# Základní vlastnosti funkcí

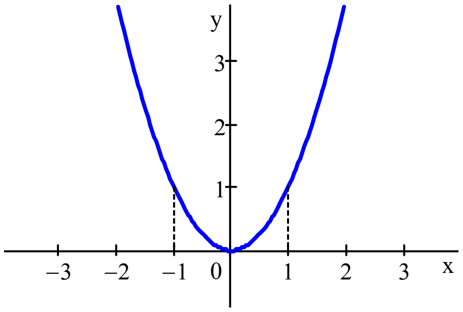
## Sudost a lichost funkce

Funkce $y = f(x)$ s definičním oborem $D(f) = (-a, a)$, kde $a > 0$, se nazývá :

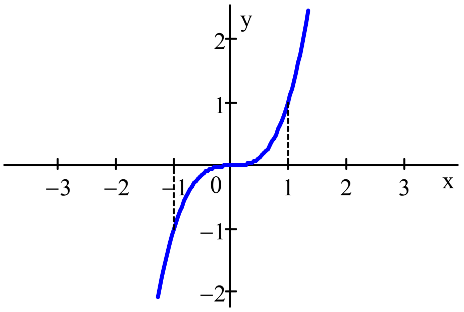
- **sudá**, když pro každé $x \in D(f)$ platí $f(-x) = f(x)$,
- **lichá**, když pro každé $x \in D(f)$ platí $f(-x) = -f(x)$.

Sudost a lichost funkce je možné určit na základě grafu. Graf sudé funkce je souměrný podle osy *y*, graf liché funkce je souměrný podle počátku.

Graf sudé funkce $f : y = x^2$




Graf liché funkce $g : y = x^3$



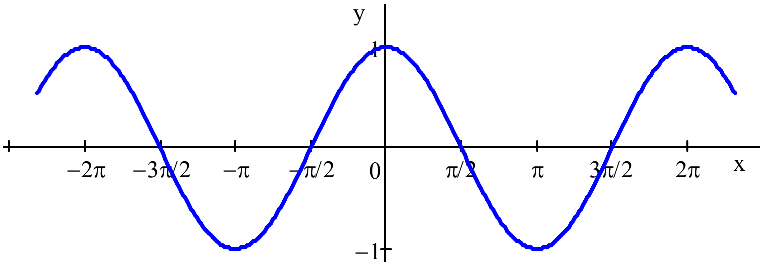

Poznámka: Nutným předpokladem pro tuto vlastnost tedy je, aby definiční obor byl souměrný podle x = 0.

## Periodičnost funkce

Funkci $y = f(x)$ nazýváme **periodickou** s periodou $p \in \mathbf{R}^+$ v oboru $D(f)$, který s každým bodem $x$ obsahuje i bod $x \pm p$, jestliže pro každé číslo $x \in D(f)$ platí $f(x + p) = f(x)$.

Funkční hodnoty periodických funkcí se tedy pravidelně opakují.

Příklad periodické funkce




Funkce $y = \cos x$ je periodická s periodou $2\pi$.

Také funkce $y = \sin x$ je periodická s periodou $2\pi$, zatímco goniometrické funkce $y = \mathrm{tg}x$ a $y = \mathrm{cotg}x$ jsou periodické s periodou $\pi$.

**Monotónnost funkce**

Funkci $y = f(x)$ s definičním oborem $D(f)$ nazveme na tomto oboru

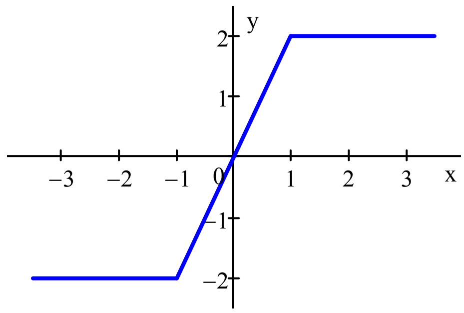
- **rostoucí**, když pro libovolná čísla $x_1 < x_2 \in D(f)$ platí $f(x_1) < f(x_2)$,
- **klesající**, když pro libovolná čísla $x_1 < x_2 \in D(f)$ platí $f(x_1) > f(x_2)$,

