Příklad : Vyšetřete monotónnost funkce (tj. určete intervaly růstu a klesání funkce) :

a) $f: y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$,

b) $g: y = \dfrac{x^2}{x-1}$,

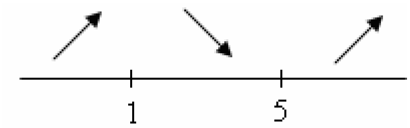
c) $h: y = x^2 . e^{-x}$.

Řešení :

a) $f: y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$

$D(f) = \mathbf{R}$. Vypočítáme první derivaci funkce f: $y' = 3x^2 - 18x + 15$.

Stacionární body určíme řešením kvadratické rovnice $3x^2 - 18x + 15 = 0$. Jsou to body $x_1 = 1, x_2 = 5$. Vzhledem k tomu, že první derivace je kvadratická funkce, jejímž grafem je parabola otevřená směrem nahoru a protínající osu x v bodech $x_1 = 1, x_2 = 5$, můžeme monotónnost vyjádřit diagramem



b) $g: y = \dfrac{x^2}{x-1}$

$D(g) = \mathbf{R} / \{1\}$. Vypočítáme první derivaci funkce $g(x)$ a upravíme ji :

$$g'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

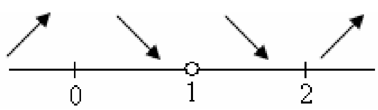
Určíme nulové body první derivace : $\dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$.

Jsou to body $x_1 = 0,\ x_2 = 2$. Funkce $g(x)$ může měnit monotónnost také v bodě, v kterém derivace neexistuje. Je to bod $x_3 = 1$.

<u>První způsob vyšetřování monotónnosti</u> :

Řešíme nerovnice $\dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} < 0$ a $\dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} > 0$.

Vzhledem k tomu, že jmenovatel je vždy kladný, budeme se zabývat pouze znaménkem čitatele. Parabola $x^2 - 2x$ je otevřená směrem nahoru a protíná osu x v bodech $x_1 = 0,\ x_2 = 2$. První derivace je tedy v intervalu $(0, 1) \cup (1, 2)$ záporná a v intervalu $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ kladná. Znaménko první derivace a monotónnost funkce vyjádříme diagramem :

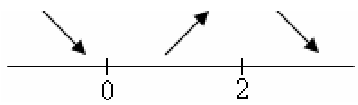


Druhý způsob vyšetřování monotónnosti :
Vypočítáme znaménka derivace $g'(x)$ v jednotlivých intervalech :
v intervalu $(-\infty, 0)$ zvolíme $x = -1$: $g'(-1) > 0$,
v intervalu $(0, 1)$ zvolíme $x = \frac{1}{2}$: $g'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$,
v intervalu $(1, 2)$ zvolíme $x = \frac{3}{2}$: $g'\left(\frac{3}{2}\right) < 0$,
v intervalu $(2, \infty)$ zvolíme $x = 3$: $g'(3) > 0$.
Funkce $g(x)$ je rostoucí v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(2, +\infty)$, klesající v intervalech $(0, 1)$ a $(1, 2)$.

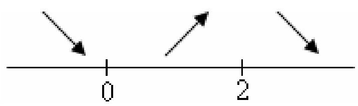
Druhý způsob byl pracnější, protože bylo potřeba určovat hodnotu první derivace v bodech ve tvaru zlomků.

c) $h : y = x^2 . e^{-x}$
$D(h) = \mathbf{R}$. Vypočítáme první derivaci funkce $h(x)$: $h'(x) = 2x.e^{-x} - x^2.e^{-x}$ a pak nulové body první derivace : $2.x.e^{-x} - x^2.e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x.e^{-x}.(2 - x) = 0$. Nulovými body tedy jsou body $x_1 = 0,\ x_2 = 2.$ Protože první derivace funkce je definovaná pro všechna $x \in \mathbf{R}$, může se monotónnost měnit pouze v nulových bodech první derivace.

První způsob vyšetřování monotónnosti :
Řešíme nerovnice $e^{-x}.(2x - x^2) < 0$ a $e^{-x}.(2x - x^2) > 0$. Výraz e^{-x} má vždy kladnou hodnotu, budeme se proto zabývat jen znaménkem funkce $2x - x^2$. Jejím grafem je parabola otevřená směrem dolů, která protíná osu x v bodech $x_1 = 0,\ x_2 = 2$. Znaménko první derivace je tedy možné vyjádřit diagramem :



Druhý způsob vyšetřování monotónnosti :
Určíme znaménka první derivace v jednotlivých intervalech.
Pro $x \in (-\infty, 0)$, zvolíme $x = -1 : h'(-1) < 0$,
pro $x \in (0, 2)$, zvolíme $x = 1 : h'(1) > 0$,
pro $x \in (2, +\infty)$, zvolíme $x = 3 : h'(3) < 0$.
Funkce $h(x)$ je rostoucí v intervalu $(0, 2)$ a klesající v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(2, +\infty)$.



