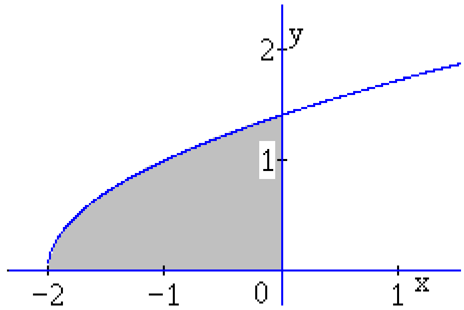
I. Výpočet obsahu rovinné plochy

Příklad 1: Určete obsah obrazce ohraničeného křivkou $y = \sqrt{x+2}$ a osami souřadnic.

Nakreslíme náčrtek. Pro výpočet použijeme vzorec

$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, protože daná plocha je ohraničená osou x

a funkcí, která je na intervalu $\langle -2, 0\rangle$ nezáporná.



Tedy

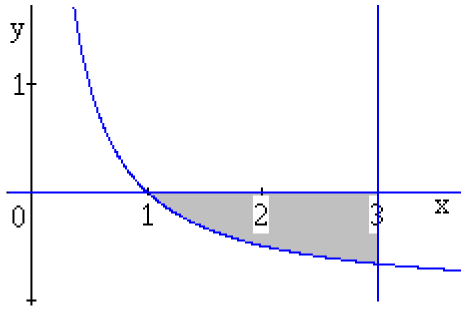
$$S = \int_{-2}^{0} \sqrt{x+2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^{0} = \frac{2}{3}\left[\sqrt{(x+2)^3}\right]_{-2}^{0} = \frac{2}{3}(\sqrt{8} - 0) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \quad .$$

Příklad 2: Určete obsah plochy ohraničené osou x, křivkou $y = \frac{1}{x} - 1$ a přímkou $x = 3$.

Dolní mez integrálu určíme jako x-ovou souřadnici průsečíku křivky $y = \frac{1}{x} - 1$ s osou x, tedy dosadíme $y = 0$.

$0 = \frac{1}{x} - 1 \;\Leftrightarrow\; 1 = \frac{1}{x} \;\Leftrightarrow\; x = 1$

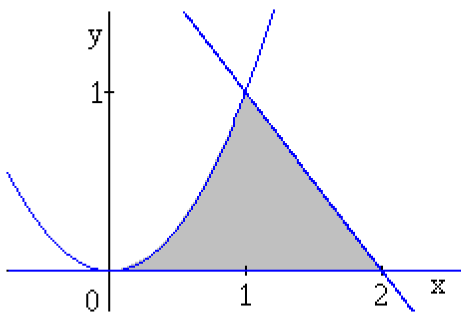
Na intervalu $\langle 1, 3\rangle$ je funkce záporná, proto budeme počítat pomocí vztahu $S = \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$



$$S = \left|\int_1^3 \left(\frac{1}{x} - 1\right)\mathrm{d}x\right| = \left|\left[\ln|x| - x\right]_1^3\right| = \left|\ln 3 - 3 - (\ln 1 - 1)\right| = \left|\ln 3 - 2\right| \doteq \left|-0{,}90\right| = 0{,}9 .$$

Příklad 3: Vypočtěte obsah plochy ohraničené osou x, křivkou $y = x^2$ a přímkou $y = 2 - x$.

Nemůžeme počítat integrál pro $x \in \langle 0, 2\rangle$, protože plocha je shora ohraničená nejdříve obloukem paraboly a potom přímkou. Proto určíme průsečík těchto dvou čar a potom výpočet obsahu plochy rozdělíme na dvě části.

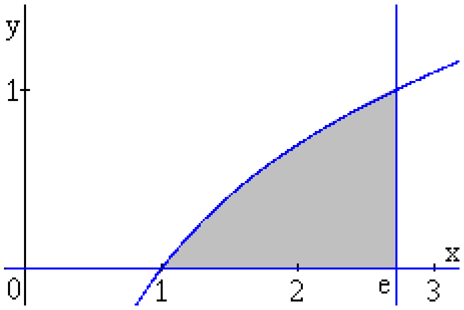


$x^2 = 2 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = -2$.

V těchto bodech přímka protíná parabolu. Z náčrtku je zřejmé, že pro náš výpočet použijeme $x_1 = 1$.

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x + \int_1^2 (x-2)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = \frac{1}{3} + 2 - 4 - \left(\frac{1}{2} - 2\right) = \frac{1}{6} \ .$$

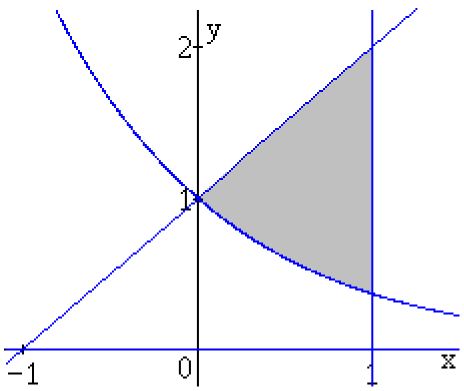
Příklad 4: Vypočtěte obsah plochy ohraničené osou *x*, křivkou $y = \ln x$ a přímkou $x = \mathrm{e}$.



$$S = \int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & u = x \\ v = \ln x & v' = \dfrac{1}{x} \end{array} \right| = \left[x \ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} \cdot x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \mathrm{e} \cdot 1 - 1 \cdot 0 - \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x = \mathrm{e} - [x]_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1 .$$

Příklad 5: Určete obsah plochy ohraničené křivkou $y = \mathrm{e}^{-x}$ a přímkami $x = 1$ a $y = x + 1$.

