Nevlastní integrál vlivem meze

Příklad 1: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+1}$

Na intervalu $\langle 1, \infty)$ je funkce $f(x) = \frac{1}{x+1}$ spojitá. Funkci k ní primitivní určíme přímo pomocí vzorce $\int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| + C$. Tedy

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+1} = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{dx}{x+1} = \lim_{t\to\infty} \left[\ln|x+1| \right]_1^t = \lim_{t\to\infty} \left[\ln|t+1| - \ln 2 \right] = \infty$$

Zadaný integrál diverguje.

Příklad 2: $\int_{-\infty}^{2} \mathrm{e}^{2x} dx$

Na intervalu $(-\infty, 2\rangle$ je funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ spojitá. Neurčitý integrál nemusíme počítat, protože máme k dispozici vzorec.

$$\int_{-\infty}^{2} \mathrm{e}^{2x} dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^{2} \mathrm{e}^{2x} dx = \lim_{t\to-\infty} \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} \right]_t^2 = \lim_{t\to-\infty} \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{4} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} \right]$$

Zbývá dořešit limitu. Protože pro $t \to -\infty$ platí $\mathrm{e}^{2t} \to 0$, je

$$\lim_{t\to-\infty} \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{4} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} \right] = \lim_{t\to-\infty} \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{4} - 0 \right] = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{4}.$$

Zadaný nevlastní integrál konverguje.

Příklad 3: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

Funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}$ je spojitá na intervalu $(-\infty, \infty)$. Zvolíme číslo, ležící uvnitř intervalu $(-\infty, \infty)$, například $c = 0$. Zadaný integrál rozdělíme na součet nevlastních integrálů

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 2x+2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

Pro přehlednost vypočítáme každý zvlášť, ale nejdříve vypočteme funkci primitivní k integrované

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 - 1 + 2} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1} dx = \operatorname{arctg}(x+1) + C$$

Potom

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{t\to-\infty} \int_t^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{t\to-\infty} \left[\operatorname{arctg}(x+1) \right]_t^0 = \lim_{t\to-\infty} \left[\operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(t+1) \right]$$

Protože pro $t \to -\infty$ platí $\operatorname{arctg}(t+1) \to -\frac{\pi}{2}$, je

$$\lim_{t\to -\infty}\left[\operatorname{arctg}(1)-\operatorname{arctg}(t+1)\right]=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{4}\pi$$

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\lim_{t\to\infty}\int_0^{t}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\lim_{t\to\infty}\left[\operatorname{arctg}(x+1)\right]_0^t=\lim_{t\to\infty}\left[\operatorname{arctg}(t+1)-\operatorname{arctg}(1)\right]=$$

$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$, protože $\operatorname{arctg}(t+1)\to\frac{\pi}{2}$ pro $t\to\infty$.

Celkem $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2 2x+2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2}+\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{4}=\pi$.

Zadaný nevlastní integrál konverguje.

Poznámka:
Kdybychom zadaný integrál na začátku výpočtu rozdělili např. v bodě $c=3$, dostali bychom po dosazení mezí $\operatorname{arctg}(3)$. Konkrétní číselnou hodnotu nepotřebujeme, protože jednou má znaménko + (horní mez) a podruhé znaménko – (dolní mez). Tedy funkční hodnoty v bodě c se vždy odečtou!

Příklad 4: $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^2 x}$

Funkce $f(x)=\frac{1}{x\cdot\ln^2 x}$ je spojitá na intervalu $\langle 2,\infty)$. Abychom se vyhnuli složitým formálním zápisům a transformacím mezí (u substituční metody), vypočítáme nejprve neurčitý integrál

$$\int\frac{1}{x\cdot\ln^2 x}dx=\left|\begin{array}{l}\ln x=u\\ \frac{1}{x}dx=du\end{array}\right|=\int\frac{1}{u^2}du=-\frac{1}{u}=-\frac{1}{\ln x}+C$$

Je tedy $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^2 x}=\lim_{t\to\infty}\int_2^{t}\frac{dx}{x\cdot\ln^2 x}=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^t=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln t}+\frac{1}{\ln 2}\right)=0+\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}$

Zadaný nevlastní integrál konverguje.

