Příklad 1: Vypočtěte $\mathbf{A}=2\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Řešení: Součet a rozdíl matic je definován pouze v případě, že počítáme s maticemi stejného typu. První dvě matice jsou typu 2/3, poslední je typu 3/2, ale po provedení transpozice bude také typu 2/3. První matici vynásobíme dvěma tak, že vynásobíme všechny její prvky. Poslední matici transponujeme, tj. 1. sloupec zapíšeme jako 1. řádek, 2. sloupec jako 2. řádek:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 6\\ -4 & 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}=$$

Rozdíl a součet provedeme tak, že odečteme a sečteme prvky se stejnými indexy.

$$=\begin{pmatrix}4-(-1)+1 & 2-1+0 & 6-0+4\\ -4-2+2 & 0-1+1 & 2-5+(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 1 & 10\\ -4 & 0 & -4\end{pmatrix}.$$

Příklad 2: Vypočtěte $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, jsou-li dány matice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -3 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

Řešení: Matice **A** je typu 2/3, matice **B** je typu 3/2. Součin $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ je tedy definován a výsledná matice bude typu 2/2. Její prvky dostaneme skalárním součinem řádků 1. matice a sloupců 2. matice. Podrobněji: Prvek ležící v 1. řádku a 1. sloupci vznikne součinem 1. řádku matice **A** a 1. sloupce matice **B**. Prvek ležící v 1. řádku a 2. sloupci vznikne součinem 1. řádku matice **A** a 2. sloupce matice **B**…

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -3 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+1\cdot(-1)+1\cdot0 & 2\cdot1+1\cdot2+1\cdot3\\ -3\cdot1+1\cdot(-1)+0\cdot0 & -3\cdot1+1\cdot2+0\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 7\\ -4 & -1\end{pmatrix}.$$

Při součinu $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ budeme násobit matici typu 3/2 maticí typu 2/3, operaci tedy můžeme provést a výsledek bude typu 3/3. Postup je stejný . Násobíme skalárně řádky 1. matice a sloupce 2. matice.

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -3 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2+1\cdot(-3) & 1\cdot1+1\cdot1 & 1\cdot1+1\cdot0\\ -1\cdot2+2\cdot(-3) & -1\cdot1+2\cdot1 & -1\cdot1+2\cdot0\\ 0\cdot2+3\cdot(-3) & 0\cdot1+3\cdot1 & 0\cdot1+3\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ -8 & 1 & -1\\ -9 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

Příklad 3: Vypočtěte součiny matic, je-li dáno $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 0 & 4 & 5\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

Řešení: Matice **A** je typu 2/3, matice **B** typu 2/2. Součin $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ tedy není definován. (Nemůžeme skalárně násobit vektory různých dimenzí. Řádek matice **A** má 3 prvky, zatímco sloupec matice **B** dva.)

Součin $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ definován je, protože v tomto pořadí budeme násobit matici typu 2/2 maticí typu 2/3. Výsledná matice bude typu 2/3.

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 0 & 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot(-1)+2\cdot 0 & 3\cdot(-2)+2\cdot 4 & 3\cdot 0+2\cdot 5\\ 1\cdot(-1)+4\cdot 0 & 1\cdot(-2)+4\cdot 4 & 1\cdot 0+4\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 10\\ -1 & 14 & 20\end{pmatrix}.$$

Příklad 4: Vypočtěte matici $\mathrm{X}=(3\mathbf{A}-\mathbf{I})\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, je-li dáno $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

Řešení: Připomeňme, že **I** je jednotková matice. Při řešení maticových rovnic se uvažuje automaticky stejného řádu, jako matice zadané. Výpočet provádíme postupně, nejdříve vypočítáme matici v závorce. Od trojnásobku matice **A** odečteme matici jednotkovou:

$$3\mathbf{A}-\mathbf{I}=\begin{pmatrix}3 & -12\\ 6 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -12\\ 6 & 2\end{pmatrix}.$$

$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 1\end{pmatrix}$ … zaměnili jsme řádky za sloupce při zachování jejich pořadí

Zbývá provést součin matic:

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix}2 & -12\\ 6 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1-12\cdot(-4) & 2\cdot 2-12\cdot 1\\ 6\cdot 1+2\cdot(-4) & 6\cdot 2+2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50 & -8\\ -2 & 14\end{pmatrix}.$$

Příklad 5: Řešte rovnici $\mathrm{X}-\mathbf{A}^2=2\mathbf{A}-\mathbf{B}$, je-li dáno $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

Řešení: Z rovnice nejdříve vyjádříme neznámou $\mathrm{X}=\mathbf{A}^2+2\mathbf{A}-\mathbf{B}$.

