Příklad 1: Jsou dány vektory $\vec{\mathbf{a}} = (2,1,3,0)$ a $\vec{\mathbf{b}} = (-1,2,-2,4)$. Vypočtěte $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}$.

Řešení: Součtem vektorů je podle definice vektor $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$, tedy pro zadané vektory je $\vec{\mathbf{c}} = \left(2 + (-1), 1 + 2, 3 + (-2), 0 + 4\right) = (1, 3, 1, 4)$.

Podobně

$\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, ..., a_n - b_n) \Rightarrow \vec{\mathbf{d}} = \left(2 - (-1), 1 - 2, 3 - (-2), 0 - 4\right) = (3, -1, 5, -4)$.

Výsledkem skalárního součinu je číslo, které dostaneme sečtením součinů souřadnic $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + ... + a_n.b_n = 2.(-1) + 1.2 + 3.(-2) + 0.4 = -6$.

Příklad 2: Určete vektor $\vec{\mathbf{v}} = 2\vec{\mathbf{a}} + 3\vec{\mathbf{b}}$, je-li $\vec{\mathbf{a}} = (3, -5, 1)$ a $\vec{\mathbf{b}} = (0, 2, 4)$.

Řešení: Vektory násobíme číslem tak, že vynásobíme všechny jeho souřadnice. Souřadnice vektoru $\vec{\mathbf{a}}$ dvěma, souřadnice vektoru $\vec{\mathbf{b}}$ třemi. Potom $\vec{\mathbf{v}} = (6, -10, 2) + (0, 6, 12) = (6, -4, 14)$.

Příklad 3: Vypočtete skalární součin $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}$, jsou-li $\vec{\mathbf{a}} = \left(\frac{1}{4}, 2, -\frac{1}{2}, 3, 0\right)$, $\vec{\mathbf{b}} = \left(2, \frac{1}{2}, 4, 0, -2\right)$.

Řešení: $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = \frac{1}{4} \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) = \frac{1}{2} + 1 - 2 = -\frac{1}{2}$.

Příklad 4: Napište vektor $\vec{\mathbf{v}}$, který je lineární kombinací vektorů $\vec{\mathbf{v}}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = (3, 1, -4)$, $\vec{\mathbf{v}}_3 = (0, 1, 2)$, jsou-li koeficienty lineární kombinace $k_1 = 2$, $k_2 = -2$, $k_3 = -3$.

Řešení: Lineární kombinací vektorů je vektor, který dostaneme, když zadané vektory vynásobíme příslušnými koeficienty a sečteme.

$\vec{\mathbf{v}} = k_1.\vec{\mathbf{v}}_1 + k_2.\vec{\mathbf{v}}_2 + k_3.\vec{\mathbf{v}}_3$

$\vec{\mathbf{v}} = 2 \cdot (1, -1, 1) + (-2) \cdot (3, 1, -4) + (-3) \cdot (0, 1, 2) = (2, -2, 2) + (-6, -2, 8) + (0, -3, -6) = (-4, -7, 4)$.

Příklad 5: Vyjádřete vektor $\vec{\mathbf{v}}$, jako lineární kombinaci vektorů $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3$, je-li $\vec{\mathbf{v}} = (2, 4, 1)$, $\vec{\mathbf{v}}_1 = (3, 1, 2)$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = (-1, 2, 1)$, $\vec{\mathbf{v}}_3 = (0, 2, 0)$.

Řešení: Naším úkolem je najít konstanty k_1, k_2, k_3, aby platilo $\vec{\mathbf{v}} = k_1.\vec{\mathbf{v}}_1 + k_2.\vec{\mathbf{v}}_2 + k_3.\vec{\mathbf{v}}_3$.

Konkrétně $(2,4,1) = k_1.(3,1,2) + k_2.(-1,2,1) + k_3.(0,2,0)$. Tento vztah rozepíšeme pro jednotlivé souřadnice:

$$\begin{aligned} 2 &= 3k_1 - k_2 \\ 4 &= k_1 + 2k_2 + 2k_3 \\ 1 &= 2k_1 + k_2 \end{aligned}$$

Vzniklou soustavu tří rovnic pro neznámé k_1, k_2, k_3 můžeme řešit např. metodou dosazovací.

Z první rovnice vyjádříme k_2 a dosadíme do dalších dvou rovnic:

$$k_2 = 3k_1 - 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 4 &= k_1 + 2(3k_1 - 2) + 2k_3 \\ 1 &= 2k_1 + 3k_1 - 2 \end{aligned}$$

Po úpravě

$$\begin{aligned} 8 &= 7k_1 + 2k_3 \\ 3 &= 5k_1 \end{aligned}$$

Z poslední rovnice $k_1 = \frac{3}{5}$. Dosadíme do předcházející rovnice a postupně vypočítáme k_3.

$$2k_3 = 8 - 7k_1$$

$$2k_3 = 8 - \frac{21}{5}$$

$$2k_3 = \frac{19}{5} \quad \Leftrightarrow \quad k_3 = \frac{19}{10} .$$

Zbývá $k_2 = 3k_1 - 2 = \frac{9}{5} - 2 = -\frac{1}{5}$.

Vektor $\vec{\mathbf{v}}$ bude lineární kombinací zadaných vektorů $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3$ s koeficienty $k_1 = \frac{3}{5}$, $k_2 = -\frac{1}{5}$, $k_3 = \frac{19}{10}$.