Definiční obory

Řešení kvadratických rovnice a nerovnic

Při vyšetřování definičních oborů často budeme potřebovat řešit kvadratické rovnice a nerovnice. Proto si nejprve jejich řešení připomeňme.

Uvažujme kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$.

Její kořeny vypočítáme pomocí vzorce $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, kde $D = b^2 - 4ac$.

Pro

- $D > 0$ dostáváme dva reálné různé kořeny,
- $D = 0$ dostáváme jeden tzv. dvojnásobný reálný kořen,
- $D < 0$ nemá rovnice reálné kořeny (dostáváme dva komplexně sdružené kořeny).

Kvadratická funkce $y = ax^2 + bx + c$ nabývá nulových hodnot (a její graf protíná osu *x*) v bodech, které vyhovují rovnici $ax^2 + bx + c = 0$. Mohou tedy nastat tři případy : graf kvadratické funkce protíná osu *x* ve dvou různých bodech, graf se dotýká osy *x*, graf osu *x* neprotíná.

Pomocí grafu snadno určíme řešení kvadratické nerovnice $ax^2 + bx + c \geq 0$, příp. $ax^2 + bx + c \leq 0$.

Pokud je totiž $a > 0$, je parabola, jako graf kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$ otevřená směrem nahoru, pokud je $a < 0$, je parabola otevřená směrem dolů.

První nerovnici pak vyhovují ta čísla *x*, pro která leží graf nad osou *x*. Druhá nerovnice platí pro ta *x*, pro která leží graf této funkce pod osou *x*.

Příklad 1.

Řešte kvadratické nerovnice : a) $3x^2 - 5x - 2 > 0$, b) $2.(1 - x^2) \leq x - 3$.

Řešení : Nerovnice budeme řešit početně i graficky.

a) <u>Početní řešení</u> : Kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$, který má kořeny x_1 a x_2 je možné napsat ve tvaru $a.(x - x_1) \cdot (x - x_2)$. Výraz $3x^2 - 5x - 2$, který má kořeny $x_1 = 2$, $x_2 = -\dfrac{1}{3}$, tedy rozložíme na součin

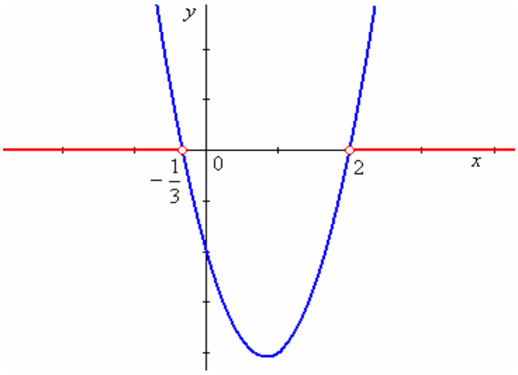
$3.(x-2).\left(x + \dfrac{1}{3}\right)$.

Dále provedeme diskusi, kdy je součin dvou výrazů kladný :

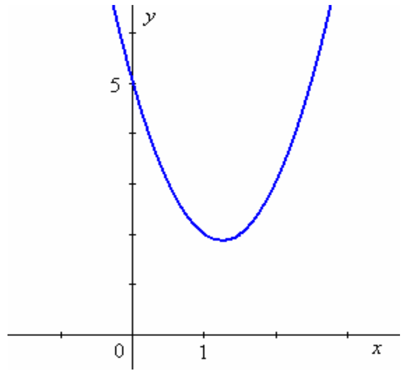
$$3.(x-2).\left(x+\frac{1}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow \left(x - 2 > 0 \wedge x + \frac{1}{3} > 0\right) \vee \left(x - 2 < 0 \wedge x + \frac{1}{3} < 0\right) \Leftrightarrow (x > 2) \vee \left(x < -\frac{1}{3}\right),$$

tedy $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right) \cup (2, \infty)$.

<u>Grafické řešení</u> : Vyšetříme, pro která $x \in \mathbf{R}$ je funkce $f : y = 3x^2 - 5x - 2$ kladná. Grafem této funkce je parabola, protínající osu *x* v bodech $x_1 = 2$ a $x_2 = -\dfrac{1}{3}$, která je otevřená směrem nahoru. Z grafu (2.a) je vidět, že funkce je kladná pro $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right) \cup (2, \infty)$.



Př. 1.a)



Př. 1.b)

b) Početní řešení :

Kvadratickou nerovnici $2.(1-x)^2 \le x-3$ nejprve upravíme do základního tvaru $2x^2 - 5x + 5 \le 0$. Z hodnoty diskriminantu (D = 25 – 40 = - 15) vyplývá, že kvadratický trojčlen nelze rozložit na součin kořenových činitelů. V tom případě je buď $x \in \mathbf{R}$, nebo $x \in \{\ \}$. Vyhovuje-li nerovnici libovolné reálné číslo, je řešením **R**, nevyhovuje-li nerovnici libovolné reálné číslo, je řešením $\{\ \}$. V našem případě je $x \in \{\ \}$.

