**Příklad :** Vyšetřete průběh funkce : a) $f: y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$, b) $f: y = \dfrac{x^2}{x-1}$, c) $f: y = \dfrac{\ln x}{2x}$ a načrtněte graf.

**Řešení :**

a) $f: y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$, $D(f) = \mathbf{R}$.

$f(-x) = (-x)^4 - 4.(-x)^3 + 4.(-x)^2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 \neq \pm f(x) \Rightarrow$ funkce $f$ není sudá ani lichá.

Zjistíme chování funkce v krajních bodech definičního oboru :

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4 - 4x^3 + 4x^2) = \infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4 - 4x^3 + 4x^2) = +\infty$.

Průsečík s osou $y$ : $x = 0 \Rightarrow y = 0$, $P_y = [0, 0]$.

Průsečíky s osou $x$ získáme řešením rovnice $x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2.(x^2 - 4x + 4) = 0$.

Řešení rovnice je $x_1 = 0,\ x_{2,3} = 2$. Tedy $P_x = [0, 0], [2, 0]$.

Pro $x \in (0, 2)$ je $f(x) < 0$ a pro $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ je $f(x) > 0$.

Při vyšetřování monotónnosti a lokálních extrémů určíme nejprve první derivaci

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x.(x^2 - 3x + 2) = 4x.(x-1).(x-2)$$

a stacionární body : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2$.

Body, ve kterých není derivace definována, funkce nemá.

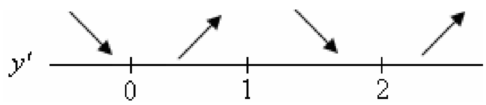
Na získaných třech intervalech vyšetříme monotónnost funkce :

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x.(x-1).(x-2) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1) \cup (2, \infty)$,

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 4x.(x-1).(x-2) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2)$.

Tedy funkce je rostoucí v intervalech $(0, 1)$ a $(2, \infty)$, klesající v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(1, 2)$.

Lokální minimum má v bodech $x = 0$, $f(0) = 0$ a $x = 2$, $f(2) = 0$, lokální maximum v bodě $x = 1$, $f(1) = 1$.



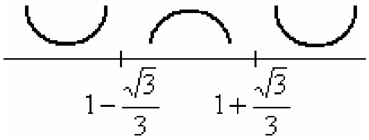

Pro vyšetření konvexity a konkávity vypočítáme druhou derivaci a najdeme její nulové body :

$f''(x) = 12x^2 - 24x + 8 = 4.(3x^2 - 6x + 2) \Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{3} = 1 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Na intervalech $\left(-\infty, 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}, 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$ vyšetříme konvexitu a konkávitu :

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$ a $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}, 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Konkávitu a konvexitu vyjádříme pomocí diagramu :




Inflexní bod nastává v bodech $x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

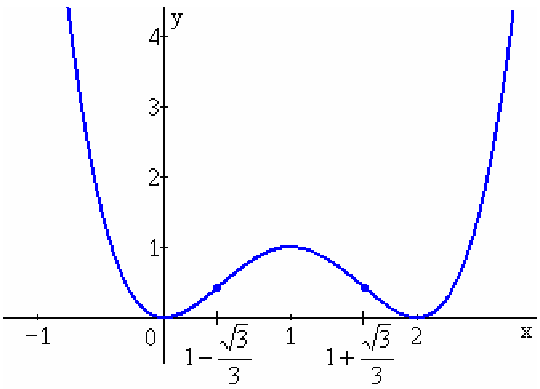
Asymptoty bez směrnice neexistují, protože $D(f) = \mathbf{R}$ a funkce je všude spojitá. Asymptoty se směrnicí graf funkce také nemá , protože

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x^3 - 4x^2 + 4x\right) = \pm\infty$$

Tabulka význačných hodnot :

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $9$ | $0$ | $1$ | $0$ | $9$ |

Na základě všech zjištěných vlastností funkce načrtneme její graf :




b) $f : y = \frac{x^2}{x-1}$, $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

Funkce není ani sudá ani lichá, protože není definována v 1, ale v –1 ano.
Zjistíme chování funkce v krajních bodech definičního oboru :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{1-0} = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{+\infty}{1-0} = +\infty,$$

a v bodě nespojitosti $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$, $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$.

Průsečík s osou $y$ $P_y = [0, 0]$ získáme dosazením $x = 0$ do funkční rovnice.

Průsečík s osou $x$ získáme řešením rovnice $\frac{x^2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Tedy $P_x = P_y = [0, 0]$.

Pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ je $f(x) < 0$ a pro $x \in (1, +\infty)$ je $f(x) > 0$.

Pro výpočet monotónnosti a lokálních extrémů určíme první derivaci

$$f'(x) = \frac{2x.(x-1) - x^2.1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \ .$$

Pomocí ní určíme stacionární body

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \, .$$

Stacionární body jsou tedy body $x_1 = 0, x_2 = 2$ .

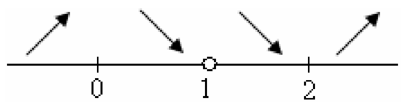
První derivace není definovaná v bodě $x_3 = 1$.

Na získaných třech intervalech vyšetříme monotónnost funkce :

$f'(x) \rangle\ 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ a $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1) \cup (1, 2)$.

Tedy funkce je rostoucí v intervalech $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$ a klesající v intervalech $(0, 1)$, $(1, 2)$.

Funkce má tedy lokální maximum v bodě $x = 0$ , $f(0) = 0$ a lokální minimum v bodě $x = 2$ , $f(2) = 4$ .



