Příklad 1: Určete definiční obor funkce $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6} + 2\ln(x+5)$.

Řešení : Výraz pod odmocninou musí být nezáporný a argument logaritmické funkce musí být kladný.

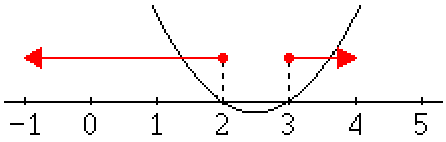
Tedy $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ a $x + 5 > 0$. Obě podmínky musí přitom platit současně.

a) Kvadratickou nerovnici $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ budeme řešit graficky.

Určíme kořeny kvadratického výrazu (rozkladem nebo pomocí vzorce) :

$$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2) \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 3$$

Vzhledem k tomu, že koeficient u x^2 je kladný, jde o parabolu otevřenou nahoru.

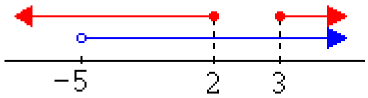


Tedy $D_1 = (-\infty, 2\rangle \cup \langle 3, \infty)$.

b) Řešením lineární nerovnice $x + 5 > 0$ dostaneme $x > -5$.

Tedy $D_2 = (-5, \infty)$.

Definiční obor zadané funkce dostaneme jako průnik intervalů D_1 a D_2 : $D = D_1 \cap D_2 = (-5, 2\rangle \cup \langle 3, \infty)$.

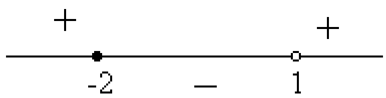


Příklad 2: Určete definiční obor funkce $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}} + \ln(x+3)$.

Řešení : Výraz pod odmocninou je nezáporný a argument logaritmické funkce musí být kladný.

Tedy $\dfrac{x+2}{x-1} \geq 0 \ \wedge\ x + 3 > 0$.

a) Najdeme nulové body zlomku $\dfrac{x+2}{x-1}$ (jsou to hodnoty $x_1 = -2$ a $x_2 = 1$) a určíme znaménko zlomku na intervalech $(-\infty, -2\rangle, \langle -2, 1), (1, \infty)$:

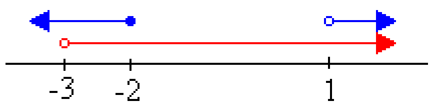


Tedy $D_1 = (-\infty, -2\rangle \cup (1, \infty)$.

b) Řešením lineární nerovnice $x + 3 > 0$ dostaneme $x > -3$.

Tedy $D_2 = (-3, \infty)$.

Definiční obor zadané funkce dostaneme jako průnik intervalů D_1 a D_2.



Celkem $D = (-3, -2\rangle \cup (1, +\infty)$.

Příklad 3: Určete definiční obor funkce $y = \dfrac{2}{\ln(1-x)} + \sqrt{x+2}$.

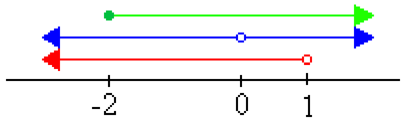
Řešení : Výraz ve jmenovateli se nesmí rovnat nule, argument logaritmické funkce musí být kladný a výraz pod odmocninou musí být nezáporný.

Tedy $\ln(1-x) \neq 0 \wedge (1-x) > 0 \wedge (x+2) \geq 0$.

a) Logaritmus se rovná nule, pokud argument je roven jedné. Tedy $\ln(1-x) \neq 0 \Leftrightarrow 1 - x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$.

b) Řešením lineární nerovnice $1 - x > 0$ dostaneme $x < 1$.

c) Řešením lineární nerovnice $x + 2 \geq 0$ dostaneme $x \geq -2$.

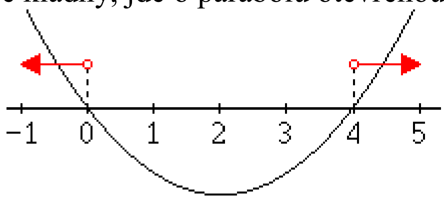


Celkem $D = \langle -2,0) \cup (0,1)$.

Příklad 4: Určete definiční obor funkce $y = \ln(x^2 - 4x) + e^{x+1} - 2\arcsin\frac{x+1}{4}$.

