Metodu per partes používáme pro **integraci některých součinů** funkcí. Například součin dvou polynomů nebudeme integrovat touto metodou, ale provedeme násobení, upravíme výslednou funkci a integrujeme pomocí základních vzorců a pravidel.

Příklad 1: $\int x^3 \cdot \ln x \, dx$

Vzhledem k tomu, že funkci $\ln x$ „ neumíme integrovat" (tedy nemáme k dispozici vzorec), volíme ji za nederivovanou funkci (a budeme ji derivovat) a funkci x^3 volíme za derivovanou funkci (a budeme ji integrovat) :

$$\int x^3 \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u' = x^3 & u = \dfrac{x^4}{4} \\ v = \ln x & v' = \dfrac{1}{x} \end{array} \right| = \frac{1}{4} x^4 \ln|x| - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{4} x^4 \ln|x| - \frac{1}{4} \int x^3 dx =$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \cdot \ln|x| - \frac{1}{16} x^4 + C .$$

Příklad 2: $\int (x^2 + 1) \cdot e^{2x} dx$

Umíme integrovat oba činitele, ale funkce $x^2 + 1$ se derivací více zjednoduší, proto ji volíme za nederivovanou.

$$\int \left(x^2 + 1\right) e^{2x} dx = \left| \begin{array}{ll} u' = e^{2x} & u = \dfrac{1}{2} e^{2x} \\ v = x^2 + 1 & v' = 2x \end{array} \right| = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot \left(x^2 + 1\right) - \int \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2x dx =$$

konstanty v integrálu se vykrátí a metodu per partes použijeme opakovaně

$$= \left| \begin{array}{ll} u' = e^{2x} & u = \dfrac{1}{2} e^{2x} \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \left(x^2 + 1\right) e^{2x} - \left[\frac{1}{2} e^{2x} \cdot x - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left(x^2 + 1\right) e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x^2 + 1 - x + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x^2 - x + \frac{3}{2} \right) + C .$$

Příklad 3: $\int \operatorname{arctg} x \, dx$

Pokud při integraci součinu metodou per partes jeden činitel „chybí", lze ho nahradit konstantní funkcí $u(x) = 1$.

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = \int 1\cdot \operatorname{arctg} x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & u = x \\ v = \operatorname{arctg} x & v' = \dfrac{1}{1+x^2} \end{array} \right| = x\cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x\cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = x\cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C\,.$$

Příklad 4: $\int e^x \cdot \cos x\,dx$

Jestliže opakovaným použitím metody per partes dostaneme během výpočtu znovu původní integrál, převedeme výpočet integrálu na řešení rovnice.

$$\int e^x \cos x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u' = \cos x & u = \sin x \\ v = e^x & v' = e^x \end{array} \right| = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u' = \sin x & u = -\cos x \\ v = e^x & v' = e^x \end{array} \right| = e^x \sin x - \left[-e^x \cos x - \int -e^x \cos x\,dx \right] =$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx\,.$$

Dále řešíme rovnici : $\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx$

$$2\int e^x \cos x\,dx = e^x(\sin x + \cos x)$$

Tedy celkem $\int e^x \cos x\,dx = \dfrac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C\,.$

Příklad 5: $\int 4x \cdot \sin 2x\,dx$

Goniometrická funkce se derivováním nezjednoduší. Budeme ji proto integrovat a derivovat polynom.

$$\int 4x\cdot \sin 2x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u' = \sin 2x & u = \dfrac{1}{2}(-\cos 2x) \\ v = 4x & v' = 4 \end{array} \right| = \frac{1}{2}(-\cos 2x)\cdot 4x - \int 4\cdot \frac{1}{2}(-\cos 2x)\,dx =$$

Po dosazení vždy nejdříve upravíme,především funkci, kterou ještě budeme integrovat.

$$= -2x\cos 2x + 2\int \cos 2x\,dx = -2x\cos 2x + 2\cdot \frac{1}{2}\sin 2x = -2x\cos 2x + \sin 2x + C\,.$$

Příklad 6: $\int (2x+1)\cdot \ln x^3 \, dx$

Na integraci logaritmické funkce nemáme vzorec a přitom derivací „přejde" na funkci racionální lomenou. Zvolíme ji proto za nederivovanou funkci a polynom $2x+1$ budeme integrovat :

$$\int (2x+1)\cdot \ln x^3 \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = 2x+1 & u = 2\dfrac{x^2}{2} + x = x^2 + x \\ v = \ln x^3 & v' = \dfrac{1}{x^3}\cdot 3x^2 = \dfrac{3}{x} \end{array} \right| = \left(x^2+x\right)\cdot \ln x^3 - \int \frac{3}{x}\left(x^2+x\right)dx =$$

$$= \left(x^2+x\right)\cdot \ln x^3 - 3\int \left(x+1\right)dx = \left(x^2+x\right)\cdot \ln x^3 - 3\left(\frac{x^2}{2}+x\right) + C\,.$$