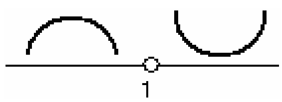

Pro vyšetření konvexnosti a konkávnosti vypočítáme druhou derivaci :

$$f''(x) = \frac{(2x-2).(x-1)^2 - (x^2 - 2x).2.(x-1).1}{(x-1^4)} = \frac{2}{(x-1)^3} \, .$$

Nulové body druhá derivace nemá a není definovaná v bodě $x = 1$. Na získaných dvou intervalech vyšetříme konvexitu a konkávitu :

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty) \text{ a } f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1).$$

Tedy funkce je konvexní v intervalu $(1, +\infty)$ a konkávní v intervalu $(-\infty, 1)$. Inflexní bod funkce nemá.




Asymptota bez směrnice má rovnici $x = 1$, protože $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$ a $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$ .

Asymptotu se směrnicí $y = kx + q$ vypočítáme pomocí limit :

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1,$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[ \frac{x^2}{x-1} - x \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \, .$$

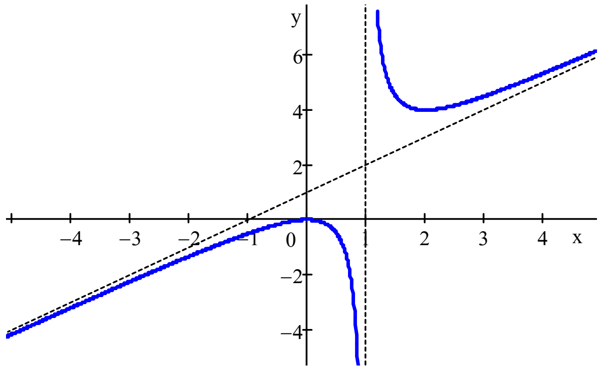
Tedy graf funkce $f$ má asymptotu se směrnicí o rovnici $y = x + 1$.

Tabulka význačných hodnot :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $0$ | $2$ | $\frac{3}{2}$ | $-1$ |
| $y$ | $0$ | $4$ | $\frac{9}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |

.

Na základě všech zjištěných vlastností funkce načrtneme její graf :




c) $f : y = \dfrac{\ln x}{2x}$, $D(f) = (0, +\infty)$, proto funkce není ani sudá ani lichá.

Zjistíme chování funkce v krajních bodech definičního oboru :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{2x} = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{2x} = 0 .$$

Průsečík s osou $y$ neexistuje ( $x \neq 0$ ), průsečík s osou $x$ získáme řešením rovnice

$\dfrac{\ln x}{2x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ . Tedy $P_x = [1, 0]$.

Pro $x \in (0, 1)$ je $f(x) < 0$ a pro $x \in (1, +\infty)$ je $f(x) > 0$ .

Pro výpočet monotónnosti a lokálních extrému určíme derivaci

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot 2x - \ln x.2}{4x^2} = \frac{2 - 2\ln x}{4x^2} = \frac{1 - \ln x}{2x^2},$$

a řešením rovnice $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1 - \ln x}{2x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$ určíme stacionární bod $x = e$.

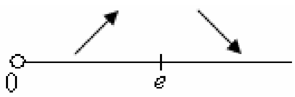
Na získaných dvou intervalech vyšetříme monotónnost funkce

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{2x^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow x < e ,$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{2x^2} < 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow x > e .$$

Funkce je rostoucí v intervalu $(0, e)$ a klesající v intervalu $(e, +\infty)$.

Lokální maximum nastává v bodě $x = e$, $f(e) = \dfrac{1}{2e}$.



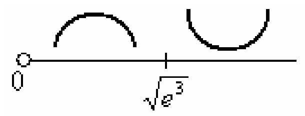
Pro vyšetření konvexity a konkávity vypočítáme druhou derivaci

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}.2x^2-(1-\ln x).4x}{4x^4}=\frac{-2x-4x+4x\ln x}{4x^4}=\frac{2x.(2\ln x-3)}{4x^4}=\frac{2\ln x-3}{2x^3}$$

a najdeme její nulové body : $f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x-3}{2x^3}=0 \Leftrightarrow 2\ln x-3=0 \Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$.

Na získaných dvou intervalech vyšetříme konvexitu a konkávitu :

$f''(x)>0 \Leftrightarrow x>e^{\frac{3}{2}}$ a $f''(x)<0 \Leftrightarrow x<e^{\frac{3}{2}}$. Z toho plyne, že pro $x\in\left(0,e^{\frac{3}{2}}\right)$ je funkce konkávní a pro $x\in\left(e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$ je funkce konvexní. V bodě $x=e^{\frac{3}{2}}$ má funkce $f$ inflexní bod.




Určení asymptot.

Vzhledem k tomu, že $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{2x}=-\infty$, asymptota bez směrnice existuje a má rovnici $x=0$.

Asymptotu se směrnicí vypočítáme pomocí limit :

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln x}{2x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{4x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4x^2}=0,$$

$$q=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln x}{2x}-0.x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0.$$

To znamená, že graf funkce $f$ má asymptotu se směrnicí o rovnici $y=0$.

Tabulka význačných hodnot :

| $x$ | $1$ | $e$ | $e^{\frac{3}{2}}$ | $e^2$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $0$ | $\frac{1}{2e}$ | $\frac{3.\sqrt{e}}{e^2}$ | $\frac{1}{e^2}$ |

.

Na základě všech zjištěných vlastností funkce načrtneme její graf :