2) INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

1) Pojem neurčitého integrálu

Je dána funkce $f(x)=x^2$ a naším úkolem je najít funkci $F(x)$ tak, aby platilo $F'(x)=f(x)$.

Zřejmě $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$, protože platí $\left[\dfrac{x^3}{3}\right]'=x^2$.

Platí však také $\left[\dfrac{x^3}{3}+1\right]'=x^2$, $\left[\dfrac{x^3}{3}-5\right]'=x^2$, …, a obecně $\left[\dfrac{x^3}{3}+c\right]'=x^2$, kde c je libovolná konstanta.

Def.: Funkce $F(x)$ se nazývá **primitivní** k funkci $f(x)$ na intervalu $(a,b)\subseteq R$, jestliže pro všechna x z tohoto intervalu platí $F'(x)=f(x)$.

Z úvodního příkladu je zřejmé, že má-li daná funkce $f(x)$ primitivní funkci, je takových funkcí nekonečně mnoho a liší se pouze konstantou.

Def. : Množinu všech primitivních funkcí $F(x)$ k funkci $f(x)$ na intervalu (a,b) nazýváme **neurčitým integrálem** funkce $f(x)$.

Píšeme $\int f(x)\,dx=F(x)+c$

Vlastnosti neurčitého integrálu

- Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu (a,b), pak k ní v tomto intervalu existuje alespoň jedna primitivní funkce a tedy i neurčitý integrál $\int f(x)\,dx$.

Pokud pro $x\in(a,b)$ existují integrály $\int f(x)\,dx$ a $\int g(x)\,dx$, platí :

- $\left[\int f(x)\,dx\right]'=f(x)$
- $\int c.f(x)\,dx=c.\int f(x)\,dx$, kde $c\neq 0$ je konstanta
- $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$

2) Základní neurčité integrály

I $\int dx = x + c$

II $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$

III $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ ($\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$)

IV $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

V $\int e^x dx = e^x + c$

VI $\int \sin x dx = -\cos x + c$

VII $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

VIII $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg\, x + c$

IX $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -co\, tg\, x + c$

X $\int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{A} + c$

XI $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm B}\right| + c$

XII $\int \frac{1}{A^2 + x^2} dx = \frac{1}{A} arctg \frac{x}{A} + c$

XIII $\int \frac{1}{A^2 - x^2} dx = \frac{1}{2A} \ln\left|\frac{A+x}{A-x}\right| + c$

XIV $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$

Integrace pomocí základních vzorců a úpravami integrované funkce

1) $\int\left(x^2+2x-\frac{3}{x^2}\right)dx=\int\left(x^2+2x-3x^{-2}\right)dx=\left|\text{vz.}2\right|=\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}-3\frac{x^{-1}}{-1}+c=\frac{x^3}{3}+x^2+\frac{3}{x}+c$

2) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)dx=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{3}}\right)dx=\left|\text{vz.}2\right|=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+c=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2}+c$

3) $\int\frac{(x+2)^2}{x^2}dx=\int\frac{x^2+4x+4}{x^2}dx=\int\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}+\frac{4}{x^2}\right)dx=\int\left(1+\frac{4}{x}+4x^{-2}\right)dx=\left|\text{vz.}2{,}3\right|=x+4\ln|x|+4\frac{x^{-1}}{-1}+c$

4) $\int\operatorname{tg}^2 x\,dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg}x-x+c$

5) $\int\frac{2}{x^2+9}dx=2\int\frac{1}{x^2+3^2}dx=\left|\text{vz.}12\right|=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+c$

6) $\int\frac{3}{x^2+4x+10}dx=3\int\frac{1}{x^2+4x+4+6}dx=3\int\frac{1}{(x+2)^2+6}dx=\left|\text{vz.}12\right|=\frac{3}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}}+c$

7) $\int\frac{4}{\sqrt{x^2-3}}dx=\left|\text{vz.}11\right|=4\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|+c$

8) $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-6x+12}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{(x-3)^2+3}}dx=\left|\text{vz.}11\right|=\ln\left|(x-3)+\sqrt{x^2-6x+12}\right|+c$

9) $\int\frac{3}{\sqrt{2-x^2}}dx=\left|\text{vz.}10\right|=3\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+c$

10) $\int\frac{1}{4-x^2}dx=\left|\text{vz.}13\right|=\frac{1}{2.2}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+c$

11) $\int\frac{5}{x^2-3}dx=-5\int\frac{1}{3-x^2}dx=\left|\text{vz.}13\right|=-\frac{5}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right|+c$

