## I. Výpočet přímou integrací, pomocí vlastností integrálu a úpravami integrované funkce

**Příklad 1:** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x-\pi)\,dx$

Funkce je spojitá a ohraničená na **R**, proto integrál existuje. K nalezení primitivní funkce použijeme vzorce V9 a V4.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x-\pi)\,dx = \frac{1}{2}\left[-\cos(2x-\pi)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[-\cos(0)-(-\cos(-\pi))\right] = \frac{1}{2}\left[-1-1\right] = -1\,.$$

**Příklad 2:** $\int_1^2 (x^3-x+1)\,dx$

Integrovaná funkce $f(x)=x^3-x+1$ je na intervalu $\langle 1,2\rangle$ spojitá a tedy integrovatelná. Primitivní funkci vypočteme pomocí P2 a V2.

$$\int_1^2 (x^3-x+1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2$$

Funkce $F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+x$ je na intervalu $\langle 1,2\rangle$ spojitá a na intervalu $(1,2)$ je primitivní k funkci $f(x)=x^3-x+1$. Jsou tedy splněny předpoklady Leibniz-Newtonovy věty a platí :

$$\int_1^2 (x^3-x+1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2 = \left(\frac{16}{4}-\frac{4}{2}+2\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{13}{4}.$$

**Příklad 3:** $\int_0^1 \ln x\,dx$

Funkce $f(x)=\ln x$ není na intervalu $\langle 0,1\rangle$ ohraničená (v bodě $x=0$ není funkce definovaná) a není tedy na daném intervalu integrovatelná. Pro výpočet tohoto integrálu není možné Leibniz-Newtonovu větu použít. Tento integrál se nazývá nevlastní.

**Příklad 4:** $\int_1^3 \frac{x^2+2x}{x^4}\,dx$

Funkce je definovaná pro všechna $x \in R-\{0\}$, tedy je na intervalu $\langle 1,3\rangle$ spojitá. Při výpočtu Primitivní funkce nejdříve rozepíšeme zlomek na dva, upravíme krácením a pro integraci použijeme V2. Po úpravě dosadíme do primitivní funkce meze.

$$\int_1^3 \frac{x^2+2x}{x^4}\,dx = \int_1^3 \left(\frac{x^2}{x^4}+\frac{2x}{x^4}\right)dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x^3}\right)dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}+2\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^3 = \left[\frac{-1}{x}-\frac{1}{x^2}\right]_1^3 =$$

$$= -\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-(-1-1) = \frac{-3-1+18}{9} = \frac{14}{9}.$$

## II. Výpočet substituční metodou

**Příklad 1:** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{2\cdot \ln x}{3x}\,dx$.

Funkce je spojitá na intervalu $(0,\infty)$, tedy pro $x \in \langle 1, \mathrm{e}\rangle$ určitý integrál existuje. Budeme integrovat složenou funkci, vnitřní složku nahradíme novou proměnnou. Potom provedeme transformaci mezí. Dosadíme do substituční rovnice původní dolní mez a dostaneme dolní mez pro novou proměnnou, když dosadíme horní mez, dostaneme novou horní mez.

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{2\ln x}{3x}\,dx = \left|\begin{array}{c} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = \mathrm{e} \Rightarrow t = 1 \end{array}\right| = \int_0^1 \frac{2}{3}\cdot t\,dt = \frac{2}{3}\int_0^1 t\,dt = \frac{2}{3}\frac{1}{2}\left[t^2\right]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot(1-0) = \frac{1}{3}$$

**Příklad 2:** Vypočítejte substituční metodou $\displaystyle\int_3^6 \frac{x}{\sqrt{x-2}}\,dx$.

Funkce je definovaná pro $x > 2$. Substituci zvolíme tak, abychom odstranili odmocninu.

