Determinanty

Úvahy k zavedení pojmu determinantu

Nechť je dáno n přirozených čísel $1,2,...,n.$ Budeme-li měnit jejich pořadí, dostaneme tzv. permutaci původní sestavy. Celkový počet permutací dané n-prvkové množiny je $n!$

Pokud v libovolné permutaci větší prvek předchází menší, mluvíme o inverzi. Např. v permutaci $(4,1,3,2)$ jsou celkem 4 inverze : (4,1), (4,3), (4,2) a (3,2). Je-li počet inverzí sudý (lichý) říkáme, že permutace je sudá (lichá).

Nechť je dána čtvercová matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ řádu n a libovolná permutace $(p_1, p_2, ..., p_n)$ sloupcových indexů $1,2,...,n$. Utvořme dále součin $a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot ... \cdot a_{np_n}$ a vynásobme ho číslem $(-1)^p$, kde p je počet inverzí v dané permutaci. Pro všechny možné permutace množiny $1,2,...,n$ je takových součinů $n!$

Determinant

Determinantem n-tého řádu čtvercové matice **A** řádu n rozumíme číslo

$$\sum_{(p_1, p_2, ..., p_n)} (-1)^p \cdot a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot \ ... \ \cdot a_{np_n},$$

kde $(p_1, p_2, ..., p_n)$ je libovolná permutace sloupcových indexů $1,2,...,n$ a p je počet inverzí v této permutaci. Součet se provádí přes všech $n!$ permutací množiny $1,2,...,n$.

Determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ se značí $\det \mathbf{A}$ nebo $|\mathbf{A}|$.

Hodnota determinantu 2. řádu

Dvojici sloupcových indexů $(1,2)$ odpovídají dvě permutace : $(1,2)$, která je sudá (nemá žádnou inverzi) a $(2,1)$, která je lichá (má jednu inverzi).

Tedy $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$.

Hodnota determinantu 3.řádu

Trojici sloupcových indexů (1,2,3) odpovídá 6 permutací : (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2), (1,3,2), (2,1,3), (3,2,1). První tři jsou sudé, druhé tři jsou liché.

Tedy $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{11}.a_{23}.a_{32} -$

$- a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{13}.a_{22}.a_{31}$.

Poznámka : Uvedená pravidla pro výpočet hodnoty determinantů 2. a 3. řádu se nazývají Sarrusova pravidla.

Příklad: Vypočítejte hodnotu determinantu : a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Řešení : a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 2.(-3) - 4.5 = -6 - 20 = -26$,

b) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6.3.2 + 0.1.2 + 6.1.(-1) - 2.3.6 - 6.(-1).1 - 1.0.2 = 0$.

Pro výpočet hodnoty determinantu 3. řádu můžeme použít následující pomůcku : první dva sloupce determinantu napíšeme vpravo od determinantu. Pak jednotlivé činitele součinů tvoří prvky ležící na hlavní diagonále a rovnoběžně s ní (jsou označené plnými šipkami), od nich pak odečítáme součiny prvků, ležících na vedlejší diagonále a rovnoběžně s ní (jsou označené čárkovanými šipkami) :

$$\left|\begin{matrix} 6 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 6 & 1 \\ 0 & 3 \\ 6 & 1 \end{matrix} = 6.3.2 + 1.(-1).6 + 2.0.1 - 2.3.6 - 6.(-1).1 - 1.0.2 = 0 .$$

Schéma pro vyčíslení můžeme vytvořit také tak, že opíšeme první dva řádky pod determinant. Potom sestrojíme součiny podle naznačených spojnic a opatříme je uvedenými znaménky:

$$\begin{array}{ccc} \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \\ \hline \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \\ - \quad - \quad - \qquad\qquad + \quad + \quad + \end{array}$$

Výpočet hodnoty determinantu rozvojem

> Vynecháme-li v determinantu n-tého řádu i-tý řádek a j-tý sloupec, vznikne determinant řádu (n–1). Nazveme ho **minorem (subdeterminantem)** determinantu A přidruženým k prvku a_{ij}.