Příklad : Najděte lokální extrémy funkce : a) $g: y = \frac{x^2+1}{x}$, b) $f: \ y = e^x + e^{-x}$.

Řešení : a) $g: y = \frac{x^2+1}{x}$**,** $D(g) = \mathbf{R}/\{0\}$.

Vypočítáme první derivaci funkce $g(x)$ a upravíme ji :

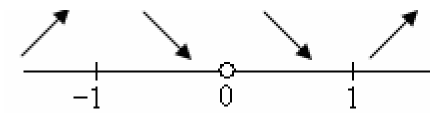
$g'(x) = \frac{2x.x-(x^2+1).1}{x^2} = \frac{2x^2-x^2-1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$.

Určíme nulové body první derivace : $\frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow (x+1).(x-1) = 0$.

Jsou to body $x_1 = -1,\ x_2 = 1$. Funkce $g(x)$ může měnit monotónnost také v bodě, v kterém derivace neexistuje. Je to bod $x_3 = 0$.

Řešíme nerovnice $\frac{x^2-1}{x^2} < 0$ a $\frac{x^2-1}{x^2} > 0$.

Vzhledem k tomu, že jmenovatel je vždy kladný, budeme se zabývat pouze znaménkem čitatele. Parabola x^2-1 je otevřená směrem nahoru a protíná osu x v bodech $x_1 = -1,\ x_2 = 1$. První derivace je tedy v intervalu $(-1, 0) \cup (0, 1)$ záporná a v intervalu $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ kladná. Znaménko první derivace a monotónnost funkce vyjádříme diagramem :



V bodě $x_1 = -1$ nastává tedy lokální maximum a v bodě $x_2 = 1$ lokální minimum.

b) $f: y = e^x + e^{-x}$**,** $D(f) = \mathbf{R}$.

Vypočítáme první derivaci zadané funkce $f'(x) = e^x + e^{-x}.(-1) = \frac{e^{2x}-1}{e^x}$, určíme její stacionární body a body, ve kterých derivace neexistuje :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x}-1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = 0 .$$

Stacionárním bodem je tedy bod $x = 0$.

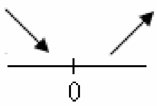
První derivace je definovaná pro všechna $x \in \mathbf{R}$.

Zda v bodě $x = 0$ nastane lokální extrém, zjistíme podle znaménka $f'(x)$.

To určíme řešením nerovnic $\frac{e^{2x}-1}{e^x} > 0$ (< 0). Vzhledem k tomu, že exponenciální funkce e^x nabývá pouze kladných hodnot, stačí se zabývat pouze čitatelem :

$$e^{2x}-1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow e^{2x} > e^0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0 .$$

Podobně bychom dostali $e^{2x}-1 < 0 \Leftrightarrow x < 0$.



Protože v levém okolí bodu $x = 0$ funkce klesá a v pravém okolí tohoto bodu funkce roste, nastává podle věty 6.7. v bodě $x = 0$ lokální minimum.
Hodnota funkce v bodě lokálního minima je $f(0) = e^0 + e^0 = 2$.
(Řešení nerovnic bychom se mohli vyhnout určením znaménka první derivace v intervalech $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$ dosazením : $f'(-1) = e^{-1} - e = \frac{1-e^2}{e} < 0$, $f'(1) = e - e^{-1} = \frac{e^2-1}{e} > 0$).

Příklad : Určete absolutní extrémy funkce $f : y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ na intervalu $\langle -2, 1 \rangle$.

Řešení : Funkce $f(x)$ je na daném uzavřeném intervalu spojitá, proto bude mít absolutní extrémy v bodech lokálních extrémů nebo v krajních bodech intervalu $\langle -2, 1 \rangle$. Určíme tedy hodnoty funkce v bodech lokálních extrémů a porovnáme je s funkčními hodnotami v krajích bodech intervalu $\langle -2, 1 \rangle$.

$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0 \Leftrightarrow 5x^2.(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow 5x^2.(x-3).(x-1) = 0$

Stacionární body, ležící v intervalu $\langle -2, 1 \rangle$ jsou čísla $x_1 = 0,\ x_2 = 1$ (tento bod je současně krajním bodem zadaného intervalu).

Porovnáním funkčních hodnot v bodech -2, 0, 1

$f(-2) = -151$,

$f(0) = 1$,

$f(1) = 2$,

zjistíme, že funkce $f(x)$ má na intervalu $\langle -2, 1 \rangle$ absolutní minimum v bodě $x = -2$ a absolutní maximum v bodě $x = 1$, přičemž $f(-2) = -151, f(1) = 2$.