Integrace pomocí vzorce č.3

12) $\int\frac{2x}{x^2-5}dx=\ln\left|x^2-5\right|+c$

13) $\int\frac{2x^2}{x^3+2}dx=2\cdot\frac{1}{3}\int\frac{3x^2}{x^3+2}dx=\frac{2}{3}\ln\left|x^3+2\right|+c$

14) $\int\operatorname{tg}x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{-\sin x}{\cos x}dx=-\ln|\cos x|+c$

Integrace pomocí vzorce č.14

15) $\int\cos(3x+1)\,dx=\frac{1}{3}\sin(3x+1)+c$

16) $\int\sqrt{4x-3}\,dx=\int(4x-3)^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{4}\frac{(4x-3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{1}{6}\sqrt{(4x-3)^3}+c$

17) $\int e^{-2x}\,dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}+c$

3) Integrace substituční metodou

a) Substituce typu $t=\varphi(x)$

Věta : Nechť funkce $t=\varphi(x)$ má derivaci na intervalu (α,β) a zobrazuje ho na interval (a,b). Nechť funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu (a,b). Pak na intervalu (α,β) platí $\boxed{\int f(\varphi(x)).\varphi'(x).dx=\int f(t)\,dt}$, dosadíme-li do primitivní funkce na pravé straně $t=\varphi(x)$.

Integraci substituční metodou provádíme podle následujícího schématu :

$$\int f(\varphi(x)).\varphi'(x)\,dx=\left|\begin{array}{l}\text{subst.}: t=\varphi(x)\\ dt=\varphi'(x)dx\end{array}\right|=\int f(t)dt=F(t)+c=F(\varphi(x))+c$$

Za novou proměnnou t často volíme vnitřní složku složené funkce.

Př. : Substituční metodou vypočítejte integrál $\int\frac{2}{(4x+7)^2}dx$

Řešení : $$\int\frac{2}{(4x+7)^2}dx=\left|\begin{array}{l}t=4x+7\\ dt=4dx\\ dx=\frac{dt}{4}\end{array}\right|=\int\frac{2}{t^2}\frac{dt}{4}=\frac{1}{2}\int t^{-2}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-t}+C=-\frac{1}{8x+14}+C$$

b) Substituce typu $x=\varphi(t)$

Věta : Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu (a,b). Nechť funkce $\varphi(t)$ má nenulovou derivaci na intervalu (α,β) a zobrazuje ho na interval (a,b). Pak na intervalu (a,b) platí $\boxed{\int f(x).dx=\int f(\varphi(t)).\varphi'(t)\,dt}$, dosadíme-li do primitivní funkce na pravé straně $t=\varphi^{-1}(x)$, kde φ^{-1} je inverzní funkce k funkci φ.

Integraci substituční metodou provádíme podle následujícího schématu :

$$\int f(x).dx=\left|\begin{array}{l}subst.: x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t).dt\end{array}\right|=\int f(\varphi(t)).\varphi'(t)\,dt=F(t)+c=F(\varphi^{-1}(x))+c$$

Př.: Substituční metodou vypočítejte integrál $\int\frac{dx}{(4+x)\sqrt{x}}$.

Řešení : $$\int\frac{dx}{(4+x)\sqrt{x}}=\left|\begin{array}{l}x=t^2\\ dx=2tdt\end{array}\right|=\int\frac{2tdt}{(4+t^2)t}=2\int\frac{dt}{(4+t^2)}=2.\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+c=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{2}+c$$

4) Integrace metodou per partes

Jde o metodu, kterou používáme pro integraci součinu dvou funkcí na základě následující věty.

Věta : Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají derivaci na intervalu (a,b). Pak existuje-li integrál na pravé straně, platí

$$\boxed{\int u(x).v'(x)\,dx=u(x).v(x)-\int u'(x).v(x)\,dx}$$

Metoda má smysl, pokud umíme řešit integrál na pravé straně rovnosti.

Volbu funkcí u a v' je často výhodné provádět pomocí následujících pravidel :

- za nederivovanou funkci volíme toho činitele, kterého neumíme integrovat,
- umíme-li integrovat oba činitele, potom toho, který se derivací více zjednoduší.