Příklad: Vytvořte doplněk prvku a_{21} v det A = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ [2] & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

Řešení: $A_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 - 2 = 2$

Hodnota determinantu řádu *n*

Hodnota determinantu řádu n je rovna číslu

$$\boxed{\det \mathbf{A} = (-1)^{1+1}.a_{11}\mathbf{A}_{11} + (-1)^{1+2}.a_{12}\mathbf{A}_{12} + \ldots + (-1)^{1+n}.a_{1n}\mathbf{A}_{1n}},$$

kde $\mathbf{A}_{ij}$ je determinant řádu $(n-1)$, který vznikne z původního determinantu vynecháním řádku i a sloupce j (nazýváme ho doplňkem prvku a_{ij}).

Poznámka : 1) Tento postup nazýváme **Laplaceovým rozvojem** determinantu podle prvků prvního řádku.
2) Rozvoj lze provést podle libovolného řádku nebo sloupce, je vhodné k rozvoji použít řadu, obsahující co nejvíce nulových prvků.

Příklad: Vypočítejte hodnotu determinantu $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.

Řešení : Nejprve provedeme rozvoj podle prvků prvního řádku :

$$\begin{vmatrix} \boxed{2 \quad 0 \quad 2 \quad -1} \\ 2 \quad 3 \quad 0 \quad 2 \\ 3 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -2 \quad 0 \quad -2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3}\cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4}\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot(-6+4) + 2\cdot(-12-3-12+$$

$$+6+4+18) + 1\cdot(-3+4) = -4+2+1 = -1$$

Vzhledem k tomu, že třetí sloupec determinantu obsahuje dva nulové prvky, je však výhodnější provádět rozvoj podle prvků třetího sloupce :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & \boxed{2} & -1 \\ 2 & 3 & \boxed{0} & 2 \\ 3 & 3 & \boxed{1} & 1 \\ -1 & -2 & \boxed{0} & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-12-3-$$

$$-12+6+4+18) + 1\cdot(-12+4-3+8) = 2-3 = -1.$$

Vlastnosti determinantů

Při výpočtu hodnoty determinantů vyšších řádů je možné používat následující pravidla, která výpočet zjednodušují (např. vytvořením nulových prvků na zvolených místech).

- Hodnota determinantu se nezmění, překlopíme-li jej kolem hlavní diagonály.
- Vyměníme-li dva po sobě následující řádky determinantu, hodnota determinantu změní znaménko.
- Je-li některý řádek *k*-násobkem jiného řádku, je hodnota determinantu rovna nule.
- Hodnota determinantu se nezmění, přičteme-li k některému řádku *k*-násobek jiného řádku.
- Má-li determinant v některém řádku samé nuly, je jeho hodnota rovna nule.
- Násobit determinant číslem $k \neq 0$ znamená násobit tímto číslem všechny prvky jednoho (libovolného) řádku nebo sloupce.

Vzhledem k prvnímu pravidlu je zřejmé, že uvedené vlastnosti determinantů platí také pro sloupce.

Příklad: Vypočtěte hodnotu determinantu $\begin{vmatrix}2&1&3&2\\4&-1&0&1\\0&2&-2&1\\3&1&2&-3\end{vmatrix}$.

Řešení : Pomocí výše uvedených vlastností upravíme determinant na tvar, kdy v prvním sloupci budou tři prvky nulové. Pak vypočítáme hodnotu determinantu rozvojem podle prvků prvního sloupce. Všimněte si úpravy, při které násobíme čtvrtý řádek dvojkou. V dalším kroku pak musíme determinant násobit $\frac{1}{2}$, aby se jeho hodnota rovnala hodnotě původního determinantu (v tom je postup odlišný od převodu matice na stupňový tvar!).

$$\begin{vmatrix}2&1&3&2\\4&-1&0&1\\0&2&-2&1\\3&1&2&-3\end{vmatrix}\begin{matrix}.(-2)/.(-3)\\ \hookleftarrow\\ \\ .(2)\quad\hookleftarrow\end{matrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}2&1&3&2\\0&-3&-6&-3\\0&2&-2&1\\0&-1&-5&-12\end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}-3&-6&-3\\2&-2&1\\-1&-5&-12\end{vmatrix} =$$

$$= 1.(-3).\begin{vmatrix}1&2&1\\2&-2&1\\-1&-5&-12\end{vmatrix} = (-3)\cdot(24-2-10-2+48+5) = -3\cdot 63 = -189\,.$$