Řešení soustav lineárních rovnic

Soustava lineárních rovnic

Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, ..., x_n$ rozumíme soustavu :

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array},$$

Kde $a_{ij}, b_i \in \mathbf{R}$. Čísla a_{ij} nazýváme koeficienty soustavy, čísla b_i absolutní členy. Uvedenou soustavu budeme značit $S(m,n)$.

Homogenní a nehomogenní soustava lineárních rovnic

Soustava lineárních rovnic $S(m,n)$ se nazývá homogenní, jestliže platí $b_1 = ... = b_m = 0$.
Je-li pro alespoň jedno $i = 1,...,m,\ \ b_i \neq 0$, nazývá se soustava nehomogenní.

Řešením soustavy $S(m,n)$ rozumíme každý vektor $(x_1, x_2, ..., x_n)$, který vyhovuje všem rovnicím soustavy.

Matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ nazveme maticí soustavy, matici $\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ nazveme rozšířenou maticí soustavy.

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Věta o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic

Frobeniova věta : Soustava lineárních rovnic $S(m,n)$ má řešení právě tehdy, když matice soustavy a rozšířená matice soustavy mají stejnou hodnost.

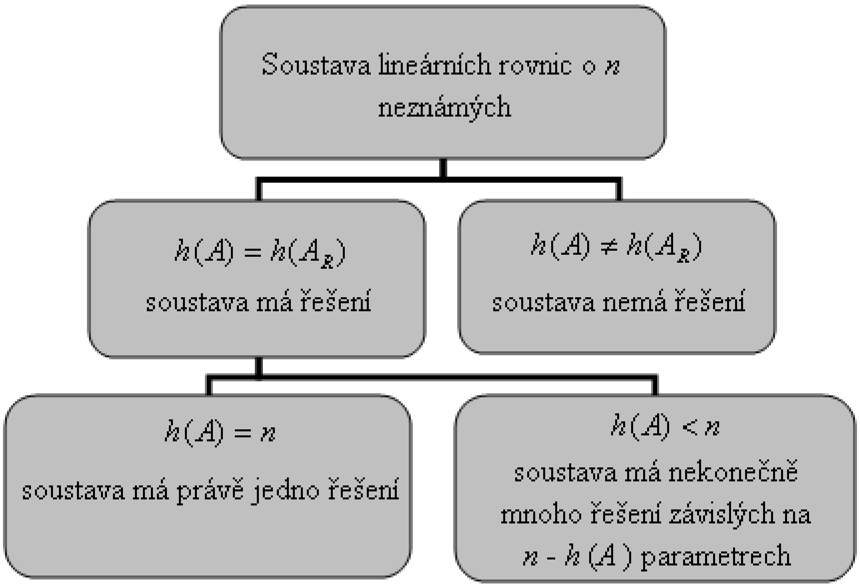
Počet řešení soustavy lineárních rovnic

Nechť soustava lineárních rovnic $S(m,n)$ má řešení, h je hodnost matice soustavy a n počet neznámých. Pak
a) jestliže $h = n$, má soustava právě jedno řešení.
b) jestliže $h < n$, má soustava nekonečně mnoho řešení závislých na $n - h$ parametrech.

Poznámka : 1) V případě, že soustava $S(m,n)$ má nekonečně mnoho řešení závislých na $n - h$ parametrech, můžeme za těchto $n - h$ neznámých volit libovolná reálná čísla. Hodnoty ostatních h neznámých (bázických) jsou pak určeny jednoznačně pomocí $n - h$ parametrů.

2) Vztah vyjadřující (pomocí parametrů) všechna řešení soustavy se nazývá **obecné řešení soustavy**. Dosadíme-li za parametry konkrétní reálná čísla, dostaneme jedno řešení, které nazýváme **partikulární řešení soustavy**.

Uvedené výsledky lze shrnout do následujícího schématu :



Počet řešení homogenní soustavy lineárních rovnic

Věta 9.21.: Homogenní soustava lineárních rovnic má vždy řešení.
Je-li h hodnost matice soustavy a n počet neznámých, pak :
a) jestliže $h = n$, má homogenní soustava jediné řešení $x = (0,...,0)$. Toto řešení nazýváme triviální řešení.
b) jestliže $h < n$, má soustava nekonečně mnoho řešení závislých na $n - h$ parametrech.

Metody řešení soustav lineárních rovnic

Dvě soustavy lineárních rovnic se stejným počtem neznámých, které mají množiny všech řešení sobě rovné, se nazývají ekvivalentní. Úpravy, jimiž se nemění množina řešení soustavy, nazýváme ekvivalentní úpravy soustavy lineárních rovnic. Nejdůležitější z nich jsou :

- výměna pořadí rovnic,
- násobení libovolné rovnice nenulovým reálným číslem k,
- přičtení k-násobku některé rovnice k jiné rovnici.

