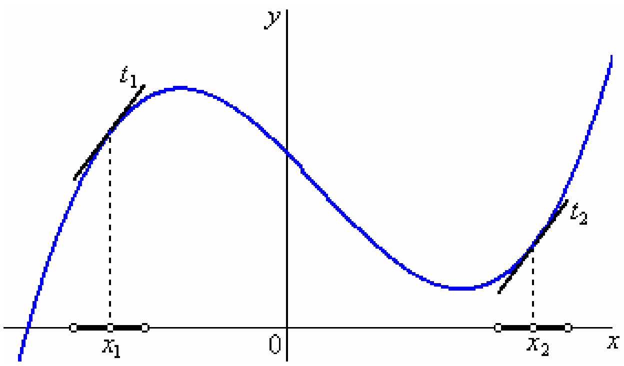
Vyšetřování konvexity, konkávity a inflexních bodů funkce

Konvexnost a konkávnost

Definice : Funkce $y = f(x)$ je v bodě x_0, ve kterém má derivaci,

- **konvexní**, jestliže pro všechna x z ryzího okolí bodu x_0 leží body grafu funkce nad tečnou grafu v bodě x_0.
- **konkávní,** jestliže pro všechna x z ryzího okolí bodu x_0 leží body grafu funkce pod tečnou grafu v bodě x_0.



Funkce na obrázku je v bodě x_1 konkávní, v bodě x_2 konvexní.

Poznámka : Funkci nazveme konvexní (konkávní) na otevřeném intervalu, je-li konvexní (konkávní) v každém bodě tohoto intervalu.

Věta o vyšetřování konvexity a konkávity

Věta K1 : Nechť funkce $y = f(x)$ je spojitá na intervalu J a má v každém jeho vnitřním bodě druhou derivaci. Jestliže ve všech vnitřních bodech intervalu J platí :

- $f''(x) > 0$, pak je funkce $f(x)$ na J konvexní,
- $f''(x) < 0$, pak je funkce $f(x)$ na J konkávní.

Srovnáním s větou M1 je vidět, že konvexita a konkávita souvisí s druhou derivací funkce podobně jako monotónnost souvisela s první derivací. Toho budeme využívat při vyšetřování intervalů konvexity a konkávity.

Příklad : Vyšetřete intervaly konvexity a konkávity funkce $f : y = x^4 - 2x^3 + 1$.

Řešení : Budeme postupovat podobně jako při vyšetřování monotónnosti, jen místo s první derivací budeme pracovat s druhou derivací.

$D(f) = \mathbf{R}$. Nejprve vypočítáme $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$ a $f''(x) = 12x^2 - 12x$.

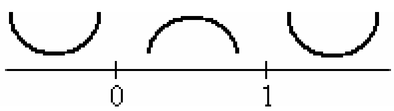
Vyšetříme, ve kterém intervalu platí $f''(x) > 0$, a ve kterém $f''(x) < 0$:

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12x > 0 \Leftrightarrow 12x.(x-1) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

Tedy funkce je konvexní v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(1, +\infty)$.

Pro $x \in (0, 1)$ je $f''(x) < 0$, tedy v intervalu $(0, 1)$ je funkce konkávní.

Symbolicky budeme konvexitu a konkávitu funkce vyjadřovat takto :



Poznámka : Bod x_0, pro který platí $f''(x_0) = 0$, budeme nazývat kritickým bodem.

Inflexní bod funkce

Definice : Bod, ve kterém existuje ke grafu funkce právě jedna tečna a v němž přechází graf funkce z konvexity do konkávity (nebo naopak), tj. z jedné strany tečny na druhou, se nazývá **inflexní bod**.

Poznámka : Za inflexní bod považujeme i případ, kdy má funkce v bodě x_0 nevlastní derivaci (tečna ke grafu je v tomto bodě rovnoběžná s osou y).

Věta o postačujících podmínkách pro existenci inflexního bodu

Věta K2 : Nechť funkce $f(x)$ má v bodě x_0 spojitou první derivaci a nechť platí $f''(x_0) = 0$ nebo $f''(x_0)$ neexistuje. Existuje-li pravé ryzí okolí bodu x_0 tak, že funkce $f''(x)$ v něm má jiné znaménko než v levém ryzím okolí bodu x_0, má funkce $f(x)$ v bodě x_0 inflexní bod.

Poznámka : Inflexní bod může nastat tedy jen v kritických bodech kde $f''(x) = 0$ a v bodech ve kterých $f''(x)$ neexistuje (pokud je v nich funkce definovaná).

Příklad : Vyšetřete intervaly, v nichž je funkce $f : y = \dfrac{x}{x^2+1}$ konvexní resp. konkávní a určete její inflexní body.

Řešení : Definiční obor funkce $D(f) = \mathbf{R}$.

Vypočítáme první a druhou derivaci :

$$y' = \frac{1\cdot\left(x^2+1\right) - x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2},$$

$$y'' = \frac{-2x\cdot\left(x^2+1\right)^2 - \left(1-x^2\right)\cdot 2\cdot\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(\left(x^2+1\right)^2\right)^2} = \frac{\left(x^2+1\right)\cdot\left[-2x\cdot\left(x^2+1\right) - 4x\left(1-x^2\right)\right]}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

.

Určíme kritické body :

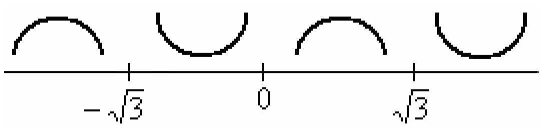
$$y'' = 0 \Leftrightarrow \frac{2x\cdot\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x\cdot\left(x^2-3\right) = 0 \Leftrightarrow x\cdot\left(x-\sqrt{3}\right)\cdot\left(x+\sqrt{3}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -\sqrt{3} \vee x_2 = 0 \vee x_3 = \sqrt{3}.$$

Funkce je konvexní právě tehdy, je-li $y'' > 0$ a konkávní je právě tehdy, je-li $y'' < 0$. Vzhledem k tomu, že jmenovatel $\left(x^2+1\right)^3$ je vždy kladný, stačí řešit nerovnice :

$x\cdot\left(x-\sqrt{3}\right)\cdot\left(x+\sqrt{3}\right) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right),$

$x\cdot\left(x-\sqrt{3}\right)\cdot\left(x+\sqrt{3}\right) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right).$



Funkce $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ je konvexní pro $x\in\left(-\sqrt{3},0\right)\cup\left(\sqrt{3},\infty\right)$, konkávní pro $x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup$ $\cup\left(0,\sqrt{3}\right)$. Inflexní body má funkce v bodech $x_1=-\sqrt{3},\ x_2=0,\ x_3=\sqrt{3}$. V těchto bodech dopočítáme funkční hodnoty : $f(-\sqrt{3})=\dfrac{-\sqrt{3}}{4},\ f(0)=0,\ f(\sqrt{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Poznámka : Při vyšetřování konvexity a konkávity je možné používat také postup popsaný při vyšetřování monotónnosti. Spočívá v nalezení kritických bodů a bodů, ve kterých neexistuje druhá derivace a dosazením bodů ze získaných intervalů do druhé derivace. Podle znaménka druhé derivace v těchto bodech rozhodneme o konvexitě a konkávitě na celém intervalu.