

INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

1) Pojem neurčitého integrálu

Je dána funkce $f(x) = x^2$ a naším úkolem je najít funkci $F(x)$ tak, aby platilo $F'(x) = f(x)$.

Zřejmě $F(x) = \frac{x^3}{3}$, protože platí $\left[\frac{x^3}{3}\right]' = x^2$.

Platí však také $\left[\frac{x^3}{3} + 1\right]' = x^2$, $\left[\frac{x^3}{3} - 5\right]' = x^2$, ..., a obecně $\left[\frac{x^3}{3} + c\right]' = x^2$, kde c je libovolná konstanta.

Def.: Funkce $F(x)$ se nazývá **primitivní** k funkci $f(x)$ na intervalu I , jestliže pro všechna x z tohoto intervalu platí $F'(x) = f(x)$.

Z úvodního příkladu je zřejmé, že má-li daná funkce $f(x)$ primitivní funkci, je takových funkcí nekonečně mnoho a liší se pouze konstantou.

Def. : Množinu všech primitivních funkcí $F(x)$ k funkci $f(x)$ na intervalu I nazýváme **neurčitým integrálem** funkce $f(x)$.

$$\text{Píšeme } \int f(x) dx = F(x) + c$$

Vlastnosti neurčitého integrálu

- Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu I , pak k ní v tomto intervalu existuje primitivní funkce a tedy i neurčitý integrál $\int f(x) dx$.
- $\left[\int f(x) dx\right]' = f(x)$
- $\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$, kde $c \neq 0$ je konstanta
- $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

Základní neurčité integrály

$$\text{I} \quad \int dx = x + c$$

$$\text{II} \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$\text{III} \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad \left(\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c \right)$$

$$\text{IV} \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\text{V} \quad \int e^x dx = e^x + c$$

$$\text{VI} \quad \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\text{VII} \quad \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\text{VIII} \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$\text{IX} \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c$$

$$\text{X} \quad \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$$

Příklady na integraci pomocí základních vzorců a úpravami integrované funkce

$$1) \quad \int \left(x^2 + 2x - \frac{3}{x^2} \right) dx = \int (x^2 + 2x - 3x^{-2}) dx = |\text{vz.2}| = \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 3 \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{3}{x} + c$$

$$2) \quad \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[3]{x}} \right) dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{3}} \right) dx = |\text{vz.2}| = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^2} + c$$

$$3) \quad \int \frac{(x+2)^2}{x^2} dx = \int \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2} dx = \int \left(1 + \frac{4}{x} + 4x^{-2} \right) dx = |\text{vz.2,3}| = x + 4 \ln|x| + 4 \frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$4) \quad \int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x - x + c$$

Integrace pomocí vzorce č.3

$$5) \quad \int \frac{2x}{x^2-5} dx = \ln|x^2-5| + c$$

$$6) \quad \int \frac{2x^2}{x^3+2} dx = 2 \cdot \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3+2} dx = \frac{2}{3} \ln|x^3+2| + c$$

$$7) \quad \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c$$

Integrace pomocí vzorce č.10

$$8) \int \cos(3x+1) dx = \frac{1}{3} \sin(3x+1) + c$$

$$9) \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} + c$$

$$10) \int \sqrt{4x-3} dx = \int (4x-3)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{4} \frac{(4x-3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{6} \sqrt{(4x-3)^3} + c$$

2) Integrace substituční metodou

Integraci substituční metodou provádíme podle následujícího schématu :

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \left| \begin{array}{l} \text{subst.: } t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) dx \end{array} \right| = \int f(t) dt = F(t) + c = F(\varphi(x)) + c$$

Za novou proměnnou t často volíme vnitřní složku složené funkce.

3) Integrace metodou per partes

Jde o metodu, kterou používáme pro integraci součinu dvou funkcí na základě rovnosti :

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

kde $u = u(x)$ a $v = v(x)$ jsou funkce se spojitými derivacemi $u'(x)$ a $v'(x)$ v intervalu **I**.

Metoda má smysl, pokud umíme řešit integrál na pravé straně rovnosti.

Volbu funkcí u a v' provádíme pomocí následujících pravidel :

- za nederivovanou funkci volíme toho činitele, kterého neumíme integrovat,
- umíme-li integrovat oba činitele, potom toho, který se derivací více zjednoduší.

4) Integrace jednotlivých typů funkcí

a) Integrace jednoduchých racionálních lomených funkcí

Jde o integrály tvaru $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$. Neryze lomenou racionální funkci vyjádříme vydělením jako součet

polynomu a ryze lomené racionální funkce. Pokud má ryze lomená funkce tvar $\frac{A}{(ax+b)^n}$, integrujeme

ji pomocí vzorce 10. Je-li možné ji upravit tak, aby čitatel zlomku byl derivací jmenovatele, použijeme vzorec 3.

b) Integrace iracionálních funkcí

- Integrál iracionální funkce $\int R(x; \sqrt[n]{ax+b}) dx$ řešíme substitucí $t^n = ax+b$.

c) Integrace goniometrických funkcí

Je-li možné integrovanou goniometrickou funkci upravit na tvar

- $R(\sin x) \cdot \cos x$ řešíme integrál substitucí $t = \sin x$,
- $R(\cos x) \cdot \sin x$ řešíme integrál substitucí $t = \cos x$.