Dvě soustavy lineárních rovnic $S_1(m,n)$, $S_2(m,n)$, z nichž jedna vznikne z druhé použitím uvedených ekvivalentních úprav soustav, jsou ekvivalentní právě tehdy, když jejich odpovídající rozšířené matice jsou ekvivalentní.

Gaussova eliminační metoda

Ekvivalentním úpravám soustavy odpovídají příslušné úpravy její rozšířené matice. Soustavu proto můžeme řešit tak, že její rozšířenou matici převedeme na stupňový tvar. Této matici odpovídá soustava, ekvivalentní s danou soustavou, která má tvar, ze kterého zpětným dosazováním určíme řešení zadané soustavy. Uvedený postup se nazývá Gaussova eliminační metoda. Pomocí získané stupňové matice můžeme navíc rozhodnout o řešitelnosti soustavy na základě Frobeniovy věty.

Příklad:

1) Řešte soustavu lineárních rovnic :
$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & -\ x_2 & -2x_3 & -3x_4 & = & 8 \\ 3x_1 & +2x_2 & -\ x_3 & +2x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +\ x_4 & = & -8 \end{array},$$

Řešení : Z koeficientů soustavy vytvoříme rozšířenou matici soustavy a tu pak pomocí ekvivalentních úprav převedeme na stupňový tvar :

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right)\begin{array}{l} .(-2)/.(-3) \\ \hookleftarrow \\ \quad\hookleftarrow \\ \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ .(-4)/.(-7) \\ .(5)\hookleftarrow \\ \quad .(5)\hookleftarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -54 \\ 0 & 0 & 36 & 18 & -72 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ .(2) \\ \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -54 \\ 0 & 0 & 0 & 90 & -180 \end{array}\right).$$

Vzhledem k tomu, že $h(\mathbf{A}) = 4 = h(\mathbf{A}_R)$, má podle Frobeniovy věty soustava řešení.
Navíc platí $h(\mathbf{A}) = 4 = n$, tedy soustava má právě jedno řešení. Získáme ho zpětným dosazováním ze soustavy, odpovídající stupňové matici :

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = & 6 \\ & -5x_2 & -8x_3 & +x_4 & = & -4 \\ & & -18x_3 & +36x_4 & = & -54 \\ & & & 90x_4 & = & -180 \end{array}$$

Postupujeme tak, že nejprve z poslední rovnice vyjádříme neznámou x_4, potom pomocí ní z předposlední rovnice vyjádříme neznámou x_3 atd.

Tedy $x_4 = \dfrac{-180}{90} = -2$, $\quad \begin{array}{r} -18x_3 + 36.(-2) = -54 \\ x_3 = -1 \end{array}$, $\quad \begin{array}{r} -5x_2 - 8.(-1) - 2 = -4 \\ x_2 = 2 \end{array}$,

$$\begin{array}{r} x_1 + 2.(2) + 3.(-1) - 2.(-2) = 6 \\ x_1 = 1 \end{array}$$

Řešení budeme zapisovat ve tvaru vektoru $(1, 2, -1, -2)$.

2) Řešte soustavu lineárních rovnic
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & -3 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & 5x_3 & - & 25x_4 & = & -9 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 15 \end{array}.$$

Přepíšeme soustavu do matice a přičtením druhého řádku k prvnímu získáme na klíčovém místě a_{11} jednotkový prvek :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & -5 & -25 & -9 \\ 4 & 3 & -1 & 1 & 15 \end{array}\right) .(1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & -5 & -25 & -9 \\ 4 & 3 & -1 & 1 & 15 \end{array}\right) .(-3)/.(-2)/.(-4) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -7 & -27 & -13 \\ 0 & 7 & -5 & -3 & 7 \end{array}\right) .(1)/.(-7) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & -32 & -14 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{9} & \cancel{32} & \cancel{14} \end{array}\right)$$

Protože $h(\mathbf{A}) = 3 = h(\mathbf{A}_R)$, má soustava podle Frobeniovy věty řešení.
Vzhledem k tomu, že $h(\mathbf{A}) = 3 \neq n = 4$, má soustava nekonečně mnoho řešení, závislých na $n - h(\mathbf{A}) = 1$ parametru. Jednu neznámou volíme za parametr a ostatní neznámé vyjádříme pomocí tohoto parametru zpětným dosazováním ze soustavy, odpovídající stupňové matici.

Je to matice
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & - & 5x_4 & = & -1 \\ & & & - & 9x_3 & - & 32x_4 & = & -14 \end{array}.$$

Zvolme za parametr t neznámou x_4. V naší úloze máme možnost zvolit za parametr i neznámou x_3, bývá ale zvykem (je-li to možné) volit za parametr neznámou s nejvyšším indexem.

