Příklad 1: Gaussovou eliminační metodou řešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & + & 6x_4 & = & -2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 1 \end{array}.$$

Řešení: Napíšeme rozšířenou matici soustavy, tj. matici tvořenou koeficienty u neznámých, ke kterým přidáme sloupec pravých stran:

$$\mathbf{A}_R = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Tuto matici převedeme ekvivalentními úpravami na stupňový tvar.
V prvním sloupci budou pod diagonálou nulové prvky, když ke druhému řádku přičteme (–3)násobek prvního řádku a ke třetímu řádku první přičteme:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} .(-3)\ /.1 \\ \quad\hookleftarrow \\ \qquad\quad\hookleftarrow \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ \updownarrow \end{array} \sim$$

Vyměníme druhý řádek s posledním a vynulujeme 2. sloupec pod diagonálou:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ .(-4)\ /.5 \\ \quad\hookleftarrow \\ \qquad\quad\hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ :(-18) \\ \end{array} \sim$$

Zbývá upravit poslední řádek. Třetí řádek vydělíme (–18) a v dalším kroku vynulujeme 3. sloupec pod diagonálou. (Kdybychom chtěli získat v posledním řádku místo čísla 26 nulu přímo, museli bychom násobit 3. řádek 13, čtvrtý 9 a sečíst je.)

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ .(-26) \\ \quad\hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}\right)$$

Nyní máme stupňovou matici, můžeme tedy provést rozbor řešení.
Protože $h(\mathbf{A}) = 4$, $h(\mathbf{A}_R) = 4$, má soustava podle Frobeniovy věty řešení. A protože počet neznámých $n = 4$, soustava má řešení právě jedno.

Při dalším výpočtu budeme postupovat zdola nahoru. Víme, že stupňové matici máme přiřadit soustavu ekvivalentní s původní. Jednoduše řečeno: řádky matice zapíšeme opět jako rovnice. Postupujeme od poslední směrem k první a z každé rovnice vypočítáme jednu neznámou.

Poslední rovnice (z posledního řádku): $9x_4 = 9 \;\Rightarrow\; x_4 = 1$.

Předposlední rovnice: $x_3 - x_4 = 0$. Hodnotu x_4 známe, po dosazení dostaneme x_3.

$$x_3 - 1 = 0$$
$$x_3 = 1 .$$

Napíšeme další rovnici, dosadíme už vypočítané neznámé a dostaneme x_2:

$$x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1$$
$$x_2 + 3 - 4 = 1$$
$$x_2 = 2 .$$

Z první rovnice dopočítáme x_1: $x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -2$

$$x_1 + 2 \cdot 2 - 5 + 1 = -2$$
$$x_1 = -2 .$$

Vektor řešení $\vec{x} = (-2,\, 2,\, 1,\, 1)$.

Příklad 2: Gaussovou eliminační metodou řešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & -\;4x_2 & +\;5x_3 & +\;4x_4 & = & 0 \\ x_1 & -\;2x_2 & +\;2x_3 & +\;x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -\;2x_2 & +\;6x_3 & +\;x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & -12x_2 & & +\;6x_4 & = & 0 \end{array} .$$

Řešení: Protože jde o soustavu homogenní, řešení jistě existuje. Pokud je právě jedno, je nulové. Při výpočtu postupujeme stejně jako u soustav nehomogenních.

Napíšeme rozšířenou matici soustavy, hned při vypisování vyměníme první a druhý řádek. Potom budeme převádět na matici stupňovou.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & -12 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} .(-2)\;/.(-3) \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \\ \qquad\quad \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Zaměníme pořadí řádků. Druhý řádek posuneme na poslední místo, třetí řádek bude druhý a poslední řádek upravíme:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ .(3) \\ \hookleftarrow \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) .$$

Poznámka: Řádek, jehož všechny prvky jsou nulové, jsme vynechali. Pokud bychom si závislosti druhého a třetího řádku povšimli, mohli jsme jeden z nich vyškrtnout hned a k získání stupňové matice stačilo upravit pořadí řádků.

Rozbor řešení: $h(\mathbf{A}) = 3 = h(\mathbf{A}_R)$, $n = 4$. Soustava má řešení a protože $h < n$, má jich nekonečně mnoho. Řešení budou záviset na $n - h = 1$ parametru.

Dopočítávat začneme od poslední rovnice: $x_3 + 2x_4 = 0$.
Zde jsou 2 neznámé a jen jednu z nich můžeme explicitně vyjádřit. Ta druhá musí být parametrem. Zvolíme-li za parametr x_4, potom $x_3 = -2x_4$.

