Nevlastní integrál

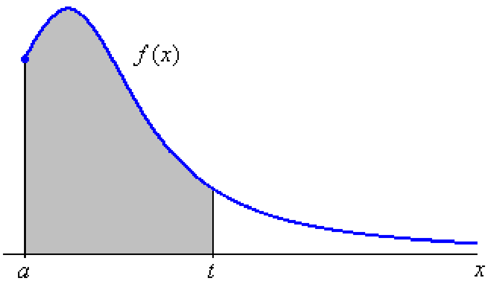
Při výpočtu určitého integrálu jsme předpokládali, že

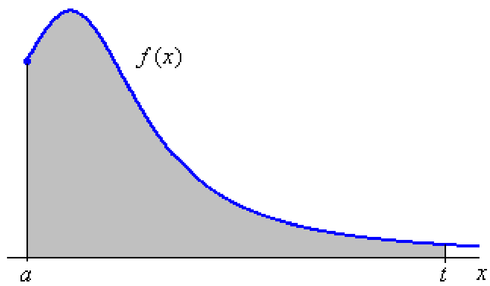
- integrační interval je ohraničený, neboť se jednalo o uzavřený interval $\langle a,b \rangle$, kde meze a, b byla konečná čísla,
- funkce $f(x)$ je na tomto intervalu ohraničená.

Pokud některá z uvedených podmínek nebude splněná, dostaneme integrál, který budeme nazývat nevlastním integrálem vzhledem k mezi intervalu nebo nevlastní integrál vzhledem k neohraničenosti funkce.

Integrál nevlastní vzhledem k mezi intervalu (tzv. vlivem meze)

Uvažujme určitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$, kde např. $b=\infty$. V souladu s geometrickou interpretací určitého integrálu budeme požadovat, aby integrál $\int_a^\infty f(x)\,dx$ vyjadřoval obsah plochy ohraničené grafem funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,\infty)$. Zvolíme-li číslo $t\in(a,\infty)$, vyjadřuje zřejmě hodnota integrálu $\int_a^t f(x)\,dx$ hodnotu $\int_a^\infty f(x)\,dx$ tím přesněji, čím větší bude číslo t (viz obrázek).





Nevlastní integrál vzhledem k mezím intervalu

Definice : Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a,\infty)$.

Existuje-li limita $\mathrm{L}=\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$, nazýváme ji nevlastním integrálem funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,\infty)$ a značíme ji $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

Je-li limita konečná, říkáme, že uvažovaný nevlastní integrál konverguje.
Jestliže limita neexistuje nebo je nevlastní, říkáme, že nevlastní integrál diverguje.

Poznámka: Analogicky by se definoval pro funkci $f(x)$ spojitou na intervalu $(-\infty, b\rangle$ nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ jako $\mathrm{L} = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{b} f(x)\,dx$.

Příklad: Vypočtěte $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Řešení: Funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ je spojitá na intervalu $\langle 1, \infty)$. Nevlastní integrál vzhledem k mezi $b = \infty$ počítáme jako limitu $\lim_{t\to\infty} \int_{1}^{t} \frac{dx}{x^2}$.

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to\infty} \int_{1}^{t} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to\infty} \int_{1}^{t} x^{-2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[-x^{-1}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1\right) = 0 + 1 = 1.$$

Limita je rovna 1, tedy zadaný nevlastní integrál konverguje.

Poznámka: Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $(-\infty, \infty)$ a konvergují-li oba nevlastní integrály $\mathrm{L}_1 = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$, $\mathrm{L}_2 = \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$, kde c je libovolné číslo z intervalu $(-\infty, \infty)$, klademe $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2$. Pokud alespoň jeden z nevlastních integrálů diverguje, říkáme, že nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ diverguje.

Příklad: Vypočítejte nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Řešení : Funkce $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ je spojitá na intervalu $(-\infty, \infty)$. Zvolme číslo, ležící uvnitř intervalu $(-\infty, \infty)$, například $c = 0$. Zadaný integrál pak počítáme jako součet nevlastních integrálů $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} [\operatorname{arctg} x]_t^0 = \lim_{t\to-\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} t) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

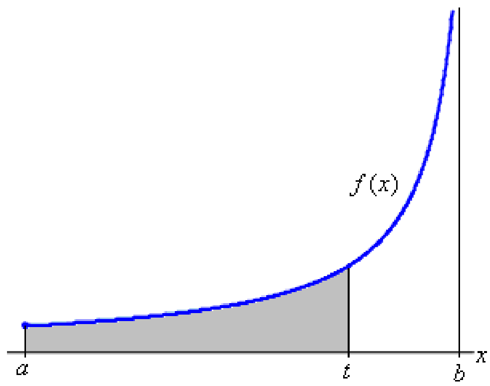
$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} [\operatorname{arctg} x]_0^t = \lim_{t\to\infty} (\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

