Vyšetřování monotónnosti funkce a lokálních extrémů

Připomeňme, že monotónnost vyjadřuje, zda je funkce v bodě (na intervalu) rostoucí či klesající. Tuto důležitou vlastnost funkce budeme nyní vyšetřovat pomocí znaménka 1.derivace.

Věta o monotónnosti funkce

> **Věta M1 :** Nechť funkce $y = f(x)$ je spojitá na intervalu J a má v každém jeho vnitřním bodě derivaci. Jestliže ve všech vnitřních bodech intervalu J platí:
> - $f'(x) > 0$, pak je funkce $f(x)$ na J rostoucí.
> - $f'(x) < 0$, pak je funkce $f(x)$ na J klesající.
> - $f'(x) = 0$, pak je funkce $f(x)$ na J konstantní.

Příklad : Vyšetřete monotónnost funkce $f : y = 3x^4 - 4x^3$ v bodě $x_1 = -1$.

Řešení : $D(f) = \mathbf{R}$ .Vypočítáme první derivaci funkce : $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$.

Monotónnost funkce v bodě určíme podle hodnoty první derivace v tomto bodě.

Pro $x_1 = -1$ je $f'(-1) = 12(-1)^3 - 12(-1)^2 = -12 - 12 = -24 < 0$.

Funkce f je tedy v bodě $x_1 = -1$ klesající.

Při vyšetřování monotónnosti funkce na intervalu je možné postupovat dvěma způsoby. První vychází přímo z věty M1 a spočívá v řešení nerovnic $f'(x) > 0$ a $f'(x) < 0$. Výsledkem jsou pak intervaly růstu a klesání funkce.

Při řešení druhým způsobem se vyhneme řešení nerovnic. Na číselnou osu nanesme všechny body, ve kterých je derivace rovna nule nebo není definovaná. Derivace může měnit znaménko pouze v těchto bodech - tedy pouze tyto body mohou být krajními body intervalů, na nichž je funkce rostoucí nebo klesající. K určení znaménka derivace v každém z intervalů pak stačí určit znaménko v některém vnitřním bodě tohoto intervalu. Je vhodné zvolit takový bod x, v němž se hodnota $f'(x)$ snadno vypočítá.

Příklad : Vyšetřete monotónnost funkce (tj. určete intervaly růstu a klesání funkce) :

$f : y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Řešení : Nejprve vypočítáme první derivaci funkce a upravíme ji :

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$.

<u>První způsob vyšetřování monotónnosti :</u>

Řešíme nerovnice $3(x-1)(x-3) < 0$ a $3(x-1)(x-3) > 0$.

Vzhledem k tomu, že grafem první derivace je parabola, otevřená směrem nahoru, která protíná osu x v bodech $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, je řešením první nerovnice interval $(1, 3)$, v němž je daná funkce klesající. Řešením druhé nerovnice jsou intervaly $(-\infty, 1)$ a $(3, +\infty)$, v nichž je daná funkce rostoucí.

Druhý způsob vyšetřování monotónnosti :

Protože první derivace funkce je definovaná pro všechna $x \in \mathbf{R}$, může se monotónnost měnit pouze v nulových bodech první derivace (tj. v bodech, v nichž je první derivace rovna nule). V naší úloze jsou to body $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Tyto body rozdělí definiční obor funkce na 3 intervaly : $(-\infty, 1), (1, 3), (3, +\infty)$.

Pro určení znaménka první derivace funkce v intervalu $(-\infty, 1)$ vypočítáme její hodnotu v libovolném bodě tohoto intervalu.

Například pro $x = 0$ je $f'(0) = 3.0 - 12.0 + 9 = 9 > 0$.

Tedy funkce je v tomto bodě a také na celém intervalu $(-\infty, 1)$ rostoucí.

Pro určení znaménka první derivace funkce v intervalu $(1, 3)$ vypočítáme její hodnotu v libovolném bodě tohoto intervalu.

Například pro $x = 2$ je $f'(2) = 3.2^2 - 12.2 + 9 = 12 - 24 + 9 = -3 < 0$.

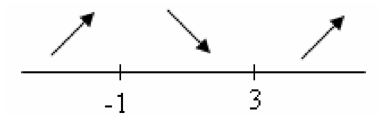
Tedy funkce je v tomto bodě a také na celém intervalu $(1, 3)$ klesající.

Pro určení znaménka první derivace funkce v intervalu $(3, +\infty)$ vypočítáme její hodnotu opět v libovolném bodě tohoto intervalu.

Například pro $x = 4$ je $f'(4) = 3.4^2 - 12.4 + 9 = 48 - 48 + 9 = 9 > 0$.

