Matice

Matice

Maticí **A** typu *m/n*, kde $m, n \in \mathbf{N}$, nazýváme *m.n* reálných čísel a_{ij}, sestavených do *m* řádků a *n* sloupců ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

První index *i* značí řádek a druhý index j sloupec, ve kterém prvek a_{ij} leží.

Prvky a_{ii}, které mají oba indexy stejné, tvoří hlavní diagonálu matice.

Druhy matic

- čtvercová matice řádu *n* je matice typu *n/n*,
- obdélníková matice typu *m/n* je matice, pro kterou platí $m \neq n$,
- transponovaná matice k matici **A** je matice, která vznikne z matice **A** záměnou řádků za sloupce při zachování jejich pořadí; značíme ji $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$,
- jednotková matice řádu *n* je čtvercová matice, která má na hlavní diagonále samé jedničky a všude jinde samé nuly; značíme ji $\mathbf{I}$, případně $\mathbf{I}_n$,
- stupňová matice je matice, jejíž každý následující řádek má na začátku alespoň o jednu nulu více než řádek předchozí.

Operace s maticemi

Součtem (rozdílem) matic **A** a **B**, které jsou stejného typu, je matice **C**, téhož typu, pro jejíž prvky platí $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$. Píšeme $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ ($\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$).

Součinem čísla $k \in \mathbf{R}$ a matice $\mathbf{A}$ je matice **B** téhož typu, pro jejíž prvky platí $b_{ij} = k.a_{ij}$. Píšeme $\mathbf{B} = k.\mathbf{A}$.

Součinem matice **A** typu *m/p* a matice **B** typu *p/n* je matice **C** typu *m/n*, pro jejíž prvky platí

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{kj} = \vec{\mathbf{a}}_i.\vec{\mathbf{b}}_j$ (jde o skalární součin řádku *i* matice **A** a sloupce *j* matice **B**). Píšeme $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

Součin matic není komutativní, tedy obecně $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Příklad: Jsou dány matice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 4\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

Vypočítejte matice $\mathbf{C}=3\mathbf{A}$, $\mathbf{D}=2\mathbf{B}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+4\mathbf{I}$, $\mathbf{E}=\mathbf{A.B}$.

Řešení : $\mathbf{C}=3\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 9\\ -9 & 12\end{pmatrix}$,

$$\mathbf{D}=2\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 4\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}+4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 4 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A.B}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.3+3.2 & 2.(-1)+3.0\\ -3.3+4.2 & -3.(-1)+4.0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Příklad: Určete matici **X** tak, aby platilo $\mathbf{X}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{3}\cdot\mathbf{A}$,

je-li $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -3 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Řešení : Nejprve vyjádříme matici $\mathbf{X}$ ze zadané rovnice $\mathbf{X}=\mathbf{3}\cdot\mathbf{A}-\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$.

Dále provádíme operace s maticemi :

$$3\cdot\mathbf{A}=3\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0 & 3\\ -3 & 3 & -6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix},$$

Pro násobení matic je možné použít následující pomůcku : do tabulky, která má 4 pole, napíšeme vpravo nahoru druhého činitele (v našem příkladě matici **A**), vlevo dolů prvního činitele (v našem příkladě matici **B**). Vpravo dole pak bude výsledná matice $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, jejíž prvky získáme jako skalární součiny řádků a sloupců, na jejichž průsečících prvek výsledné matice leží.

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -3 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{array}{ccc|ccc} & & & 2 & 0 & 1\\ & & & -1 & 1 & -2\\ & & & 1 & 2 & 3\\ \hline -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 4\\ -3 & 2 & 0 & -8 & 2 & -7\\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2\end{array}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$$

Rovnici $\mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{3} \cdot \mathbf{A}$ vyhovuje matice :

$$\mathbf{X} = \mathbf{3} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -8 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice

Řádky matice můžeme považovat za vektory, zapsané pod sebou. Důležitou charakteristikou matice je číslo, které vyjadřuje počet takto chápaných vektorů, které jsou lineárně nezávislé.

Hodnost matice **A** udává maximální počet lineárně nezávislých řádků této matice. Hodnost matice **A** značíme symbolem $h(\mathbf{A})$.
Dvě matice, které mají stejnou hodnost, se nazývají ekvivalentní a píšeme $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Poznámka : Vzhledem k tomu, že platí $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})$, můžeme v definici nahradit pojem řádek pojmem sloupec.

Například hodnost $h(\mathbf{A})$ matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je zřejmě 2, protože 1. a 4. řádek jsou lineárně nezávislé, a 2. resp. 3. řádek dostaneme z 1. řádku vynásobením číslem -1, resp. 2.

Většinou však není možné hodnost matice určit přímo ze zadané matice.
K výpočtu hodnosti pak používáme následující větu.

Věta o hodnosti stupňové matice

Hodnost matice ve stupňovém tvaru je rovna počtu nenulových řádků této matice (= počtu řádků, které neobsahují samé nuly).