Další rovnice $2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow 2x_2 = -2x_3 + x_4$

$$2x_2 = -2(-2x_4) + x_4$$
$$2x_2 = 5x_4$$
$$x_2 = \frac{5}{2}x_4.$$

Z první: $x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$

$$x_1 = 2x_2 - 2x_3 - x_4$$
$$x_1 = 2 \cdot \frac{5}{2}x_4 - 2(-2x_4) - x_4$$
$$x_1 = 8x_4.$$

Řešením soustavy je $\vec{x} = \left(8x_4, \frac{5}{2}x_4, -2x_4, x_4\right)$, kde $x_4 \in \mathbf{R}$.

Příklad 3: Řešte homogenní soustavu

$$\begin{array}{rrrrrcl} 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & -3x_5 & = & 0 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & -5x_2 & +x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & -2x_5 & = & 0 \end{array}.$$

Řešení : V rozšířené matici soustavy vyměníme první a druhý řádek a upravíme ji.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} .(-2)/.(-3) \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \\ \qquad\hookleftarrow \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \updownarrow \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ .(-5)/.(-4) \\ \hookleftarrow \\ \qquad\hookleftarrow \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-8} & \cancel{4} & \cancel{-5} & \cancel{0} \end{pmatrix}.$$

Vzhledem k tomu, že $h(\mathbf{A}) = 3 = h(\mathbf{A}_R)$, má podle Frobeniovy věty soustava řešení.
Protože $h(\mathbf{A}) = 3$ a $n = 5$, má soustava nekonečně mnoho řešení, závislých na $n - h(\mathbf{A}) = 2$ parametrech.

Neznámé, které volíme za parametry, můžeme přeznačit, aby bylo vidět, co jsou parametry.

Za parametry budeme volit x_4, x_5 a označíme například $x_4 = u, x_5 = v$, kde $u, v \in \mathbf{R}$.

Poslední rovnice $-8x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0$

$$x_3 = \frac{4}{8}x_4 - \frac{5}{8}x_5 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}u - \frac{5}{8}v.$$

Druhá $x_2 + x_3 = 0$

$$x_2 = -x_3 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}u + \frac{5}{8}v.$$

$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$

$$x_1 = 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}u + \frac{7}{8}v.$$

Řešení má tvar $(-\frac{1}{2}u + \frac{7}{8}v, -\frac{1}{2}u + \frac{5}{8}v, \frac{1}{2}u - \frac{5}{8}v, u, v)$, kde $u, v \in \mathbf{R}$.

Příklad 4: Řešte soustavu lineárních rovnic :

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
2x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & + & 4x_5 & = & -1 \\
x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & & & = & 1 \\
 & & 2x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & 2 \\
-3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & - & x_5 & = & -1
\end{array}.$$

Řešení: Z koeficientů soustavy a pravých stran rovnic vytvoříme rozšířenou matici soustavy, přitom zaměníme pořadí řádků. Potom ji pomocí ekvivalentních úprav převedeme na matici stupňovou.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\
0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 2 \\
2 & 6 & 2 & -1 & 4 & -1 \\
-3 & 1 & 2 & 4 & -1 & -1
\end{array}\right).(-2)\ /.(3) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\
0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 2 \\
0 & 8 & 4 & 3 & 4 & -3 \\
0 & -2 & -1 & -2 & -1 & 2
\end{array}\right).(-4)\ /.(1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\
0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 11 & 0 & -11 \\
0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 4
\end{array}\right):11 \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\
0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1
\end{array}\right)$$

V předposledním kroku je vidět, že poslední dva řádky jsou lineárně závislé. Můžeme tedy jeden z nich vynechat a koeficienty si ještě upravit dělením. Tím jsme získali stupňovou matici a můžeme provést rozbor řešení.

Protože $h(\mathbf{A}) = 3 = h(\mathbf{A}_R)$, soustava má (podle Frobeniovy věty) řešení.

Vzhledem k tomu, že $h(\mathbf{A}) = 3$ a $n = 5$, má soustava nekonečně mnoho řešení, která budou záviset na 2 parametrech.

V tomto případě není možné volit za parametry neznámé x_4, x_5. Z každé rovnice musíme vypočítat jednu neznámou a poslední rovnice je $x_4 = -1$.
To znamená, že neznámá x_4 je nezávislá na ostatních a není možné ji volit za parametr.

Napišme (na základě řádku stupňové matice) další rovnici: $2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 2$.
Zde jsou zastoupeny 4 neznámé, jednu budeme počítat a za jednu si už můžeme dosadit. Zbývají tedy dvě a ty budou parametry. Zvolme například parametry x_2, x_5 a vyjádřeme v závislosti na nich neznámou x_3.

Z rovnice vyjádříme $x_3 = 2 - 2x_2 + 2x_4 - x_5$

Dosadíme $x_3 = 2 - 2x_2 + 2(-1) - x_5 \Rightarrow x_3 = -2x_2 - x_5$.

