^2+1)^3\right]' x^4 - (x^2+1)^3 (x^4)'}{(x^4)^2} \\
&= \frac{3(x^2+1)^2 (x^2+1)' x^4 - (x^2+1)^3 4x^3}{x^{2\cdot 4}} \\
&= \frac{3(x^2+1)^2 (2x) x^4 - (x^2+1)^3 4x^3}{x^8} \\
&= \frac{2(x^2+1)^2 x^3 [3x^2 - 2(x^2+1)]}{x^8} \\
&= 2\frac{(x^2+1)^2 (x^2-2)}{x^5}
\end{aligned}
$$

Derivujte $y = \dfrac{(x^2+1)^3}{x^4}$ tak, že nejprve upravíte.

Derivujte $y = \dfrac{(x^2+1)^3}{x^4}$ tak, že nejprve upravíte.

$$y' = \left[\frac{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1}{x^4}\right]'$$

Umocníme podle vzorce

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.}$$

Derivujte $y = \dfrac{(x^2+1)^3}{x^4}$ tak, že nejprve upravíte.

$$y' = \left[\frac{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1}{x^4}\right]'$$
$$= \left[x^2 + 3 + 3x^{-2} + x^{-4}\right]'$$

Vydělíme každý člen čitatele.

Derivujte $y = \dfrac{(x^2+1)^3}{x^4}$ tak, že nejprve upravíte.

$$\begin{aligned} y' &= \left[\frac{x^6+3x^4+3x^2+1}{x^4}\right]' \\ &= \left[x^2+3+3x^{-2}+x^{-4}\right]' \\ &= 2x+0+3(-2)x^{-3}+(-4)x^{-5} \end{aligned}$$

Derivujeme součet (přesněji lineární kombinaci) čtyř mocninných funkcí.

Derivujte $y = \dfrac{(x^2+1)^3}{x^4}$ tak, že nejprve upravíte.

$$
\begin{aligned}
y' &= \left[\frac{x^6+3x^4+3x^2+1}{x^4}\right]' \\
&= \left[x^2+3+3x^{-2}+x^{-4}\right]' \\
&= 2x+0+3(-2)x^{-3}+(-4)x^{-5} \\
&= 2x-\frac{6}{x^3}-\frac{4}{x^5}
\end{aligned}
$$

Přepíšeme záporné mocniny na zlomky.

Derivujte $y = \dfrac{(x^2+1)^3}{x^4}$ tak, že nejprve upravíte.

$$\begin{aligned} y' &= \left[\frac{x^6+3x^4+3x^2+1}{x^4}\right]' \\ &= \left[x^2+3+3x^{-2}+x^{-4}\right]' \\ &= 2x+0+3(-2)x^{-3}+(-4)x^{-5} \\ &= 2x-\frac{6}{x^3}-\frac{4}{x^5} = \frac{2x^6-6x^2-4}{x^5} \end{aligned}$$

Upravíme. Derivování bylo jednodušší než v předchozím postupu, ale hůř se bude řešit rovnice $y'=0$.

Derivujte $y = \ln\Big(x + \arcsin(2\sqrt{x})\Big)$

Derivujte $y = \ln\Big(x + \arcsin(2\sqrt{x})\Big)$

$$y' = \frac{1}{x + \arcsin(2\sqrt{x})}\Big(x + \arcsin(2\sqrt{x})\Big)'$$

Derivujeme složenou funkci

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}} \qquad \boxed{\Big(\ln f(x)\Big)' = \frac{1}{f(x)} f'(x)}$$

Derivujte $y = \ln\Bigl(x + \arcsin(2\sqrt{x})\Bigr)$

$$y' = \frac{1}{x + \arcsin(2\sqrt{x})}\Bigl(x + \arcsin(2\sqrt{x})\Bigr)'$$
$$= \frac{1}{x + \arcsin(2\sqrt{x})}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-(2\sqrt{x})^2}}(2\sqrt{x})'\right)$$

Derivace součtu a derivace složené funkce.

$$\boxed{\Bigl(\arcsin f(x)\Bigr)' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}}f'(x)}$$

Derivujte $y = \ln\left(x + \arcsin(2\sqrt{x})\right)$

$$y' = \frac{1}{x + \arcsin(2\sqrt{x})}\left(x + \arcsin(2\sqrt{x})\right)'$$
$$= \frac{1}{x + \arcsin(2\sqrt{x})}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - (2\sqrt{x})^2}}(2\sqrt{x})'\right)$$
$$= \frac{1}{x + \arcsin(2\sqrt{x})}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - 4x}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2}\right)$$

Derivujeme složenou funkci

$$\boxed{\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}} \qquad \boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}}$$

Derivujte $y = \ln\left(x + \arcsin(2\sqrt{x})\right)$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{x + \arcsin(2\sqrt{x})}\left(x + \arcsin(2\sqrt{x})\right)' \\
&= \frac{1}{x + \arcsin(2\sqrt{x})}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-(2\sqrt{x})^2}}(2\sqrt{x})'\right) \\
&= \frac{1}{x + \arcsin(2\sqrt{x})}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2}\right) \\
&= \frac{1}{x + \arcsin(2\sqrt{x})}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-4x}}\right)
\end{aligned}$$

Upravíme

To je vše