$$\int_3^6 \frac{x}{\sqrt{x-2}}\,dx = \left|\begin{array}{c} \sqrt{x-2} = t \\ x-2 = t^2 \\ x = t^2+2 \\ dx = 2t\,dt \end{array}\right|, \text{ pro meze } \left|\begin{array}{c} x = 3 \Rightarrow t = \sqrt{1} \\ x = 6 \Rightarrow t = \sqrt{4} \end{array}\right|.$$

Tedy

$$\int_3^6 \frac{x}{\sqrt{x-2}}\,dx = |\ldots| = \int_1^2 \frac{t^2+2}{t}\cdot 2t\,dt = 2\int_1^2 (t^2+2)\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}+2t\right]_1^2 = 2\left[\frac{8}{3}+4-\left(\frac{1}{3}+2\right)\right] = \frac{26}{3}.$$

## III. Výpočet metodou per partes

**Příklad 1:** Vypočtěte $\int_{\pi}^{2\pi} (x+1)\cos x\, dx$ .

Integrál se zjednoduší, pokud budeme derivovat ($x$+1) a goniometrickou funkci integrovat

$$\int_{\pi}^{2\pi} (x+1)\cos x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = \cos x & u = \sin x \\ v = x+1 & v' = 1 \end{array} \right| = \left[(x+1)\sin x\right]_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx =$$

$$= (2\pi+1)\cdot 0 - (\pi+1)\cdot 0 - \left[-\cos x\right]_{\pi}^{2\pi} = \left[\cos x\right]_{\pi}^{2\pi} = \cos 2\pi - \cos\pi = 1-(-1) = 2 \ .$$

**Příklad 2:** $\int_{1}^{2} x \ln^2 x\, dx$ .

$$\int_{1}^{2} x\cdot \ln^2 x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = x & u = \frac{1}{2}x^2 \\ v = \ln^2 x & v' = 2\cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} \end{array} \right| = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln^2 x\right]_1^2 - \int_{1}^{2} 2\cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}x^2\, dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln^2 x\right]_1^2 - \int_{1}^{2} x \ln x\, dx =$$

Do 1. části dosadíme meze a integrál budeme opět řešit metodou per partes

$$\left| \begin{array}{ll} u' = x & u = \frac{1}{2}x^2 \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\left(4\ln^2 2 - \ln^2 1\right) - \left(\left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^2 - \int_{1}^{2} \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}x^2 dx\right) =$$

$$= 2\ln^2 2 - \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^2 + \int_{1}^{2} \frac{1}{2}x\, dx = 2\ln^2 2 - \frac{1}{2}(4\ln 2 - \ln 1) + \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2 = 2\ln^2 2 - 2\ln 2 + \frac{1}{4}(4-1) =$$

$$= 2\ln^2 2 - 2\ln 2 + \frac{3}{4} = \ln 4\cdot\left(\ln 2 - 1\right) + \frac{3}{4} \ .$$

**Příklad 3:** Vypočtěte $\int_{0}^{0,5} \arcsin x\, dx$ .

Budeme řešit metodou per partes. Volbu funkcí provedeme tak, aby se funkce $\arcsin x$ derivovala.

$$\int_0^{0,5} \arcsin x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & u = x \\ v = \arcsin x & v' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right| = \left[ x \arcsin x \right]_0^{0,5} - \int_0^{0,5} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$$

Na výpočet integrálu, který zbývá dořešit, použijeme metodu substituce (je potřeba přepočítat meze) a do části, která je po integraci, dosadíme.

Substituce:

$$\left| \begin{array}{r} 1 - x^2 = t \\ -2x dx = dt \\ x dx = -\dfrac{1}{2} dt \end{array} \right| \text{, výpočet mezí pro proměnnou } t \left| \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow t = \dfrac{3}{4} \end{array} \right|$$

Protože $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, dostaneme

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} - 0 - \int_1^{\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) dt = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \int_1^{\frac{3}{4}} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \cdot \left[ 2t^{\frac{1}{2}} \right]_1^{\frac{3}{4}} = \frac{\pi}{12} + \left[ \sqrt{t} \right]_1^{\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \doteq 0,1278 \, .$$