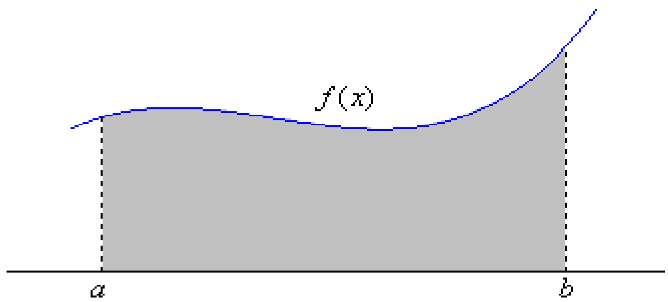
Geometrické aplikace určitého integrálu

Obsah rovinné oblasti

1. Je-li plocha ohraničena křivkou $f(x)$ a osou x

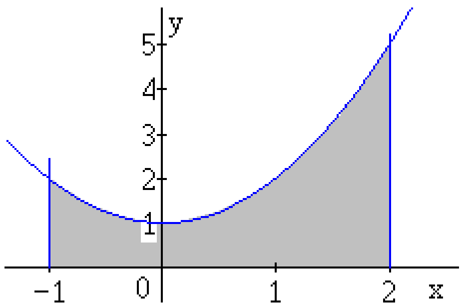
Při výpočtu obsahu takto omezených rovinných oblastí mohou nastat následující základní případy :

- Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ a pro $x \in \langle a,b\rangle$ platí $f(x) \geq 0$. Obsah obrazce, ohraničeného grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ se vypočítá pomocí vzorce $S = \int_a^b f(x)\,dx$.



Příklad: Určete obsah obrazce ohraničeného křivkami $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$.

Řešení: Nakreslíme náčrtek. Rovinný útvar je ohraničený grafem kvadratické funkce, tedy parabolou, osou x a dvěma přímkami rovnoběžnými s osou y.

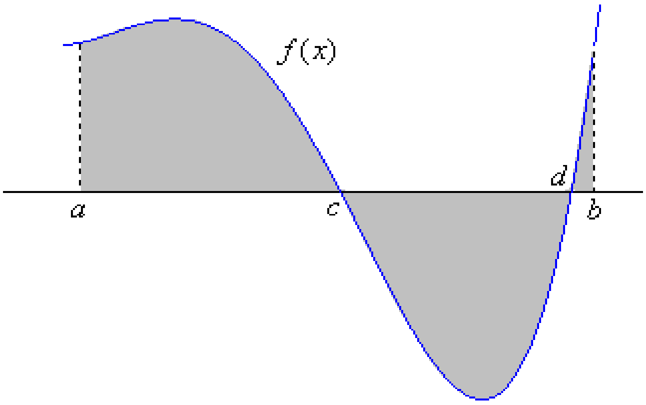


Jeho obsah se vypočítá jako určitý integrál funkce $y = x^2 + 1$ pomocí vzorce

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{8}{3} + 2\right) - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = 6\ [\mathrm{j}^2].$$

- Nechť funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ je zde záporná, nebo mění v tomto intervalu znaménko. Obsah příslušného obrazce se vypočítá pomocí vzorce $S = \int_a^b |f(x)|\,dx$.

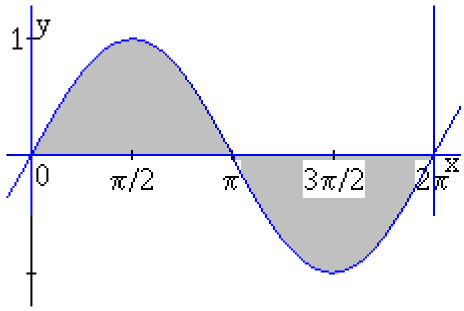
Při výpočtu určíme průsečíky funkce $f(x)$ s osou x a stanovíme intervaly, ve kterých platí $f(x) > 0$, a ve kterých je $f(x) < 0$. Na každém z těchto intervalů pak počítáme určitý integrál, přičemž v intervalech, ve kterých je funkce záporná, změníme znaménko funkce $f(x)$.



Např. pro oblast na obrázku je $S = \int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx.$

Příklad: Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného křivkami $y = \sin x,\ y = 0,\ x = 0,\ \ x = 2\pi$.

Řešení: Goniometrická funkce $y = \sin x$ je na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ spojitá a v bodě $x = \pi$ přechází z kladných do záporných hodnot.



