Příklad : Vyšetřete intervaly konvexity a konkávity a inflexní body funkce

a) $f: y = x^4 - 2x^3 + 1$,

b) $g: y = \dfrac{x-2}{(x-1)^2}$.

Řešení : a) $f: y = x^4 - 2x^3 + 1$

Budeme postupovat podobně jako při vyšetřování monotónnosti, jen místo s první derivací budeme pracovat s druhou derivací.

$D(f) = \mathbf{R}$. Nejprve vypočítáme $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$ a $f''(x) = 12x^2 - 12x$.

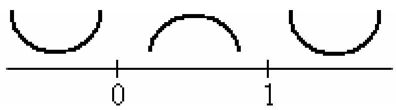
Vyšetříme, ve kterém intervalu platí $f''(x) > 0$, a ve kterém $f''(x) < 0$:

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12x > 0 \Leftrightarrow 12x.(x-1) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

Tedy funkce je konvexní v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(1, +\infty)$.

Pro $x \in (0, 1)$ je $f''(x) < 0$, tedy v intervalu $(0, 1)$ je funkce konkávní.

Symbolicky budeme konvexnost a konkávnost funkce vyjadřovat diagramem :



Inflexní body má funkce v bodech $x = 0$ a $x = 1$.

Funkční hodnoty v inflexních bodech jsou : $f(0) = 1$ a $f(1) = 0$.

b) $g: y = \dfrac{x-2}{(x-1)^2}$, $D(g) = \mathbf{R} / \{-1\}$.

Vypočítáme druhou derivaci :

$$y' = \frac{1.(x+1)^2 - (x-2).2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{x^2 + 2x + 1 - 2x^2 + 2x + 4}{(x+1)^4} = \frac{-x^2 + 4x + 5}{(x+1)^4} = \frac{-(x-5)(x+1)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{5-x}{(x+1)^3},$$

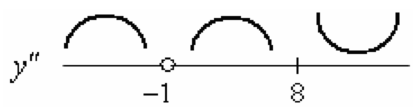
$$y'' = \frac{-(x+1)^3 - (5-x).3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{-(x+1) - (5-x).3}{(x+1)^4} = \frac{-x - 1 - 15 + 3x}{(x+1)^4} = \frac{2x-16}{(x+1)^4} .$$

Druhá derivace je rovna nule pro $x = 8$ a neexistuje pro $x = -1$.

Při řešení nerovnic $\dfrac{2x-16}{(x+1)^4} \lessgtr 0$ se stačí omezit jen na znaménko čitatele.

$\dfrac{2x-16}{(x+1)^4} > 0 \Leftrightarrow 2x - 16 > 0 \Leftrightarrow x > 8$, $\dfrac{2x-16}{(x+1)^4} < 0 \Leftrightarrow 2x - 16 < 0 \Leftrightarrow x < 8$.

Znaménka druhé derivace a tedy konvexitu a konkávitu lze vyjádřit diagramem



Inflexní body má funkce v bodech $x = -1$ a $x = 8$, kde $f(-1) = -\dfrac{3}{4}$ a $f(8) = \dfrac{6}{49}$.