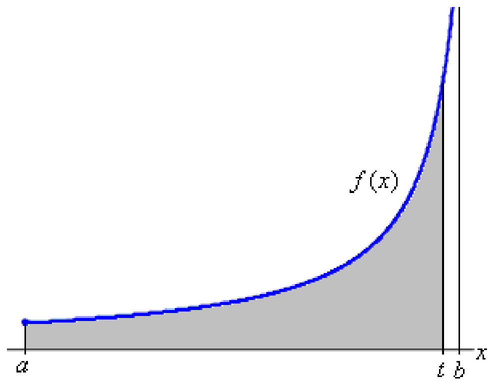
Vzhledem k tomu, že oba nevlastní integrály konvergují, konverguje i zadaný integrál a platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Integrál nevlastní vzhledem k neohraničenosti funkce (tzv. vlivem funkce)

Uvažujme nyní plochu ohraničenou grafem funkce $f(x)$ a osou x pro $x \in \langle a,b)$. Zvolíme-li číslo $t \in (a,b)$, vyjadřuje hodnota integrálu $\int_a^t f(x)\,dx$ hodnotu $\int_a^b f(x)\,dx$ tím přesněji, čím více se bude číslo t blížit číslu b zleva (viz obrázek).





Nevlastní integrál vzhledem k neohraničenosti funkce

Definice : Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a,b)$ a není ohraničená v levém okolí bodu b. Existuje-li limita $\mathrm{L} = \lim\limits_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$, nazýváme ji nevlastním integrálem funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,b)$ a značíme ji $\int_a^b f(x)\,dx$.

Je-li limita konečná, říkáme, že uvažovaný nevlastní integrál konverguje.

Jestliže limita neexistuje nebo je nevlastní, říkáme, že nevlastní integrál diverguje.

Poznámka: Analogicky by se definoval pro funkci $f(x)$ spojitou na intervalu $(a,b\rangle$ a neohraničenou v pravém okolí bodu a nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ jako $\mathrm{L} = \lim\limits_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$.

Příklad: Vypočítejte integrál $\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}\,dx$.

Řešení: Funkce $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}$ je spojitá na intervalu $(1,2\rangle$. Ale v bodě $b = 1$ je integrovaná funkce neohraničená, jde proto o nevlastní integrál. Budeme ho počítat jako limitu $\lim\limits_{t \to 1^+} \int_t^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}\,dx$. Nejprve však určíme primitivní funkci $F(x)$ k funkci $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}$.

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}\,dx = \left| \begin{array}{c} \text{subst. } \sqrt{x-1}=u \\ x-1=u^2 \\ x=u^2+1 \\ dx=2u\,du \end{array} \right| = \int \frac{(u^2+1)-2}{u}\cdot 2u\,du = 2\int (u^2-1)\,du = 2\cdot\left(\frac{1}{3}u^3-u\right)=$$

$$= 2u\cdot\left(\frac{1}{3}u^2-1\right) = 2\sqrt{x-1}\cdot\left(\frac{x-1}{3}-1\right) = \frac{2}{3}\sqrt{x-1}\cdot(x-4)+C\ .$$

Tedy

$$\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{t\to 1^+}\int_t^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{t\to 1^+}\left[\frac{2}{3}\sqrt{x-1}\cdot(x-4)\right]_t^2 = \lim_{t\to 1^+}\left[\frac{2}{3}\cdot 1\cdot(-2)-\frac{2}{3}\sqrt{t-1}\cdot(t-4)\right]=$$

$$= -\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\cdot 0\cdot(-3) = -\frac{4}{3}\ .$$

Je-li integrál nevlastní současně vzhledem k mezím i neohraničenosti funkce, mluvíme o nevlastním integrálu smíšeného typu.

Nekonečné meze a body v jejichž libovolném okolí je integrovaná funkce $f(x)$ neohraničená, nazýváme singularitami příslušného nevlastního integrálu. Má-li nevlastní integrál v integračním intervalu více singularit, rozdělíme interval na více dílčích intervalů tak, aby daný nevlastní integrál měl v každém z nich jedinou singularitu, a to buď v dolní nebo v horní mezi. Konvergují-li nevlastní integrály ve všech těchto dílčích intervalech, hodnotu daného integrálu určíme jako součet hodnot nevlastních integrálů na všech dílčích intervalech. Je-li aspoň jeden z nevlastních integrálů na dílčích intervalech divergentní, je daný nevlastní integrál divergentní.

Příklad: Vypočtěte $\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

Řešení: Integrál $\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ má singularitu v dolní (pro neohraničenost funkce) i horní (pro neohraničenost integračního intervalu) mezi. Zvolíme libovolné číslo $c\in(0,\infty)$. Např. $c=1$.

Zadaný integrál pak počítáme jako součet nevlastních integrálů $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_t^1 = \lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{1}{1}+\frac{1}{t}\right) = -1+\infty=\infty \quad \text{diverguje}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to +\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to +\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \lim_{t\to +\infty}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{1}=1 \qquad \text{konverguje}$$

Tedy $\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ diverguje, protože jeden z dílčích nevlastních integrálů diverguje.