Je tedy $x_4 = t,\ -9x_3 - 32t = -14$
$$x_3 = \frac{14-32t}{9},$$
$$x_2 - 2\cdot\frac{14-32t}{9} - 5t = -1$$
$$x_2 = \frac{19-19t}{9},$$

$$x_1 - \frac{19-19t}{9} + \frac{14-32t}{9} + t = 2$$
$$x_1 = \frac{23+4t}{9}.$$

Řešení zapíšeme ve tvaru $\left(\frac{23+4t}{9}, \frac{19-19t}{9}, \frac{14-32t}{9}, t\right)$, kde $t \in \mathbf{R}$.

Jde o tzv. obecné řešení soustavy. Zvolíme-li za parametr t určité reálné číslo, např. $t = 1$, dostaneme partikulární řešení $(3, 0, -2, 1)$.

Jordanova metoda úplné eliminace

Tato metoda spočívá v úpravě rozšířené matice soustavy na jednotkovou matici. Ve sloupci na pravé straně pak dostáváme přímo hodnoty neznámých.

Příklad: Jordanovou metodou úplné eliminace řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\text{a)}\ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & - & 2x_3 & = & -5 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \end{array}, \quad \text{b)}\ \begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & & & + & 3x_4 & = & 1 \end{array}.$$

Řešení : a) Při úpravě rozšířené matice soustavy postupujeme tak, že nejprve za klíčový prvek volíme a_{11}, ve druhém kroku a_{22} a ve třetím a_{33}. Pomocí těchto čísel pak nulujeme ostatní prvky v příslušném sloupci.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 2 & 9 \end{array}\right).(-2)/.(1) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & 17 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ .(-2) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ .(-5)/.(2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Podle Frobeniovy věty má soustava řešení, neboť $h(\mathbf{A}) = 3 = h(\mathbf{A}_R)$.

Navíc platí $h(\mathbf{A}) = 3 = n$, tedy soustava má právě jedno řešení. Získáme ho přímo z výsledné rozšířené matice soustavy : $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

Tedy obecné řešení dané soustavy má tvar $(1, 2, 3)$.

$$\text{b)} \left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} .(-2)/.(-1) \\ .(3) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ .(1)/.(2) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 0 & 0 & 15 & 18 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ .(-3) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 0 & 0 & 15 & 18 \\ 0 & -3 & 0 & -12 & -17 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} :(3) \\ :(-3) \\ :(-3) \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 17/3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -10/3 \end{array}\right).$$

Podle Frobeniovy věty má soustava řešení, neboť $h(\mathbf{A}) = 3 = h(\mathbf{A}_R)$.

Platí $h(\mathbf{A}) = 3 \neq n = 4$, tedy soustava má nekonečně mnoho řešení, závislých na $n - h(\mathbf{A}) = 1$ parametru.

Zvolíme-li za parametr t neznámou x_4, dostaneme ostatní neznámé přímo ze stupňové matice : $x_1 = 6 - 5t, x_2 = \dfrac{17}{3} - 4t, x_3 = -\dfrac{10}{3} + 3t, x_4 = t.$

Tedy obecné řešení daná soustavy je $(6 - 5t, \dfrac{17}{3} - 4t, -\dfrac{10}{3} + 3t, t)$.

Cramerovy vzorce

Jde o metodu založenou na použití determinantů. Její význam spočívá v možnosti explicitně vyjádřit vzorcem řešení soustavy pomocí prvků rozšířené matice soustavy (bude využito např. u metody nejmenších čtverců nebo při řešení diferenciálních rovnic vyšších řádů). Omezením však je pracnost výpočtu determinantů vyšších řádů a také podmínka rovnosti počtu rovnic a počtu neznámých.

Věta o řešení soustavy pomocí Cramerových vzorců

Mějme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých a označme $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ determinant matice této soustavy. Nechť $D \neq 0$. Pak soustava má právě jedno řešení, dané Cramerovými vzorci : $x_k = \dfrac{D_k}{D}$, kde D_k (pro $k = 1,2,\dots,n$) jsou determinanty řádu n, které dostaneme z determinantu D nahrazením jeho k-tého sloupce sloupcem absolutních členů $(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Příklad: Pomocí Cramerových vzorců řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 3 \\ 2x + y + z &= 12 \end{aligned} \quad .$$

Řešení : Determinant $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 6 + 1 - 4 + 3 + 2 = 12 \neq 0$, tedy soustava má právě jedno řešení.

Dále je $D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 12 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 24$, $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 12 & 1 \end{vmatrix} = 36$, $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 60$.

Jednotlivé neznámé určíme pomocí Cramerových vzorců

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{24}{12} = 2,\ y = \frac{D_2}{D} = \frac{36}{12} = 3,\ z = \frac{D_3}{D} = \frac{60}{12} = 5.$$

Tedy obecné řešení zadané soustavy má tvar $(2,3,5)$.

Poznámka : Cramerovými vzorci je možné řešit i soustavy $S(m,n)$, které mají nekonečně mnoho řešení, závislých na $n - h$ parametrech. Postupujeme tak, že z determinantu D vybereme nenulový subdeterminant řádu h. Touto volbou determinantu soustavy současně volíme h bázických neznámých a $n - h$ parametrů.