Grafické řešení :

Levou stranu upravené nerovnice označíme $f : y = 2x^2 - 5x + 5$. Vyšetříme, pro která $x \in \mathbf{R}$ je funkce $f \le 0$. Vzhledem k tomu, že diskriminant $D < 0$, vyplývá z grafu (2.b), že $x \in \{\ \}$.

Vyšetřování definičních oborů

Připomeňme si, že definiční obor byl definován jako množina reálných čísel, pro která má daná funkce smysl. V případě určování definičního oboru konkrétní složené funkce (případně funkce vzniklé algebraickými operacemi složených funkcí) vycházíme z omezení, určených jednotlivými složkami složené funkce (případně jednotlivých složených funkcí). Na závěr určíme průnik získaných intervalů.

Podmínky, které je třeba brát v úvahu při určování definičních oborů :

- Funkce tvaru $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ je definovaná pro $g(x) \neq 0$,
- Funkce tvaru $y = \sqrt{f(x)}$ je definovaná pro $f(x) \ge 0$,
- Funkce tvaru $y = \log_a f(x)$ je definovaná pro $f(x) > 0$,
- Funkce tvaru $y = \mathrm{tg}(f(x))$ je definovaná pro $f(x) \neq (2k+1)\cdot\dfrac{\pi}{2}$,
- Funkce tvaru $y = \mathrm{cotg}(f(x))$ je definovaná pro $f(x) \neq k\pi$,
- Funkce tvaru $y = \arcsin(f(x))$ a $y = \arccos(f(x))$ je definovaná pro $-1 \le f(x) \le 1$.

Příklad 2.

Určete definiční obory funkcí: a) $f : y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{\sqrt{2x-5}}$, b) $g : y = -3\log(x^2 - 4) + 1$, c) $h : y = \arccos(2x-3)$,

d) $k : y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}} + \ln(x+3)$.

Řešení : a) Z definice odmocniny vyplývá $2x - 5 \ge 0$ a z definice zlomku plyne $\sqrt{2x-5} \neq 0$, takže $2x - 5 > 0$.

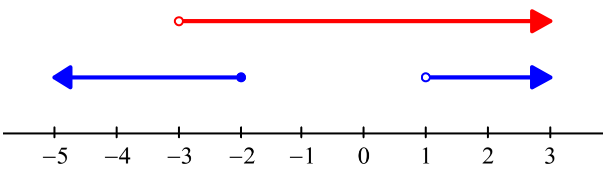
Odtud $D(f) = \left(\dfrac{5}{2}, \infty\right)$.

b) Z definice logaritmu plyne, že $x^2 - 4 > 0$. Řešením této kvadratické nerovnice dostaneme $D(g) = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

c) Z definice cyklometrických funkcí plyne $-1 \leq 2x - 3 \leq 1$. Řešením soustavy lineárních nerovnic $-1 \leq 2x - 3 \wedge 2x - 3 \leq 1$ dostaneme $D(h) = \langle 1, 2 \rangle$.

d) Výraz pod odmocninou je nezáporný pro $\dfrac{x+2}{x-1} \geq 0$ a pro argument logaritmické funkce platí $x + 3 > 0$.

$\dfrac{x+2}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2\rangle \cup (1, +\infty)$ a $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$.



Celkem tedy $D(k) = (-3, -2\rangle \cup (1, +\infty)$.

Cvičení : Určete definiční obor funkce

a) $y = \sqrt{3-x} + \arccos \dfrac{3-2x}{5}$, b) $y = \arccos \left(\dfrac{2}{x+1}\right)$, c) $y = \arcsin \dfrac{3-2x}{5} + \ln(x^2 + x - 6)$, d) $y = \ln \dfrac{3x+2}{7-x}$,

e) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}} + \ln(x+1)$, f) $y = \sqrt{x-1} + \dfrac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$, g) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}} + \ln(x+3)$,

h) $y = \ln \sqrt{3 - 2x - x^2} + \arccos \dfrac{3x+4}{2}$, i) $y = \sqrt{x^2 + x - 2} + 2\ln(x+3)$, j) $y = \sqrt{\ln(x-2)} + \dfrac{3x}{16 - 2^x}$.

Výsledky : a) $\langle -1,3 \rangle$, b) $(-\infty,-3\rangle \cup \langle 1,\infty)$, c) $(2,4\rangle$, d) $\left(-\dfrac{2}{3};7\right)$, e) $(-1;0) \cup (4;\infty)$, f) $\langle 1,3)$, g) $(-3;-2) \cup \langle 2;\infty)$,

h) $(3,0\rangle$, i) $(-3;-2) \cup (1;\infty)$, j) $(2,3) \cup (3,4) \cup (4,\infty)$.