Příklad 1: Vypočtěte $\int \frac{2}{(5x+7)^2}\,dx$

Máme integrovat složenou funkci, jejíž vnější složkou je mocnina a vnitřní lineární funkce.

Vnitřní složku nahradíme novou proměnnou:

$$\int \frac{2}{(5x+7)^2}\,dx = \left| \begin{array}{r} 5x+7=t \\ 5dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{5} \end{array} \right| = \int \frac{2}{t^2}\frac{dt}{5} = \frac{2}{5}\int t^{-2}dt = \frac{2}{5}\cdot\frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{t} = -\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5x+7} = \frac{-2}{25x+35} + C$$

Poznámka: je-li vnitřní složkou lineární funkce $ax+b$ je vhodnější použít přímo vzorec V9.

Příklad 2: Vypočtěte $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

V čitateli je složená funkce s vnější složkou $(\ )^2$ a vnitřní $\ln x$. V integrované funkci je i derivace logaritmu, proto

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \left| \begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \dfrac{1}{x}dx \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + C\,.$$

Příklad 3: Vypočtěte $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(2+\sin x)^2}}\,dx$

Je to integrál složené funkce, vnější složkou je racionální mocnina a v integrálu je i derivace vnitřní složky.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(2+\sin x)^2}}\,dx = \left| \begin{array}{c} 2+\sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}} = \int t^{-\frac{2}{3}}dt = \frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = 3\cdot\sqrt[3]{t} = 3\cdot\sqrt[3]{2+\sin x} + C\,.$$

Příklad 4: Vypočtěte $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$

$$\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \left| \begin{array}{r} x^2-1=t \\ 2xdx = dt \\ xdx = \dfrac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int \sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\sqrt{t^3} = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} + C\,.$$

Příklad 5: Vypočtěte $\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,dx$

Ve jmenovateli je $\mathrm{e}^{2x} = (\mathrm{e}^x)^2$. Nahradíme tedy opět vnitřní složku novou proměnnou:

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,dx = \left| \begin{array}{c} \mathrm{e}^x = t \\ \mathrm{e}^x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg}(\mathrm{e}^x) + C\,.$$

Příklad 6: Vypočtěte $\int 6x^2 \operatorname{tg} x^3\,dx$

Integrujeme složenou funkci, jejíž vnější složkou je funkce $\operatorname{tg}()$, vnitřní x^3, proto nahradíme vnitřní složku.

$$\int 6x^2 \operatorname{tg} x^3\,dx = \left| \begin{array}{c} x^3 = t \\ 3x^2 dx = dt \end{array} \right| = 2\int \operatorname{tg} t\,dt = 2\int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt = -2\int \frac{-\sin t}{\cos t}\,dt = -2\ln|\cos t| = -2\ln\left|\cos x^3\right| + C$$

Integrace iracionálních funkcí

Některé integrály iracionálních funkcí lze řešit přímo pomocí vzorců, některé substitucí, podobně jako v příkladu 4. Pokud bude v integrované funkci odmocnina lineárního výrazu, zvolíme substituci tak, abychom ji odstranili a tím převedli iracionální funkci na racionální lomenou (případně polynom).

Příklad 7: $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$.

Nahradíme odmocninu novou proměnnou, potom dosadíme do funkce (včetně diferenciálu integrační proměnné) a získanou funkci upravíme.

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x+1} = t \\ x+1 = t^2 \\ x = t^2-1 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right| = \int \frac{t+1}{t-1}\cdot 2t\,dt = 2\int \frac{t^2+t}{t-1}\,dt =$$

Po substituci máme integrál z neryze lomené racionální funkce. Tu rozložíme dělením, potom dostaneme $2\cdot\int\left(t+2+\frac{2}{t-1}\right)dt = 2\cdot\left(\frac{1}{2}t^2+2t+2\ln|t-1|\right) = t^2+4t+4\ln|t-1| =$

Zbývá dosadit původní proměnnou : $= x+1+4\sqrt{x+1}+4\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right| + C$.

Příklad 8: $\int \frac{x-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}\,dx$.

Mohli bychom funkci rozložit na dva zlomky a upravit, ale substituci bychom na řešení stejně museli použít, proto budeme počítat přímo.

$$\int \frac{x-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}\,dx = \left| \begin{array}{r} \sqrt{x-2}=t \\ x-2=t^2 \\ x=t^2+2 \\ dx=2tdt \end{array} \right| = \int \frac{t^2+2-t}{t}2t\,dt = 2\int \left(t^2+2-t\right)dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3}+2t-\frac{t^2}{2}\right) = \frac{2}{3}t^3+4t-t^2 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-2}\right)^3+4\sqrt{x-2}-(x-2)+C$$

Výsledek je ve tvaru, který vyšel po dosazení za *t*. Ale protože hledáme primitivní funkci, která je určena až na konstantu, mohli bychom výsledek zapsat ve tvaru

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-2}\right)^3+4\sqrt{x-2}-x+C \ .$$

Příklad 9: Vypočtěte $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+4}}\,dx$

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+4}}\,dx = \left| \begin{array}{r} \sqrt[3]{x+4}=t \\ x+4=t^3 \\ x=t^3-4 \\ dx=3t^2dt \end{array} \right| = \int \frac{t^3-4}{t}3t^2dt = 3\int (t^4-4t)dt = 3\left(\frac{t^5}{5}-4\frac{t^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{3}{5}t^5-6t^2 = \frac{3}{5}\left(\sqrt[3]{x+4}\right)^5-6\left(\sqrt[3]{x+4}\right)^2+C$$

Integrace goniometrických funkcí

Příklad 10 : $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$

Při řešení můžeme tento příklad chápat jako integrál ze složené funkce, kde máme i derivaci vnitřní složky, nebo si uvědomíme, že $\int R(\sin x)\cdot \cos x\,dx$ řešíme substitucí $t=\sin x$

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x\,dx = \left| \begin{array}{c} t=\sin x \\ dt=\cos x dx \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{3}\sin^3 x + C \, .$$

Příklad 11 : $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4\cos x} dx$

$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4\cos x} dx = \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{t^2 - 4t}(-dt) =$ doplníme kvadratický dvojčlen ve jmenovateli na čtverec a potom funkci upravíme, abychom mohli použít V13.

$= \int \frac{1}{(t-2)^2 - 4}(-dt) = \int \frac{1}{4-(t-2)^2} dt = ..\text{V13}.. = \frac{1}{2 \cdot 2} \ln\left|\frac{2+(t-2)}{2-(t-2)}\right| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t}{4-t}\right| =$

Zbývá dosadit zpět původní proměnnou

$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos x}{4-\cos x}\right| + C$.

Příklad 12 : $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$

Lichou mocninu v čitateli rozepíšeme na součin sudé mocniny a první mocniny a potom sudou mocninu nahradíme vztahem pro $\sin x$.

$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cdot \cos x}{\sin^2 x} dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1-t^2}{t^2} dt =$

Po substituci máme integrál z neryze lomené racionální funkce. Není třeba dělit, rozložíme ji na dva zlomky.

$= \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{t^2}{t^2} \right) dt = \int \left(t^{-2} - 1 \right) dt = \frac{t^{-1}}{-1} - t = -\frac{1}{t} - t = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C$.

Příklad 13 : $\int \frac{1}{\cos x} dx$

Nejdříve integrovanou funkci rozšíříme $\cos x$: $\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx$

Je vidět, že substituce bude $t = \sin x$, ale musíme ještě upravit jmenovatel zlomku.

$= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{1-t^2} =$ ..podle V13..

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C$.