Obsah daného obrazce vypočítáme podle vzorce :

$S = \int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx =$

$[-\cos x]_0^{\pi} - [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = (-\cos\pi + \cos 0) - \ -(-\cos 2\pi + \cos\pi) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4\ [j^2]$

Poznámka:

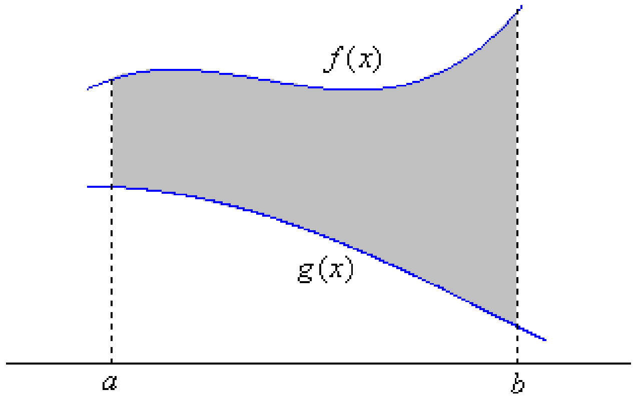
1) Protože část útvaru nad osou x je stejně velká jako část pod osou x, bylo by možné obsah celého útvaru počítat jako $S = 2\int_0^{\pi} \sin x\,dx$.

2) Rozlišujme výpočet obsahu obrazce a výpočet určitého integrálu. Při výpočtu určitého integrálu $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$ bychom postupovali takto :

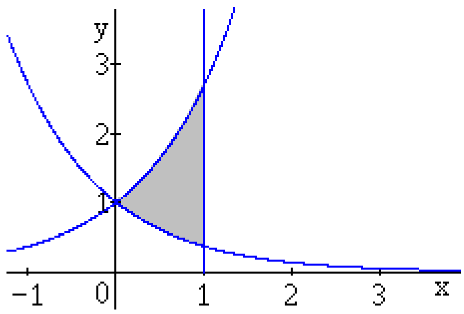
$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = (-\cos 2\pi) - (-\cos 0) = -1 + 1 = 0.$

2. Je-li plocha ohraničena dvěma křivkami

- Obsah rovinné oblasti ohraničené funkcemi $f(x)$ a $g(x)$, spojitými na intervalu $\langle a,b\rangle$, pro které na tomto intervalu platí $g(x) \le f(x)$, a dále přímkami $x = a$, $x = b$, se vypočítá pomocí vzorce $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$.



Příklad: Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného křivkami $y = \mathrm{e}^x$, $y = \mathrm{e}^{-x}$, $x = 1$.

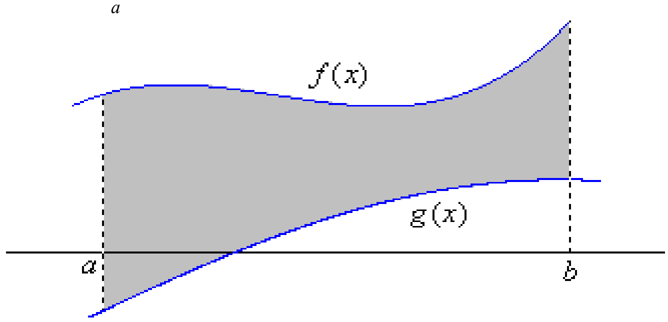


Řešení : Nakreslíme zadané funkce a získáme oblast, jejíž obsah máme určit.

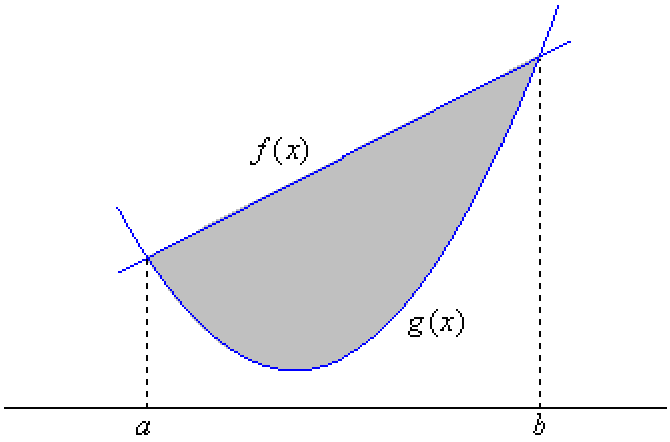
Dolní mez příslušného integrálu bude tvořit první souřadnice průsečíku grafů funkcí $y = \mathrm{e}^x$ a $y = \mathrm{e}^{-x}$. Grafy funkcí $y = \mathrm{e}^x$ a $y = \mathrm{e}^{-x}$ se protínají v bodě $[0, 1]$, dolní mezí integrálu bude tedy hodnota $x = 0$. Horní mez je hodnota $x = 1$. Protože graf funkce $y = \mathrm{e}^x$ leží „nad“ grafem funkce $y = \mathrm{e}^{-x}$, obsah plochy vypočítáme podle vzorce

$$S = \int_0^1 (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\,dx = \left[\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = \mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}} - 2 \;[\mathrm{j}^2] .$$

- Počítáme-li obsah plochy ohraničené dvěma křivkami, jejíž část leží pod osou x, použijeme stejný vzorec $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$



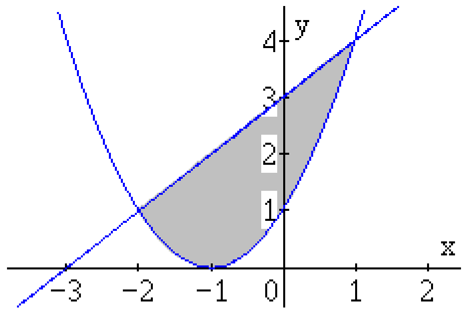
V případě, že nejsou explicitně dány meze integrálu, ale pouze křivky, které plochu ohraničují, vypočítají se meze jako x-ové souřadnice jejich průsečíků.



