Vyšetřování průběhu funkce

Při vyšetřování průběhu funkce většinou postupujeme podle následujících bodů :

1) Určení definičního oboru a bodů nespojitosti.
2) Určení průsečíků s osami, vyšetření, kde je funkce kladná příp. záporná a vlastností funkce (sudost, lichost, periodičnost, atd.). Navíc můžeme zjistit chování funkce v krajních bodech definičního oboru a v bodech nespojitosti.
3) Vyšetření monotónnosti funkce a určení lokálních extrémů.
4) Vyšetření konvexnosti a konkávnosti, určení inflexních bodů.
5) Určení asymptot grafu funkce.
6) Vytvoření tabulky význačných hodnot a načrtnutí grafu funkce.

Při kreslení grafu nejprve vyznačíme do souřadnicové soustavy význačné body funkce, tedy body nespojitosti, průsečíky s osami, body lokálních extrémů a inflexní body. Poté zakreslíme asymptoty grafu funkce. Na závěr načrtneme graf funkce, přičemž dbáme, aby splňoval všechny zjištěné vlastnosti, tj. polohu nad (pod) osou x, monotónnost, konvexnost a konkávnost, a aby se přibližoval k asymptotám ze správné strany.

Příklad : Vyšetřete průběh funkce $f: y = x^3 + 6x^2 + 9x$.

Řešení : $D(f) = \mathbf{R}$,

$f(-x) = (-x)^3 + 6.(-x)^2 + 9.(-x) = -x^3 + 6x^2 - 9x \neq \pm f(x) \Rightarrow$ funkce f není sudá ani lichá.

Zjistíme chování funkce v krajních bodech definičního oboru :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3 + 6x^2 + 9x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[x^3.\left(1 + \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}\right)\right] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^3 + 6x^2 + 9x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[x^3.\left(1 + \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}\right)\right] = +\infty.$$

Průsečík s osou y : $x = 0 \Rightarrow y = 0$, $P_y = [0, 0]$.

Průsečíky s osou x získáme řešením rovnice $x^3 + 6x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow x.(x+3)^2 = 0$.

Řešení rovnice je $x = 0 \vee x = -3$, tedy $P_x = [-3, 0]$ a $[0, 0]$.

Pro $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 0)$ je $f(x) < 0$ a pro $x \in (0, +\infty)$ je $f(x) > 0$.

Při vyšetřování monotónnosti a lokálních extrémů určíme nejprve první derivaci

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 3.(x^2 + 4x + 3) = 3.(x+3).(x+1)$$

a stacionární body : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -1$.

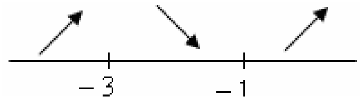
Body, ve kterých není derivace definována, funkce nemá.

Na získaných třech intervalech vyšetříme monotónnost funkce :

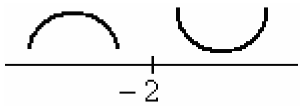
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3.(x+3).(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$,

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3.(x+3).(x+1) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, -1)$.

Tedy funkce je rostoucí v intervalech $(-\infty, -3)$ a $(-1, +\infty)$, klesající v intervalu $(-3, -1)$.
Lokální maximum má v bodě $x = -3$, $f(-3) = 0$ a lokální minimum v bodě $x = -1$, $f(-1) = -4$.



Pro vyšetření konvexity a konkávity vypočítáme druhou derivaci a najdeme její nulové body :
$f''(x) = 6x + 12 = 6.(x+2) \Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.
Na získaných dvou intervalech vyšetříme konvexitu a konkávitu :
$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > -2$ a $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < -2$, tedy pro $x \in (-\infty, -2)$ je funkce konkávní, pro $x \in (-2, +\infty)$ je funkce konvexní.
Inflexní bod nastává v bodě $x = -2$ a má souřadnice $[-2, f(-2)]$.



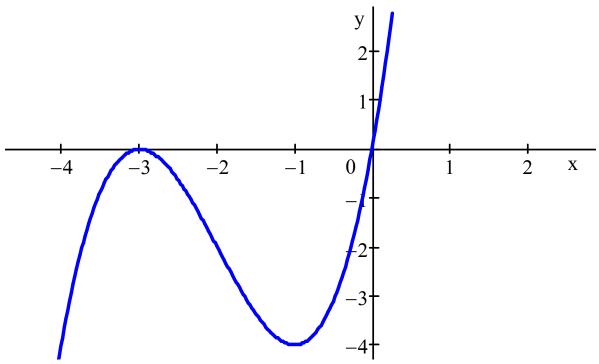
Asymptoty bez směrnice neexistují, protože $D(f) = \mathbf{R}$ a funkce je všude spojitá. Asymptoty se směrnicí graf funkce také nemá , protože

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} (x^2 + 6x + 9) = \lim_{x\to\pm\infty} \left[x^2 . \left(1 + \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} \right) \right] = +\infty$$

Tabulka význačných hodnot :

x	0	-3	-2	-1
y	0	0	-2	-4

Na základě všech zjištěných vlastností funkce načrtneme její graf :



Příklad : Vyšetřete průběh funkce $g : y = \dfrac{x+2}{x^3}$.