Má-li funkce pouze jednu z těchto vlastností, nazývá se **ryze monotónní**

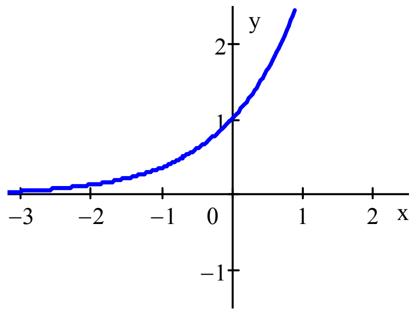
- **neklesající**, když pro libovolná čísla $x_1 < x_2 \in D(f)$ platí $f(x_1) \le f(x_2)$,
- **nerostoucí**, když pro libovolná čísla $x_1 < x_2 \in D(f)$ platí $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Má-li funkce pouze jednu z těchto vlastností, nazývá se **monotónní.**

Příklady monotónních funkcí




Funkce $g : y = |x+1| - |1-x|$ je neklesající.
Podle definice jde o funkci monotónní.



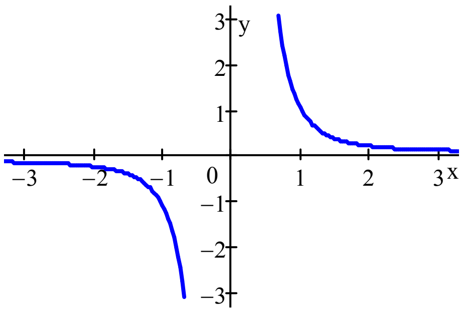

Funkce $f : y = 2^x$ je rostoucí.
Podle definice jde o funkci ryze monotónní.

**Prostá funkce**

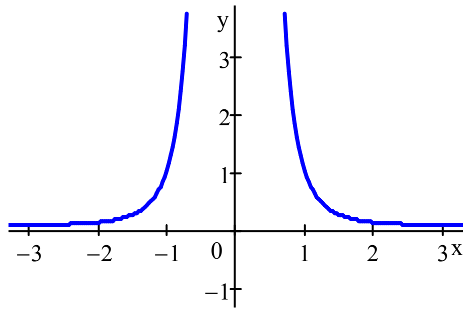
Funkce $y = f(x)$ s definičním oborem $D(f)$ je **prostá**, když pro libovolná čísla $x_1, x_2 \in D(f)$, taková, že $x_1 \ne x_2$, platí $f(x_1) \ne f(x_2)$.

Tuto vlastnost určíme snadno z grafu funkce. Jestliže je $y = f(x)$ prostá, protne libovolná rovnoběžka s osou $x$ její graf nejvýše jednou.

Příklad prosté funkce



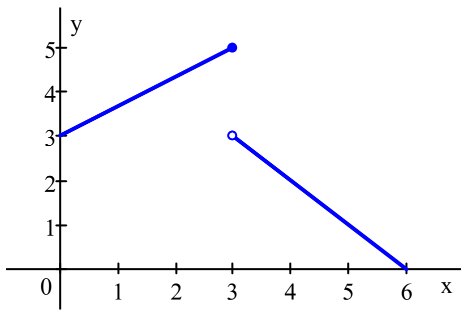

Funkce $f : y = \dfrac{1}{x^3}$ je prostá.




Funkce $g : y = \dfrac{1}{x^4}$ není prostá.

Poznámka: Jestliže neznáme graf funkce, můžeme k rozhodování o tom, zda je nebo není prostá , využít to, že prostá funkce nabývá každé své funkční hodnoty právě jednou.

Tedy každá ryze monotónní funkce je prostá, protože pro dvě libovolná čísla, pro která $x_1 < x_2 \in D(f)$ platí $f(x_1) < f(x_2)$ nebo $f(x_1) > f(x_2)$, tj. $f(x_1) \neq f(x_2)$. Opačné tvrzení ale neplatí, protože prostá funkce nemusí být ryze monotónní, jak ukazuje následující obrázek.




Funkce na obrázku je prostá, ale není ryze monotónní.

**Ohraničená funkce**

Funkci $y = f(x)$ s definičním oborem $D(f)$ je na tomto oboru

- **ohraničená shora (zdola)**, jestliže existuje takové číslo $H$ ($D$), že pro všechna čísla $x \in D(f)$ platí $f(x) \leq H$ ($f(x) \geq D$),
- **ohraničená**, je-li ohraničená shora i zdola.

Příkladem ohraničené funkce ve svém definičním oboru je $f : y = \sin x$.