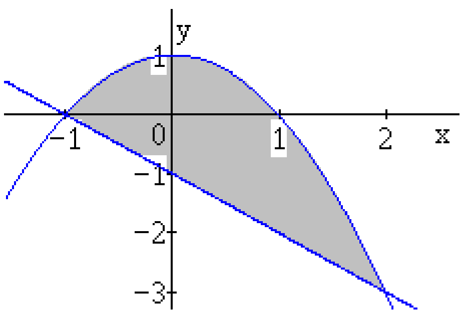


Plocha je shora ohraničená přímkou a zdola exponenciální křivkou, proto

$$S = \int_0^1 (x+1) - \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + x + \mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} + 1 + \mathrm{e}^{-1} - \left(\mathrm{e}^0\right) = \frac{1}{2} + \mathrm{e}^{-1} \doteq 0{,}87 \ .$$

Příklad 6: Určete obsah plochy ohraničené křivkami $y = 1 - x^2$, $x + y + 1 = 0$.



Nejdříve vypočítáme průsečíky křivek (tj. meze integrálu). Rovnici přímky upravíme na $y = -x - 1$ a budeme řešit rovnici $1 - x^2 = -x - 1$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

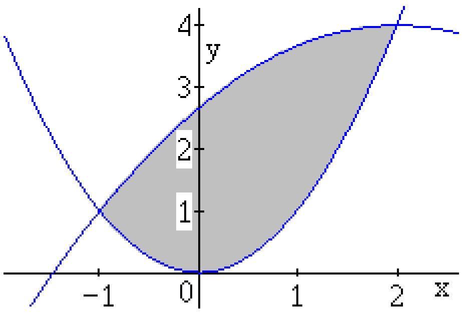
$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$x_1 = -1, x_2 = 2$$

$$S=\int_{-1}^{2}(1-x^2)-(-x-1)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}(2-x^2+x)\,\mathrm{d}x=\left[2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}=$$

$$=4-\frac{8}{3}+\frac{4}{2}-\left(-2+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{2}\ .$$

Příklad 7: Vypočtěte obsah plochy ohraničené parabolami $y=x^2$ a $y-4=-\frac{1}{3}(x-2)^2$.



Zjistíme průsečíky křivek, tedy pro která x platí

rovnice $\quad x^2=4-\frac{1}{3}(x-2)^2$

$$x^2=4-\frac{1}{3}(x^2-4x+4)$$

$$\frac{4}{3}x^2-\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}=0 \qquad \Big/\cdot\frac{3}{4}$$

$$x^2-x-2=0$$

Stejně jako v příkladu 6 odtud $x_1=-1, x_2=2$.

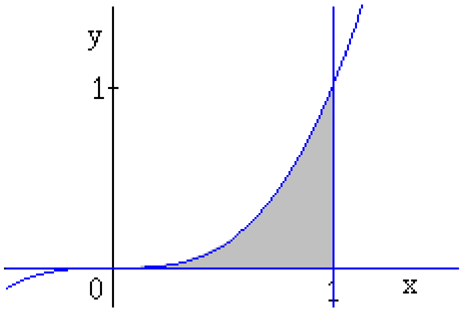
Po dosazení do vzorce

$$S=\int_{-1}^{2}\left[4-\frac{1}{3}(x-2)^2-x^2\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left(\frac{8}{3}+\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}x^2\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}=$$

$$=\left[\frac{8}{3}x+\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{9}x^3\right]_{-1}^{2}=\frac{16}{3}+\frac{8}{3}-\frac{32}{9}-\left(-\frac{8}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\right)=6\ .$$

II. Výpočet objemu rotačního tělesa

Příklad 1: Vypočtěte objem tělesa, které vznikne otáčením plochy ohraničené osou x, křivkou $y=x^3$ a přímkou $x=1$.

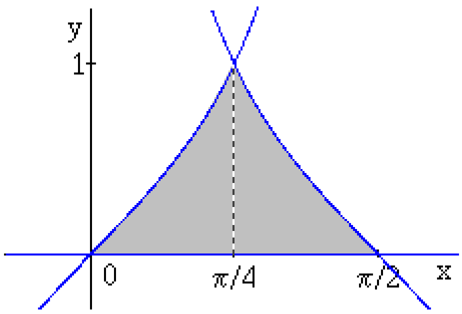


Plochu načrtneme. Funkce $y=x^3$ je na intervalu $\langle 0,1\rangle$ nezáporná, pro výpočet použijeme vzorec

$$V=\pi\int_a^b[f(x)]^2\,\mathrm{d}x\,.$$

$$V=\pi\int_0^1\left(x^3\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 x^6\,\mathrm{d}x=\pi\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1=\frac{\pi}{7}\ .$$

Příklad 2: Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené osou x a křivkami $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{cotg}x$ pro $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.