Př. : Metodou per partes vypočítejte integrál $\int x^3 .\ln x dx$

Řešení :

$$\int x^3 \ln x dx = \left| \begin{matrix} v = \ln x,\ v' = \dfrac{1}{x} \\ u' = x^3,\ u = \dfrac{x^4}{4} \end{matrix} \right| = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^4}{4} dx = \frac{1}{4} x^4 \ln|x| - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \ln|x| - \frac{1}{16} x^4 + C$$

5) Integrace jednotlivých typů funkcí

a) Integrace jednoduchých racionálních lomených funkcí

Neryze lomenou racionální funkci vyjádříme vydělením jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce. Pokud má tato ryze lomená funkce tvar $\dfrac{A}{(ax+b)^n}$ nebo $\dfrac{A}{ax^2+bx+c}$, integrujeme ji pomocí některého ze vzorců 12,13,14 popřípadě 3.

$$\int \frac{x^2}{x^2+2} dx = (\text{dělíme}) = \int 1 - \frac{2}{x^2+2} dx = |\text{vz.}12| = x - 2\frac{1}{\sqrt{2}} \text{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + c$$

(jiný způsob výpočtu : $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+2} dx = \int \frac{x^2+2-2}{x^2+2} dx = \int \frac{x^2+2}{x^2+2} - \frac{2}{x^2+2} dx = \int 1 - \frac{2}{x^2+2} dx = \ldots$)

$$\int \frac{12x^3 - 13x^2 + 4x - 1}{4x+1} dx = (\text{dělíme}) = \int 3x^2 - 4x + 2 - \frac{3}{4x+1} dx = 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 2x - 3 \cdot \frac{1}{4} \ln|4x+1| + c =$$

$$= x^3 - 2x^2 + 2x - \frac{3}{4} \ln|4x+1| + c$$

$$\int \frac{2}{(3x-2)^4} dx = 2\int (3x-2)^{-4} dx = |\text{vz.}14| = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-2)^{-3}}{-3} + c = -\frac{2}{9(3x-2)^3} + c$$

$= \dfrac{1}{2} \ln|x^2 - 4x + 8| + \dfrac{5}{2} \text{arctg} \dfrac{x-2}{2} + C$ (úlohu je možné řešit též substitucí $t = 3x - 2$)

b) Integrace iracionálních funkcí

- Integrál iracionální funkce $\boxed{\int R(x; \sqrt[n]{ax+b})\ dx}$ řešíme substitucí $\boxed{t^n = ax+b}$.

Př. : $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt{x+2}} dx$

Řešení : $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt{x+2}} dx = \left| \begin{matrix} t^2 = x+2 \\ 2tdt = dx \end{matrix} \right| = \int \frac{t}{1+t} 2tdt = 2\int \frac{t^2}{1+t} dt = (\text{dělíme}) = 2\int t - 1 + \frac{1}{t+1} dt =$

$$= 2\frac{1}{2} t^2 - 2t + 2\ln|t+1| + C = x + 2 - 2\sqrt{x+2} + 2\ln\left|\sqrt{x+2} + 1\right| + C$$

- Integrál iracionální funkce $\boxed{\int R(x;\sqrt[n_1]{ax+b}),\sqrt[n_2]{ax+b}),...,\sqrt[n_k]{ax+b})\,dx}$ řešíme substitucí $\boxed{t^s = ax+b}$, kde s je nejmenší společný násobek čísel $n_1, n_2, ..., n_k$.

Př. : $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx$

Řešení : $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx = \begin{vmatrix} t^6 = x \\ 6t^5 dt = dx \end{vmatrix} = \int \frac{6t^5}{\sqrt{t^6}(1+\sqrt[3]{t^6})}dt = 6\int \frac{t^5}{t^3(1+t^2)}dt = 6\int \frac{t^2}{1+t^2}dt = \text{(dělíme)}$

$= 6\int 1dt - 6\int \frac{1}{t^2+1}dt = 6t - 6\operatorname{arctg} t + C = 6\sqrt[6]{x} - 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C$

c) Integrace goniometrických funkcí

Je-li možné integrovanou goniometrickou funkci upravit na tvar

- $\boxed{R(\sin x).\cos x}$ řešíme integrál substitucí $\boxed{t = \sin x}$,
- $\boxed{R(\cos x).\sin x}$ řešíme integrál substitucí $\boxed{t = \cos x}$.