Řešení : Funkce $y = \dfrac{x+2}{x^3}$ má definiční obor $D(g) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Funkce není ani sudá ani lichá.
Zjistíme chování funkce v krajních bodech definičního oboru :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0,$$

a v bodě nespojitosti $\lim_{x\to0^+} \dfrac{x+2}{x^3} = +\infty$, $\lim_{x\to0^-} \dfrac{x+2}{x^3} = -\infty$.

Průsečík s osou y funkce nemá ($x = 0 \notin D(g)$).

Průsečík s osou x získáme řešením rovnice $\frac{x+2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Tedy $P_x = [-2, 0]$.

Pro $x \in (-\infty, -2)$ je $f(x) > 0$ a pro $x \in (-2, 0) \cup (0, +\infty)$ je $f(x) < 0$.

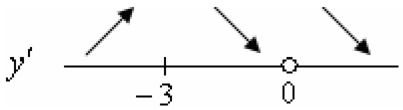
Pro výpočet monotónnosti a lokálních extrémů určíme první derivaci

$$f'(x) = \frac{x^3 - (x+2).3x^2}{x^6} = \frac{-2x-6}{x^6} \ .$$

Pomocí ní určíme stacionární body

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x-6}{x^6} = 0 \Leftrightarrow -2x-6 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \ .$$

Stacionárním bodem je tedy bod $x_1 = -3$.
První derivace není definovaná v bodě $x_2 = 0$.
Na získaných třech intervalech vyšetříme monotónnost funkce :
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3)$ a $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 0) \cup (0, \infty)$.
Tedy funkce je rostoucí v intervalech $(-\infty, -3)$, a klesající v intervalech $(-3, 0)$, $(0, \infty)$.
Funkce má tedy lokální maximum v bodě $x_1 = -3$, $f(-3) = \frac{1}{27}$.

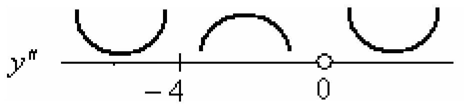


Pro vyšetření konvexnosti a konkávnosti vypočítáme druhou derivaci : $f''(x) = \frac{6x+24}{x^5}$.

Nulovým bodem druhé derivace je hodnota $x_3 = -4$. Druhá derivace není definovaná v bodě $x_2 = 0$. Na získaných třech intervalech vyšetříme konvexitu a konkávitu :

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4) \cup (0, \infty) \ \text{a} \ f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-4, 0).$$

Tedy funkce je konvexní v intervalu $(-\infty, -4) \cup (0, \infty)$ a konkávní v intervalu $(-4, 0)$. Inflexní bod má funkce v bodě $x_3 = -4$.



Asymptota bez směrnice má rovnici $x = 0$, protože $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x+2}{x^3} = +\infty$ a $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x+2}{x^3} = -\infty$.
Asymptotu se směrnicí $y = kx + q$ vypočítáme pomocí limit :

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x+2}{x^3}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+2}{x^4} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^4} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^3} = 0,$$

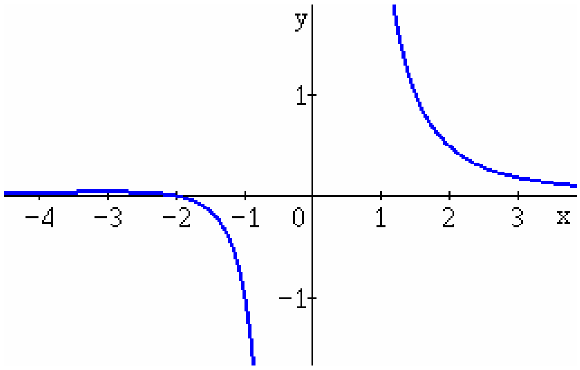
$$q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+2}{x^3} \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^3} = 0 \ .$$

Tedy graf funkce f má asymptotu se směrnicí o rovnici $y = 0$.

Tabulka význačných hodnot :

x	-4	-3	-2	1	2
y	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{27}$	0	3	$\frac{1}{2}$

Na základě všech zjištěných vlastností funkce načrtneme její graf :



Detail grafu funkce v okolí inflexního bodu a lokálního maxima :