Z první rovnice vypočítáme x_1: $x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1$

$$x_1 = 1 + x_2 + x_3 + 2x_4$$
$$x_1 = 1 + x_2 + (-2x_2 - x_5) + 2(-1)$$
$$x_1 = -1 - x_2 - x_5.$$

Řešením soustavy je $\vec{x} = \left(-1 - x_2 - x_5 ,\ x_2 ,\ -2x_2 - x_5 ,\ -1 ,\ x_5\right)$, kde $x_2, x_5 \in \mathbf{R}$.

Poznámka: Za parametry v příkladu 4 jsme mohli zvolit také x_3 a x_5 nebo x_2 a x_3. Potom má samozřejmě vektor řešení jiný tvar.

$\vec{x} = \left(-1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5 ,\ -\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5 ,\ x_3 ,\ -1 ,\ x_5\right)$ v prvním případě, ve druhém

$\vec{x} = \left(-1 + x_2 + x_3 ,\ x_2 ,\ x_3 ,\ -1 ,\ -2x_2 - x_3\right)$. Můžete si vyzkoušet.

Příklad 5: Jordanovou metodou úplné eliminace řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ & & x_2 & & & - & 2x_4 & + & 7x_5 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & + & 5x_4 & + & 6x_5 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & + & x_5 & = & 1 \end{array}.$$

Řešení : Mohli bychom postupovat tak, že při úpravě rozšířené matice soustavy vyjdeme vždy z prvku na diagonále a pomocí něj vynulujeme ostatní prvky ve sloupci. Tedy pomocí a_{11} nulujeme prvky v 1. sloupci, ve druhém kroku pomocí a_{22} prvky pod i nad diagonálou ve druhém sloupci, atd. Tento postup se dá snadno použít, pokud má soustava rovnic právě jedno řešení. Jestliže o řešitelnosti zadané soustavy nevíme nic, je vhodnější upravit rozšířenou matici soustavy na stupňovou a provést rozbor řešení. Teprve potom upravit prvky nad diagonálou a vytvořit matici jednotkovou.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & -3 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} .(-1) \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ .(-1) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ :(-2) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Matice je ve stupňovém tvaru, provedeme rozbor řešení:

$h(\mathbf{A}) = 4$, $h(\mathbf{A}_R) = 4 \Rightarrow$ soustava má řešení.

Protože $n = 5 > h$, má soustava nekonečně mnoho řešení, závislých na 1 parametru.

Z posledního řádku matice je vidět, že neznámá x_4 je nezávislá na ostatních a není možné ji volit za parametr. Parametrem může být x_3 nebo x_5. Zvolme x_5. To znamená, že jednotkovou submatici budeme vytvářet ve sloupcích 1 – 4. Vynulujeme prvky v těchto sloupcích nad diagonálou. Upravíme nejdříve 4. sloupec, potom třetí a nakonec druhý:

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ .(-5) \quad /.(2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ .1 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ .(-3) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & -19 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} :2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{19}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -\frac{15}{2} + \frac{19}{2} x_5 \\ x_2 = 6 - 7x_5 \\ x_3 = 2 - x_5 \\ x_4 = 0 \end{array}$$

Po vytvoření jednotkové submatice jsme napsali řešení přímo. Sloupec, který do submatice nepatří se převede na pravou stranu.

Řešením soustavy je $\vec{x} = \left(-\frac{15}{2} + \frac{19}{2} x_5 \,,\; 6 - 7x_5 \,,\; 2 - x_5 \,,\; 0 \,,\; x_5 \right)$, kde $x_5 \in \mathbf{R}$.

Příklad 6: Pomocí Cramerových vzorců řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x+2y-z&=2 \\ x-4y+z&=4 \\ 2x+4y-z&=-1 \end{aligned} \quad .$$

Řešení : Determinant matice soustavy $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}=4+4-4-(8+4-2)=-6\neq 0$,

soustava má tedy právě jedno řešení.

Determinant D_1 dostaneme z D nahrazením prvního sloupce sloupcem pravých stran rovnic:

$$D_1=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}=8-2-16-(-4+8-8)=-6$$

Tedy první neznámá $x=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-6}{-6}=1$.

Determinant D_2 dostaneme z D nahrazením druhého sloupce sloupcem pravých stran rovnic:

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-4+4+1-(-8-1-2)=12$$

Druhá neznámá $y=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{12}{-6}=-2$.

Determinant D_3 dostaneme z D nahrazením třetího sloupce sloupcem pravých stran:

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}=4+16+8-(-16+16-2)=30$$

Poslední neznámá $z=\dfrac{D_3}{D}=\dfrac{30}{-6}=-5$.

Obecné řešení zadané soustavy má tvar $\vec{x}=(1,-2,-5)$.