(pro převod jedné funkce na druhou používáme vztah $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$)

Př. : $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$

Řešení : $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x.\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\sin x dx = \begin{vmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{vmatrix} = -\int \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)}dt =$

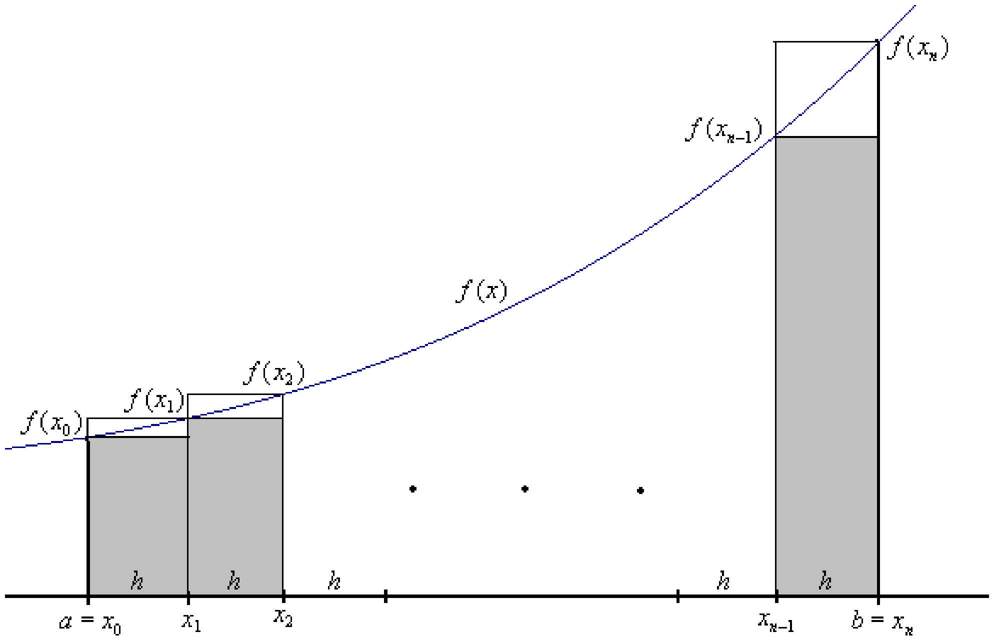
$= \int \frac{t^2-1}{t^2+1}dt = \text{(dělíme)} = \int 1dt + \int \frac{-2}{t^2+1}dt = t - 2\operatorname{arctg}(t) + C = \cos x - 2\operatorname{arctg}(\cos x) + C$

Určitý integrál

1) Riemannův určitý integrál

Nechť $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$, která je zde nabývá kladných hodnot a je rostoucí. Graf této funkce, osa x a přímky $x=a$, $x=b$ ohraničují rovinný obrazec.

Rozdělme interval $\langle a,b\rangle$ na n stejných dílků délky h.



Nyní určíme funkční hodnoty v krajních bodech jednotlivých intervalů a vytvoříme součty :

$s_n = f(x_0).h + f(x_1).h + f(x_2).h + ... + f(x_{n-1}).h$ **dolní součet**,

$S_n = f(x_1).h + f(x_2).h + f(x_3).h + ... + f(x_n).h$ **horní součet**.

Čísla s_n a S_n představují součet obsahů obdélníků o základnách délky h a výškách daných hodnotami v krajních bodech intervalů. Platí zřejmě $s_n \le S_n$.

Budeme-li zvyšovat počet dělících bodů n, budou se čísla s_n a S_n k sobě přibližovat.

Jestliže $n \to \infty$, existují limity $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ a jejich hodnoty jsou si rovny.

Společnou hodnotu těchto limit nazýváme **Riemannův určitý integrál** funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a,b\rangle$ a značíme ho $\int_a^b f(x)\,dx$.

Z geometrického hlediska představuje $\int_a^b f(x)\,dx$ obsah obrazce, ohraničeného grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x=a$, $x=b$.

Vlastnosti určitých integrálů

- $\int_a^b c.f(x)\,dx = c.\int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, kde $c \in (a,b)$

Základní věta integrálního počtu, věta Leibniz-Newtonova

Věta : Je-li $F(x)$ primitivní funkce ke spojité funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a,b \rangle$, pak

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}.$$

Př. : $\int_1^2 (x^3 - x + 1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{4}{2} + 2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{13}{4}$

Výpočet určitého integrálu metodou per partes

$$\int_a^b u.v'\,dx = [u.v]_a^b - \int_a^b u'.v\,dx$$

Př.: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \begin{vmatrix} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{vmatrix} = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0 + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1$

Výpočet určitého integrálu substituční metodou

$$\int_a^b f(\varphi(x)).\varphi'(x)\,dx = \begin{vmatrix} \text{subst} : t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)dx \\ \alpha = \varphi(a), \beta = \varphi(b) \end{vmatrix} = \int_\alpha^\beta f(t)dt = [F(t)]_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha)$$