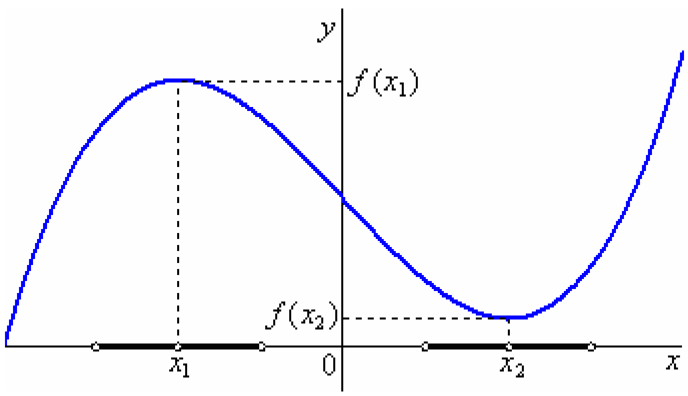
Tedy funkce je v tomto bodě a také na celém intervalu $(3, +\infty)$ rostoucí.

Symbolicky budeme monotónnost funkce vyjadřovat takto :



Lokální extrémy

Definice : Funkce $y = f(x)$ má v bodě x_0, ve kterém je definována:
- **lokální maximum**, jestliže pro každé x z ryzího okolí bodu x_0 platí $f(x) < f(x_0)$,
- **lokální minimum**, jestliže pro každé x z ryzího okolí bodu x_0 platí $f(x) > f(x_0)$.



Funkce na obrázku má v bodě x_1 lokální maximum, v bodě x_2 lokální minimum.

Poznámka : Bod x_0, pro který platí $f'(x_0) = 0$, budeme nazývat stacionárním bodem.

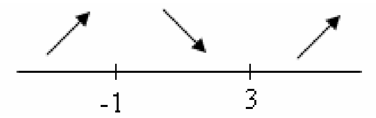
Věta o postačujících podmínkách pro extrém

Věta M2: Nechť *f(x)* je v bodě x_0 spojitá a nechť $f^{/}(x_0) = 0$ nebo $f^{/}(x_0)$ neexistuje. Existuje-li pravé ryzí okolí bodu x_0 tak, že funkce $f^{/}(x)$ v něm má jiné znaménko než v levém ryzím okolí bodu x_0, má funkce *f(x)* v bodě x_0 lokální extrém.

Lokální extrém nastává tedy ve stacionárních bodech nebo v bodech, kde derivace neexistuje, ve kterých derivace funkce mění znaménko.

Příklad : Najděte lokální extrémy funkce $f : y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Řešení : Při řešení úlohy využijeme výsledky předchozího příkladu. Tam jsme zjistili, že monotónnost funkce $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ je možné vyjádřit diagramem



.

Na základě věty M2 nastává tedy v bodě $x = -1$ lokální maximum a v bodě $x = 3$ lokální minimum. Zbývá určit funkční hodnoty : $f(-1) = -1 - 6 - 9 = 16$, $f(3) = 27 - 54 + 27 = 0$.

Příklad : Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

Řešení : Definiční obor $D(f) = \mathrm{R} - \{1\}$.
Vypočítáme první derivaci :

$$y' = \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - x^2 + 2x - 2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

Určíme
a) stacionární body :

$$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2.$$

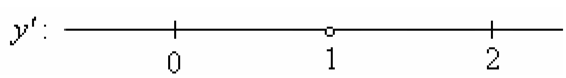
b) body, ve kterých první derivace neexistuje : $x_3 = 1$.

<u>První způsob vyšetřování monotónnosti.</u>

Řešíme nerovnosti $\dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \gtrless 0$. Vzhledem k tomu, že jmenovatel je vždy kladný a v čitateli je kvadratický výraz , bude výraz na levé straně kladný pro $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ a záporný pro $x \in (0,1) \cup (1,2)$.
Tedy funkce je rostoucí pro $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ a klesající pro $x \in (0,1) \cup (1,2)$.
Z věty M2 pak vyplývá, že v bodě x = 0 nastává lokální maximum a v bodě x = 2 lokální minimum.

<u>Druhý způsob vyšetřování monotónnosti.</u>

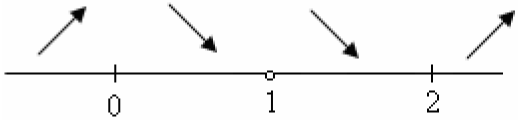
Body, ve kterých může dojít ke změně monotónnosti, znázorníme na číselnou osu první derivace



a dosazením ze vzniklých podintervalů do první derivace dostaneme např.:

$$y'(-1) > 0, \quad y'(\frac{1}{2}) < 0, \quad y'(\frac{3}{2}) < 0, \quad y'(3) > 0.$$

Na základě toho vyjádříme monotónnost funkce pomocí diagramu



Z věty M2 pak vyplývá, že v bodě x = 0 nastává lokální maximum a v bodě x = 2 lokální minimum.
V těchto bodech nabývá zadaná funkce hodnoty $y(0) = -2$, $y(2) = 2$.