Na střední škole se pracuje s vektorem jako s orientovanou úsečkou nebo jako s fyzikální veličinou, která má určitou velikost, směr a orientaci. V lineární algebře budeme chápat vektory jako uspořádané *n*-tice čísel, které jsou prvky tzv. vektorového prostoru.

Číselné (algebraické) vektory

Vektor

Číselným vektorem $\vec{\mathbf{a}}$ nazýváme uspořádanou množinu $n \in \mathbf{N}$ reálných čísel $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Píšeme $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Čísla $a_1, a_2, ..., a_n$ nazýváme souřadnice vektoru, číslo n dimenzí nebo rozměrem vektoru.

Všechny operace s vektory, které jste na střední škole prováděli s vektory dimenze 2 a 3, je možné rozšířit i na vektory dimenze n.

Operace s vektory

Součtem vektorů $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\vec{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, ..., b_n)$, které mají stejnou dimenzi, je vektor $\vec{c}$ téže dimenze, definovaný vztahem

$$\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n).$$

Součinem vektoru $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ a čísla $k \in \mathbf{R}$ je vektor

$$k.\vec{\mathbf{a}} = (k.a_1, k.a_2, ..., k.a_n).$$

Opačným vektorem k vektoru $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ nazýváme vektor

$$-\vec{\mathbf{a}} = (-a_1, -a_2, ..., -a_n).$$

Rozdílem vektorů $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\vec{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ je vektor

$$\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}} + (-\vec{\mathbf{b}}) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, ..., a_n - b_n).$$

Nulovým vektorem nazýváme vektor $\vec{\mathbf{o}} = (0, 0, ..., 0)$.

Skalární součin vektorů $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\vec{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ je číslo

$$\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + ... + a_n.b_n.$$

Příklad: Vypočtěte vektor $\vec{\mathbf{a}} = 3\vec{\mathbf{b}} - 2\vec{\mathbf{c}}$ a skalární součin $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}$, jsou-li zadané vektory $\vec{\mathbf{b}} = (2, -3, 5)$, $\vec{\mathbf{c}} = (-1, 2, 3)$.

Řešení : $\vec{\mathbf{a}} = 3(2, -3, 5) - 2(-1, 2, 3) = (6, -9, 15) - (-2, 4, 6) = (8, -13, 9)$,

$\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = (8, -13, 9).(2, -3, 5) = 8.2 + (-13).(-3) + 9.5 = 16 + 39 + 45 = 100$.

Lineární vektorový prostor

Množina n-rozměrných vektorů, na níž je definováno sečítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem, se nazývá n-rozměrný lineární vektorový prostor $\mathbf{V}_n$, jestliže do ní společně s libovolnými vektory $\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}\in\mathbf{V}_n$ patří také vektory $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$ a $k.\vec{\mathbf{a}}$ ($k\in\mathbf{R}$ je libovolná konstanta).

Lineární kombinace vektorů

Uvažujme vektory $\vec{\mathbf{v}}_1,\vec{\mathbf{v}}_2,\dots,\vec{\mathbf{v}}_k\in\mathbf{V}_n$.
Každý vektor $\vec{\mathbf{v}}=c_1.\vec{\mathbf{v}}_1+c_2.\vec{\mathbf{v}}_2+\dots+c_k.\vec{\mathbf{v}}_k$, kde $c_i\in\mathbf{R}$ jsou konstanty, nazýváme lineární kombinací daných k vektorů.

Například vektor $\vec{\mathbf{v}}=(-8{,}12{,}2)$ je lineární kombinací vektorů $\vec{\mathbf{v}}_1=(2{,}3{,}1)$ a $\vec{\mathbf{v}}_2=(4{,}-2{,}0)$.
Existují totiž konstanty $c_1=2$ a $c_2=-3$ tak, že platí :

$$\vec{\mathbf{v}}=2.\vec{\mathbf{v}}_1-3\vec{\mathbf{v}}_2=2(2{,}3{,}1)-3(4{,}-2{,}0)=(4{,}6{,}2)-(12{,}-6{,}0)=(-8{,}12{,}2).$$

Návod, jak tyto konstanty najít, dává následující příklad.

Příklad: Vyjádřete vektor $\vec{\mathbf{v}}=(3{,}1)$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{\mathbf{v}}_1$ a $\vec{\mathbf{v}}_2$, kde $\vec{\mathbf{v}}_1=(1{,}2)$, $\vec{\mathbf{v}}_2=(1{,}1)$.
Řešení : Podle definice musíme najít (pokud existují) taková reálná čísla c_1,c_2, pro která platí $\vec{\mathbf{v}}=c_1.\vec{\mathbf{v}}_1+c_2.\vec{\mathbf{v}}_2$. Po dosazení souřadnic vektorů $\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{v}}_1,\vec{\mathbf{v}}_2$ do této rovnice dostaneme $(3{,}1)=c_1.(1{,}2)+c_2(1{,}1)$. Porovnáním příslušných souřadnic na obou stranách rovnice vznikne soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

$$\begin{array}{rcrcl} c_1 & + & c_2 & = & 3 \\ 2c_1 & + & c_2 & = & 1 \end{array}$$

Jejím řešením jsou konstanty $c_1=-2,\ c_2=5$.