Dále vypočítáme $\mathbf{A}^2$. Pozor! Vzhledem k definici součinu matic netvoří prvky druhé mocniny prvků matice $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}^2=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0+0 & 0+0-1 & -1+0+2\\ 2+2+0 & 0+1+3 & -2+3-6\\ 0+2+0 & 0+1-2 & 0+3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 4 & 4 & -5\\ 2 & -1 & 7\end{pmatrix}$$

Mohli bychom si ještě připravit matici $2\mathbf{A}-\mathbf{B}$, ale dvojnásobek matice **A** napíšeme snadno a součet a rozdíl počítáme s prvky se stejnými indexy, proto výpočet dokončíme přímo.

$$\mathrm{X}=\mathbf{A}^2+2\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 4 & 4 & -5\\ 2 & -1 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 4 & 2 & 6\\ 0 & 2 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -5 & -2\\ 8 & 5 & -1\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

Příklad 6: Určete hodnost matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -7 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Řešení : Abychom určili počet lineárně nezávislých řádků matice **A**, převedeme ji ekvivalentními úpravami na stupňový tvar. Je výhodné, aby $a_{11} = 1$, proto vyměníme první a poslední řádek.

$$\mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -7 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

V prvním kroku vynulujeme prvky ležící pod diagonálou v 1. sloupci. Tedy první řádek opíšeme, druhý upravíme tak, že k němu 1. řádek přičteme. Na začátku třetího řádku získáme 0, když od tohoto řádku 1. řádek odečteme a poslední řádek bude mít v 1. sloupci 0, když k němu přičteme (-2) násobek prvního řádku.

$$\mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -7 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{lll} .(-1).(-2) & & \\ \hookleftarrow & & \\ & \hookleftarrow & \\ & & \hookleftarrow \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Matice ještě není stupňová, ale přesto bychom mohli udělat závěr. Protože řádky 2, 3 a 4 jsou lineárně závislé, můžeme dva z nich vyškrtnout a potom je zřejmé, že $h(\mathbf{A}) = 2$.

Pokud bychom tento fakt přehlédli, pokračovali bychom v úpravách matice. Ve druhém kroku nulujeme druhý sloupec pod diagonálou. (Poznámka: K úpravám používáme vždy řádek, který má na začátku stejný počet nul jako upravované. Bylo by praktické ponechat z řádků 2, 3, 4 ten poslední a 2. a 3. řádek upravit tak, že se k nim poslední přičte. Ale kvůli jednoduchosti zápisu budeme řádky upravovat přímo.) Od třetího řádku druhý odečteme, ke čtvrtému druhý přičteme:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} & \\ .(-1) & \\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice se určí jako počet nenulových řádků matice ve stupňovém tvaru, tj. $h(\mathbf{A}) = 2$.

Příklad 7: Rozhodněte, zda jsou vektory $\vec{\mathbf{v}}_1 = (0,2,1,1)$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = (1,1,1,1)$, $\vec{\mathbf{v}}_3 = (2,1,-1,-1)$, $\vec{\mathbf{v}}_4 = (3,1,2,1)$ lineárně závislé nebo nezávislé.

Řešení: Rozhodnout o závislosti resp. nezávislosti vektorů umíme i bez využití maticového počtu. Vytvoříme lineární kombinaci zadaných vektorů a položíme ji rovnu nulovému vektoru.

$k_1.\vec{\mathbf{v}}_1 + k_2.\vec{\mathbf{v}}_2 + k_3\vec{\mathbf{v}}_3 + k_4.\vec{\mathbf{v}}_4 = \vec{\mathbf{o}}$

Platí-li tento vztah pouze pro $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$, jsou vektory lineárně nezávislé. Jestliže vyjde alespoň jedno $k_i \neq 0$, jsou závislé.

Ale tento postup je pracný, protože bychom po rozepsání do složek dostali 4 rovnice o 4 neznámých.

Mnohem výhodnější je zapsat vektory jako řádky matice a zjistit její hodnost. Jestliže se během úprav matice některý řádek vynuluje, znamená to, že byl lineární kombinací ostatních a tedy soustava vektorů byla závislá. Jestliže hodnost bude rovna počtu vektorů, jsou lineárně nezávislé.

Zapíšeme vektory do matice a protože na pořadí řádků hodnost nezáleží, zapíšeme je hned v pořadí vhodném pro ekvivalentní úpravy, které budeme provádět:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} .(-2).(-3) \\ \\ \hookleftarrow \\ \quad\hookleftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \updownarrow \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ .(2).(-2) \\ \hookleftarrow \\ \quad\hookleftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \hookleftarrow \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad h = 4$$

Stupňová matice má 4 nenulové řádky, což znamená, že zadané vektory jsou lineárně nezávislé.