Při určování hodnosti musíme tedy matici nejprve upravit na stupňový tvar. K tomu používáme tzv. ekvivalentní úpravy. Jsou to následující úpravy, které nemění hodnost matice :

- transponování matice,
- výměna řádků,
- násobení řádku nenulovým reálným číslem k,
- přičtení k-násobku ($k \neq 0$) některého řádku k jinému řádku,
- vynechání řádku, který obsahuje samé nuly,
- vynechání řádku, který je lineární kombinací ostatních řádků.

Uvedené úpravy je možné bez změny hodnosti provádět i se sloupci.

Příklad: Určete hodnost matice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 5 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 1\\ 5 & -2 & 5 & 0\end{pmatrix}$.

Řešení : Abychom určili hodnost matice, převedeme ji výše uvedenými úpravami na ekvivalentní stupňovou matici. Postupujeme přitom nejčastěji tak, že v prvním kroku vynulujeme první sloupec pod hlavní diagonálou. Je výhodné zadanou matici upravit nejprve na tvar, kdy prvek na místě $a_{11}=\pm 1$. Toho dosáhneme výměnou řádků nebo přičtením násobku vhodného řádku k prvnímu řádku. Nulové prvky pak vytváříme přičítáním násobků prvního řádku k dalším řádkům.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 5 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 1\\ 5 & -2 & 5 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}.(-1).(-2).(-5)\\ \hookleftarrow \qquad\qquad\\ \quad\hookleftarrow \qquad\\ \qquad\quad\hookleftarrow\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 5 & -1 & 2\\ 0 & -18 & 5 & -7\\ 0 & -9 & 5 & -3\\ 0 & -27 & 10 & -10\end{pmatrix}\updownarrow\sim$$

Postup dále opakujeme pro druhý sloupec s tím, že první řádek zůstává beze změny a klíčovým prvkem, pomocí něhož nulujeme ostatní, je prvek a_{22}.

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 5 & -1 & 2\\ 0 & -9 & 5 & -3\\ 0 & -18 & 5 & -7\\ 0 & -27 & 10 & -10\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ .(-2).(-3)\\ \hookleftarrow \qquad\\ \qquad\hookleftarrow\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 5 & -1 & 2\\ 0 & -9 & 5 & -3\\ 0 & 0 & -5 & -1\\ 0 & 0 & -5 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ .(-1)\\ \hookleftarrow\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 5 & -1 & 2\\ 0 & -9 & 5 & -1\\ 0 & 0 & -5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Tedy hodnost matice $h(\mathbf{A})=3$.

Poznámka : Pomocí hodnosti matice je možné rozhodnout o lineární závislosti či nezávislosti vektorů. Zapíšeme-li *k* vektorů do řádků matice, pak tyto vektory jsou lineárně nezávislé, právě když hodnost této matice je *k*. Pokud hodnost matice je menší než *k*, jsou vektory lineárně závislé.

Inverzní matice

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu *n*. Matice $\mathbf{X}$, pro kterou platí $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{I}_n$, se nazývá inverzní matice k matici $\mathbf{A}$. Budeme ji značit $\mathbf{A}^{-1}$.

Čtvercovou matici **A** řádu *n* nazveme regulární, právě když $h(\mathbf{A})=n$.

Z následující věty vyplývá, že inverzní matice (pokud existuje) je určena jednoznačně.

Existence a jednoznačnost inverzní matice

Ke čtvercové matici $\mathbf{A}$ existuje inverzní matice právě tehdy, když matice $\mathbf{A}$ je regulární. Matice $\mathbf{A}^{-1}$ je pak určena jednoznačně.

Inverzní matici můžeme určit dvěma způsoby.
První z nich je založen na ekvivalentních úpravách matic **A** a **I**.

Postupujeme tak, že napíšeme vedle sebe matici $\mathbf{A}$ a jednotkovou matici $\mathbf{I}$ stejného řádu. Takto vytvořenou „dvojmatici“ $(\mathbf{A}|\mathbf{I})$ upravujeme pomocí ekvivalentních úprav tak, aby na místě matice $\mathbf{A}$ vznikla jednotková matice. Napravo od ní pak automaticky vznikne matice $\mathbf{A}^{-1}$.

Metoda vychází z toho, že po vynásobení systému $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{I})$ maticí $\mathbf{A}^{-1}$ dostaneme vztah

$$(\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A}\,|\,\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{I}) = (\mathbf{I}\,|\,\mathbf{A}^{-1}).$$

Stručně lze tento postup zapsat takto : $(\mathbf{A}|\mathbf{I}) \sim \ldots \sim (\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1})$.

Druhý způsob určování inverzních matic (pomocí determinantů a adjungované matice) bude popsán později.

Příklad: Určete inverzní matici k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Řešení :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} .(-3)\,/\,.(-2) \\ .(2) \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ .(1)\,/.(2) \sim \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -4 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ .(-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 14 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 13 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} :2 \\ :(-1) \sim \\ :(-2) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & -\frac{1}{2} \end{array}\right). \text{ Inverzní matice } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ -13 & 6 & 2 \\ 4 & -2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$