Z náčrtku je vidět, že pro výpočet použijeme vzorec $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x$, ale plocha je shora ohraničená $y = \mathrm{tg}x$ na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$, zatímco na intervalu $\left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ je shora ohraničena křivkou $y = \mathrm{cotg}x$.

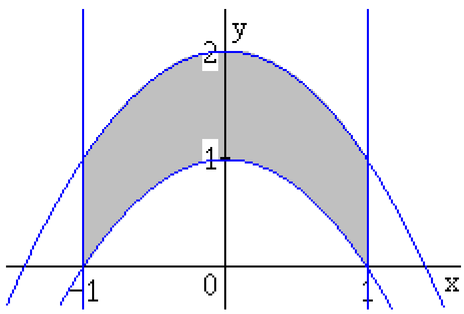
Proto rozdělíme výpočet objemu do dvou integrálů.

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2 x \, \mathrm{d}x + \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{cotg}^2 x \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x + \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x + \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \mathrm{d}x + \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \pi [\mathrm{tg}x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} + \pi [-\mathrm{cotg}x - x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) + \pi \left[0 - \frac{\pi}{2} - \left(-1 - \frac{\pi}{4} \right) \right] = 2\pi - \frac{\pi^2}{2} .$$

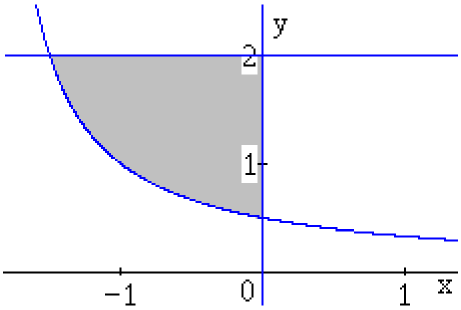
Příklad 3: Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami $y = 1 - x^2$, $y = 2 - x^2$ a přímkami $x = -1$, $x = 1$.



$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left[\left(2 - x^2\right)^2 - \left(1 - x^2\right)^2 \right] \mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^{1} \left[\left(4 - 4x^2 + x^4\right) - \left(1 - 2x^2 + x^4\right) \right] \mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^{1} \left(3 - 2x^2\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \pi \left[3x - \frac{2}{3} x^3 \right]_{-1}^{1} = \pi \left[3 - \frac{2}{3} - \left(-3 + \frac{2}{3} \right) \right] = \frac{14}{3} \pi .$$

Příklad 4: Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného křivkami $y = \dfrac{1}{x+2}$, $y = 2$ a osou y.



Nejdříve určíme průsečík hyperboly a přímky. Hledáme bod, kde jsou si funkce rovny, proto řešíme rovnici $\dfrac{1}{x+2} = 2$

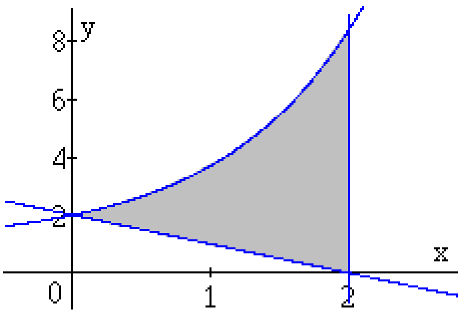
$$1 = 2x + 4$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

$$V = \pi \int_{-\frac{3}{2}}^{0} \left[(2)^2 - \left(\frac{1}{x+2} \right)^2 \right] \mathrm{d}x = \pi \int_{-\frac{3}{2}}^{0} \left[4 - (x+2)^{-2} \right] \mathrm{d}x = \pi \left[4x + \frac{1}{x+2} \right]_{-\frac{3}{2}}^{0} =$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} - (-6+2) \right] = \frac{9}{2}\pi .$$

Příklad 5: Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného křivkami $y = \mathrm{e}^x + 1$, $x + y = 2$ a $x = 2$.



Výpočet průsečíku exponenciální křivky s přímkou $y = 2 - x$ by mohl problematický, ale z grafů v náčrtku je zřejmé, že se protínají v bodě $[0,2]$.

$$V = \pi \int_{0}^{2} \left[\left(\mathrm{e}^x + 1\right)^2 - (2-x)^2 \right] \mathrm{d}x = \pi \int_{0}^{2} \left[\left(\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x + 1\right) - \left(4 - 4x + x^2\right) \right] \mathrm{d}x =$$

$$= \pi \int_{0}^{2} \left(\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 3 + 4x - x^2 \right) \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 3x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{0}^{2} =$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^4 + 2\mathrm{e}^2 - 6 + 8 - \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{2} + 2 \right) \right] = \pi \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^4 + 2\mathrm{e}^2 - \frac{13}{6} \right] \doteq 39{,}91\pi \ .$$