Řešení : Argument logaritmické funkce musí být kladný, exponenciální funkce je definovaná pro všechna reálná čísla a argument funkce arkussinus musí ležet v intervalu $\langle -1,1 \rangle$.

a) Kvadratickou nerovnici $x^2 - 4x > 0$ budeme řešit graficky.
Rozkladem určíme kořeny kvadratického výrazu : $x^2 - 4x = x(x-4) \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 4$.
Vzhledem k tomu, že koeficient u x^2 je kladný, jde o parabolu otevřenou nahoru.



Tedy $D_1 = (-\infty,0) \cup (4,\infty)$.

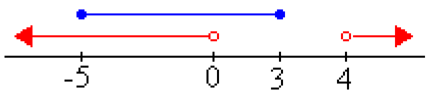
b) Pro argument funkce $\arcsin\frac{x+1}{4}$ musí platit $-1 \le \frac{x+1}{4} \le 1$.

V tomto případě lze obě nerovnice řešit najednou : $-1 \le \frac{x+1}{4} \le 1 \quad /.4$

$$-4 \le x+1 \le 4$$

$$-5 \le x \le 3$$

Tedy $D_2 = \langle -5,3 \rangle$.



Celkem $D = \langle -5,0)$.

Příklad 5: Určete definiční obor funkce. $y = \sqrt[3]{x+2} - \arccos\frac{x}{x-2}$.

Řešení : Odmocnina lichého stupně je definovaná pro všechna reálná čísla a argument funkce arkuskosinus musí ležet v intervalu $\langle -1,1 \rangle$. Musí tedy platit $-1 \le \frac{x}{x-2} \le 1$.

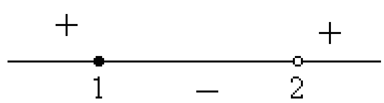
Vzhledem k tomu, že v tomto případě není možné obě nerovnice vynásobit výrazem $x-2$ (museli bychom provádět diskusi je-li kladný nebo záporný), budeme řešit každou z nerovnic zvlášť.

a) $-1 \le \frac{x}{x-2}$,

$0 \le \frac{x}{x-2} + 1$,

$0 \le \frac{2x-2}{x-2}$.

Najdeme nulové body zlomku $\frac{2x-2}{x-2}$ (jsou to hodnoty $x_1 = 1$ a $x_2 = 2$) a určíme znaménko zlomku na intervalech $(-\infty,1\rangle, \langle 1,2), (2,\infty)$:



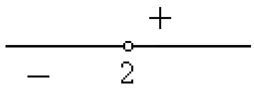
Tedy $D_1 = (-\infty,1\rangle \cup (2,\infty)$.

b) $\frac{x}{x-2} \le 1$,

$\frac{x}{x-2} - 1 \le 0$,

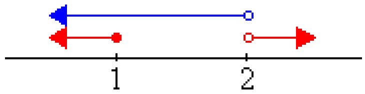
$\frac{2}{x-2} \le 0$.

Najdeme nulové body zlomku $\frac{2}{x-2}$ (je to hodnota $x = 2$) a určíme znaménko zlomku na intervalech $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$:



Tedy $D_2 = (-\infty, \infty)$.

Definiční obor zadané funkce dostaneme jako průnik intervalů D_1 a D_2. Celkem tedy $D = (-\infty, 1\rangle$.



Příklad 6: Určete definiční obor funkce $y = \ln\left(\ln(16 - 2x - x^2)\right) + \operatorname{arctg} 3x$.

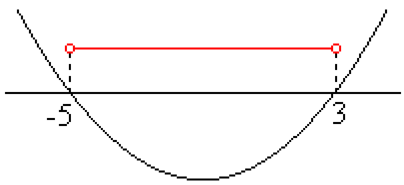
Řešení : Argument logaritmické funkce musí být kladný, tedy $\ln\left(16 - 2x - x^2\right) > 0$ a $16 - 2x - x^2 > 0$.

Logaritmus je kladný, pokud argument je větší než jedna, tedy $16 - 2x - x^2 > 1$. Porovnáním obou podmínek vidíme, že stačí řešit pouze tuto nerovnici. Nejprve ji upravíme na tvar $0 > x^2 + 2x - 15$.

Určíme kořeny kvadratického výrazu (rozkladem nebo pomocí vzorce) :

$$x^2 + 2x - 15 = (x-3)(x+5) \Rightarrow x_1 = -5,\ x_2 = 3$$

Vzhledem k tomu, že koeficient u x^2 je kladný, jde o parabolu otevřenou nahoru.



Tedy $D = (-5, 3)$.