(při úpravách integrované funkce často používáme vztah $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$)

5) Riemannův určitý integrál

Riemannův určitý integrál funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$ značíme symbolem $\int_a^b f(x) dx$.

Z geometrického hlediska představuje $\int_a^b f(x) dx$ obsah obrazce, ohraničeného grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$.

Vlastnosti určitých integrálů

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \text{ kde } c \in (a, b)$$

Základní věta integrálního počtu, věta Leibniz-Newtonova.

Věta : Je-li $F(x)$ primitivní funkce ke spojitě funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Výpočet určitého integrálu metodou per partes

$$\int_a^b u \cdot v' dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v dx$$

Výpočet určitého integrálu substituční metodou (je nutné přepočítat meze integrálu)

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \left. \begin{array}{l} \text{subst : } t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) dx \\ \alpha = \varphi(a), \beta = \varphi(b) \end{array} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = [F(t)]_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha)$$

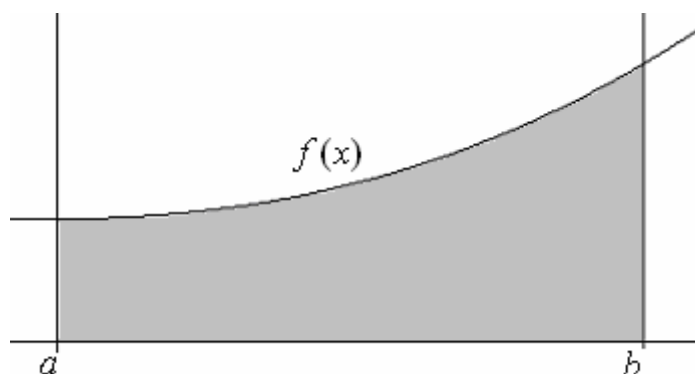
6) Geometrické aplikace určitého integrálu

a) Obsah rovinné oblasti

Při výpočtu obsahu rovinné oblasti mohou nastat následující 3 případy :

- Funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí $f(x) \geq 0$. Obsah obrazce, ohraničeného grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ se vypočítá pomocí vzorce

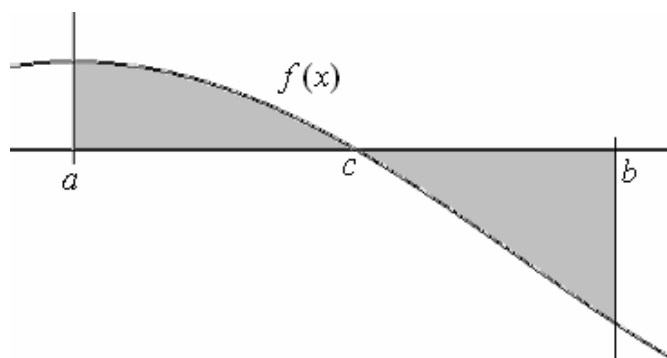
$$P = \int_a^b f(x) dx.$$



Obrázek 1

- Funkce $f(x)$ je spojitá a mění na intervalu $\langle a, b \rangle$ znaménko. Obsah příslušného obrazce se vypočítá pomocí vzorce

$$P = \int_a^b |f(x)| dx.$$

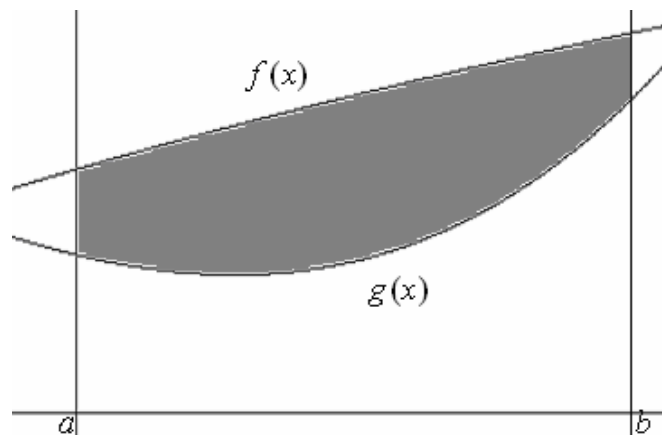


Obrázek 2

Při výpočtu najdeme průsečíky funkce $f(x)$ s osou x a určíme intervaly, ve kterých platí $f(x) > 0$, a ve kterých $f(x) < 0$. Na každém z těchto intervalů pak počítáme určitý integrál, přičemž v intervalech, ve kterých je funkce záporná, změníme znaménko integrálu.

- Rovinná oblast je shora ohraničená funkcí $f(x)$, zdola funkcí $g(x)$ a dále přímkami $x = a$, $x = b$. Obsah příslušného obrazce se vypočítá pomocí vzorce

$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$



Obrázek 3

b) Objem rotačního tělesa

Objem tělesa, které vznikne rotací oblasti, ohraničené grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ kolem osy x , se vypočítá pomocí vzorce

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