Poznámka: Pozor! Hledáme průsečíky grafů funkcí, tedy je-li křivka daná implicitně, je nutné nejdříve z předpisu vyjádřit explicitně funkci y.

Příklad: Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného křivkami $y = x^2 + 2x + 1$, $x - y + 3 = 0$.

Řešení : Druhá křivka je zadaná implicitně, upravíme si předpis na tvar $y = x + 3$. Nakreslíme zadané funkce a získáme plochu, jejíž obsah máme určit.



Meze příslušného určitého integrálu jsou x-ové souřadnice průsečíků obou křivek. Získáme je vyřešením rovnice $x^2 + 2x + 1 = x + 3$.

$$x^2 + x - 2 = 0$$

Tedy $(x+2)(x-1) = 0$.

$$x_1 = -2,\ x_2 = 1$$

Obsah plochy je potom

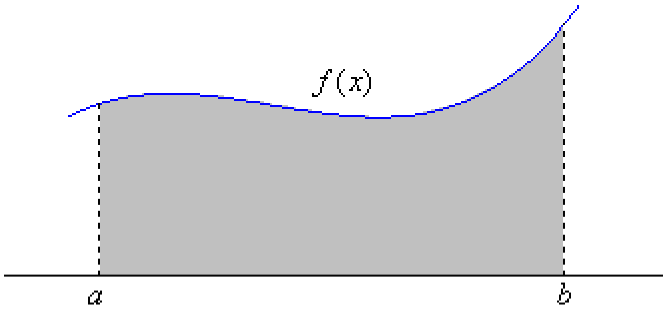
$$S = \int_{-2}^{1} (x+3) - (x^2 + 2x + 1)\, dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{1} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 -$$

$$-\left(-\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} - 4 \right) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 2 + 4 = 4{,}5 \left[\mathrm{j}^2 \right].$$

Objem rotačního tělesa

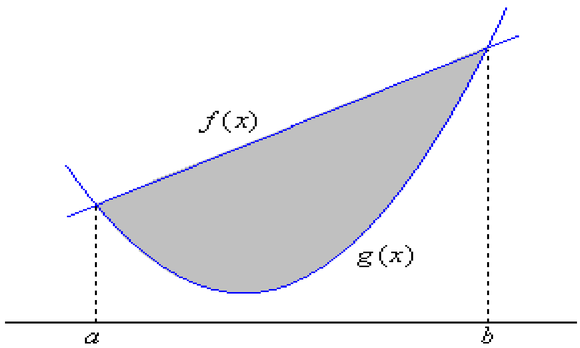
Objem tělesa, které vznikne rotací plochy, ohraničené grafem nezáporné funkce $f(x)$, spojité na intervalu $\langle a,b\rangle$, osou x a přímkami $x=a$, $x=b$ kolem osy x, se vypočítá pomocí vzorce

$$V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx.$$



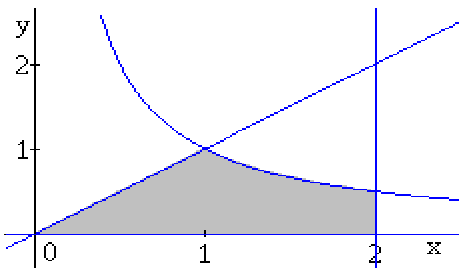
Objem tělesa, které vznikne otáčením plochy ohraničené dvěma funkcemi kolem osy x, počítáme pomocí vzorce $V=\pi\int_a^b [f(x)]^2-[g(x)]^2dx$.

Použijeme-li pro názornost následující obrázek, je to vlastně $V=V_1-V_2$, kde V_1 je objem tělesa, které vznikne otáčením přímky, kolem osy x a V_2 je objem tělesa, které vznikne otáčením paraboly.



Příklad: Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami $y=x,\ \ y=\frac{1}{x},\ x=0,\ x=2$ kolem osy x.

Řešení : Těleso vznikne rotací plochy, znázorněné na obrázku. Plocha je shora ohraničená dvěma křivkami, jejichž průsečíkem je bod $[1,1]$. V intervalu $\langle 0,1\rangle$ je ohraničena grafem funkce $y=x$ a v intervalu $\langle 1,2\rangle$ grafem funkce $y=\frac{1}{x}$.



Objem daného tělesa vyjádříme jako součet dvou určitých integrálů :

$$V=\pi\int_0^1 x^2\,dx+\pi\int_1^2\left(\frac{1}{x}\right)^2dx=\pi\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2\right)=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{5}{6}\pi\ [j^3].$$