Př.:

$$\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx = \begin{vmatrix} \text{subst} : t^2 = x \\ 2tdt = dx \\ x = 4 \Rightarrow t = 2 \\ x = 9 \Rightarrow t = 3 \end{vmatrix} = \int_2^3 \frac{1}{t(t^2+1)}2tdt = 2\int_2^3 \frac{1}{t^2+1}dt = 2[\operatorname{arctg} t]_2^3 = 2(\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2)$$

2) Geometrické aplikace určitého integrálu

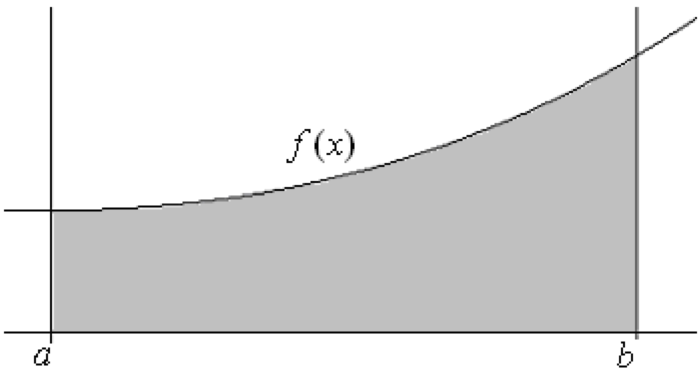
- **<u>Obsah rovinné oblasti</u>**

Pří výpočtu obsahu rovinné oblasti mohou nastat následující 3 případy :

a) Funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ a platí $f(x) \geq 0$. Obsah obrazce, ohraničeného grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ se vypočítá pomocí vzorce

$$\boxed{P = \int_a^b f(x)\,dx}.$$

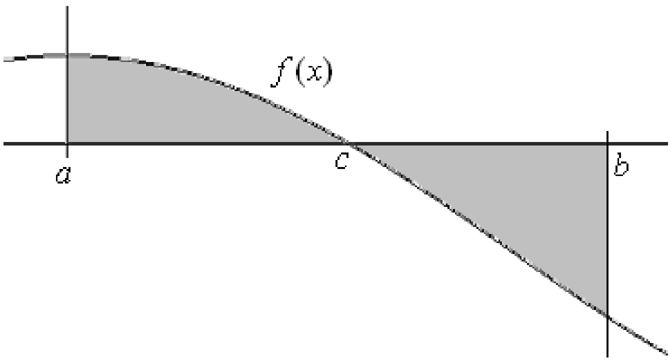
Obr. :



b) Funkce $f(x)$ je spojitá a mění na intervalu $\langle a,b\rangle$ znaménko. Obsah příslušného obrazce se vypočítá pomocí vzorce

$$\boxed{P = \int_a^b |f(x)|\,dx}.$$

Obr. :

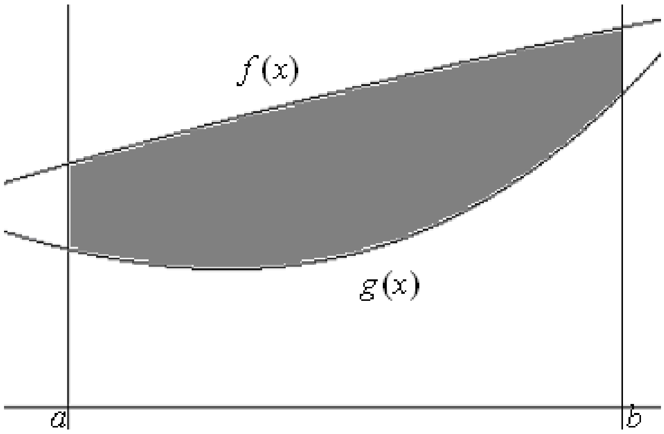


Při výpočtu určíme průsečíky funkce $f(x)$ s osou x a stanovíme intervaly, ve kterých je $f(x) > 0$ a ve kterých $f(x) < 0$. Na každém z těchto intervalů pak počítáme určitý integrál, přičemž v intervalech, ve kterých je funkce záporná, změníme znaménko funkce $f(x)$.

c) Rovinná oblast je shora ohraničená funkcí $f(x)$, zdola funkcí $g(x)$ a dále přímkami $x = a$, $x = b$. Obsah příslušného obrazce se vypočítá pomocí vzorce

$$\boxed{P = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx}.$$

Obr. :



- **<u>Objem rotačního tělesa</u>**

Objem tělesa, které vznikne rotací oblasti, ohraničené grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ kolem osy *x,* se vypočítá pomocí vzorce

$$\boxed{V = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx}.$$