Závislost a nezávislost vektorů

Je-li možné aspoň jeden z vektorů $\vec{\mathbf{v}}_1,\vec{\mathbf{v}}_2,\dots,\vec{\mathbf{v}}_k\in\mathbf{V}_n$ vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů, říkáme, že vektory $\vec{\mathbf{v}}_1,\vec{\mathbf{v}}_2,\dots,\vec{\mathbf{v}}_k$ jsou lineárně závislé.
Není-li možné žádný z vektorů $\vec{\mathbf{v}}_1,\vec{\mathbf{v}}_2,\dots,\vec{\mathbf{v}}_k$ vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů, říkáme, že tyto vektory jsou lineárně nezávislé.

Poznámka : Nenulové vektory $\vec{\mathbf{v}}_1,\vec{\mathbf{v}}_2,\dots,\vec{\mathbf{v}}_k\in\mathbf{V}_n$ jsou lineárně nezávislé, platí-li rovnost $c_1.\vec{\mathbf{v}}_1+c_2.\vec{\mathbf{v}}_2+\dots+c_k.\vec{\mathbf{v}}_k=\vec{\mathbf{o}}$ jen pro $c_1=c_2=\dots=c_k=0$. Pokud uvedená rovnost platí, přičemž aspoň jedna konstanta c_i je různá od nuly, jsou vektory $\vec{\mathbf{v}}_1,\vec{\mathbf{v}}_2,\dots,\vec{\mathbf{v}}_k\in V_n$ lineárně závislé. Dva vektory $\vec{\mathbf{v}}_1,\vec{\mathbf{v}}_2$ jsou zřejmě lineárně závislé, právě když platí $\vec{\mathbf{v}}_1=k.\vec{\mathbf{v}}_2$.

Příklad: Rozhodněte, zda jsou vektory $\vec{\mathbf{v}}_1 = (-1,-2,0)$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = (3,0,1)$, $\vec{\mathbf{v}}_3 = (2,-1,1)$ lineárně závislé nebo lineárně nezávislé.

Řešení : Pokud najdeme konstanty c_1, c_2, c_3, z nichž alespoň jedna je různá od nuly, pro které platí rovnost $c_1.\vec{\mathbf{v}}_1 + c_2.\vec{\mathbf{v}}_2 + c_3.\vec{\mathbf{v}}_3 = \vec{\mathbf{o}}$, znamená to, že zadané vektory jsou lineárně závislé. Pokud tato rovnost bude platit jen pro $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, jsou vektory lineárně nezávislé.

Po dosazení souřadnic daných vektorů dostaneme rovnici

$$c_1.(-1,-2,0) + c_2.(3,0,1) + c_3.(2,-1,1) = (0,0,0)\,.$$

Porovnáním souřadnic vektorů na obou stran rovnice vznikne soustava tří rovnic o tří neznámých

$$\begin{array}{rcrcrcl} -c_1 & + & 3c_2 & + & 2c_3 & = & 0 \\ -2c_1 & & & - & c_3 & = & 0\,. \\ & & c_2 & + & c_3 & = & 0 \end{array}$$

Soustavy má jediné řešení $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Dané vektory jsou proto lineárně nezávislé.

V prostoru $\mathbf{V}_n$ může být maximálně n lineárně nezávislých vektorů. Tedy každá soustava $n+1$ vektorů prostoru $\mathbf{V}_n$ bude lineárně závislá. Na základě této skutečnosti budeme definovat maximální skupinu lineárně nezávislých vektorů daného vektorového prostoru a nazveme ji bází.

Báze vektorového prostoru

Bází vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$ nazýváme každou skupinu n lineárně nezávislých vektorů $\vec{\mathbf{v}}_i \in \mathbf{V}_n$.

Každý vektor prostoru $\mathbf{V}_n$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze.

Vektory $\vec{\mathbf{v}}_1 = (1,0,0)$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = (0,1,0)$, $\vec{\mathbf{v}}_3 = (0,0,1)$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbf{V}_3$, neboť daná trojice vektorů je zřejmě lineárně nezávislá. Každý další vektor z tohoto prostoru by se dal vytvořit jako lineární kombinace vektorů $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3$ (např. $\vec{\mathbf{u}} = (2,-3,1) = 2.\vec{\mathbf{v}}_1 - 3.\vec{\mathbf{v}}_2 + \vec{\mathbf{v}}_3$).