Příklad 5: $\int_{-\infty}^{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$

Funkce $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ je definovaná pro $|x|>1$, tedy je na intervalu $\left(-\infty,\sqrt{2}\right\rangle$ spojitá.

Neurčitý integrál vypočítáme substitucí.

$$\int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx=\left|\begin{array}{l}x^2-1=t\\ 2xdx=dt\end{array}\right|=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{t}=\sqrt{x^2-1}+C$$

Potom $\int\limits_{-\infty}^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \lim\limits_{t\to-\infty} \int\limits_{t}^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \lim\limits_{t\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-1}\,\right]_t^{\sqrt{2}} = \lim\limits_{t\to-\infty}\left[1-\sqrt{t^2-1}\,\right] = -\infty$, tedy integrál diverguje.

Integrál nevlastní vlivem funkce

Příklad 1: $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

Integrál má singularitu v dolní mezi, protože $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ je definovaná pro $x \in R - \{0\}$. Na výpočet primitivní funkce použijeme vzorec.

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int\limits_t^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right]_t^1 = \lim_{t\to 0^+}\left[3\cdot\sqrt[3]{x}\right]_t^1 = \lim_{t\to 0^+}\left[3 - 3\cdot\sqrt[3]{t}\right] = 3$$

Příklad 2: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}x\,dx$

Integrál má singularitu v horní mezi, protože $f(x) = \mathrm{tg}x$ není v tomto bodě ohraničená.

Pro integraci $f(x) = \mathrm{tg}x$ nemáme vzorec, proto si neurčitý integrál vypočítáme.

$$\int \mathrm{tg}x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C.$$

Tedy $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}x\,dx = \lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \int\limits_0^t \mathrm{tg}x\,dx = \lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}^-}\left[-\ln|\cos x|\,\right]_0^t = \lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}^-}\left[-\ln|\cos t| + \ln 1\,\right]$

Pro $t \to \frac{\pi}{2}^-$ platí $\cos t \to 0$, tedy $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}^-}\left[-\ln|\cos t| + \ln 1\,\right] = -(-\infty) = \infty$. Integrál diverguje.

Příklad 3: $\int\limits_0^1 x\ln x\,dx$

Integrál má singularitu v dolní mezi, protože $f(x) = x\ln x$ je definovaná a spojitá pro $x > 0$.

Na výpočet neurčitého integrálu použijeme metodu per partes, funkce zvolíme tak, aby se ln$x$ derivovala.

$$\int x\ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u' = x \;\Rightarrow\; u = \dfrac{x^2}{2} \\ v = \ln x \Rightarrow v' = \dfrac{1}{x} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$$

$$\int_0^1 x\ln x\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 x\ln x\,dx = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1)\right]_t^1 = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{1}{4}(2\ln 1 - 1) - \frac{t^2}{4}(2\ln t - 1)\right] =$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\lim_{t\to 0^+}\left[t^2(2\ln t - 1)\right]$$

Zbývá dořešit limitu, ale jde o neurčitý výraz typu $\| 0\cdot\infty \|$. Musíme nejdříve součin v závorce upravit na podíl, abychom mohli použít l'Hospitalovo pravidlo.

$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{2\ln t - 1}{\dfrac{1}{t^2}}\right] = ..\left\|\frac{-\infty}{\infty}\right\| = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{2\dfrac{1}{t}}{-2\dfrac{1}{t^3}}\right] = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\lim_{t\to 0^+} t^2 = -\frac{1}{4}\ .$$

Integrál konverguje.

Příklad 4: $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Funkce $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ je definovaná pro $|\,x\,| < 1$, integrál má tedy singularitu v obou mezích. Je třeba rozložit daný integrál na dva, aby singularita byla pouze v jedné z mezí. Zvolit libovolný bod $c \in (-1,1)$, např. $c = 0$. Primitivní funkci určíme pomocí vzorce, můžeme tedy přímo počítat

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{t\to -1^+}\int_{t}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \lim_{z\to 1^-}\int_{0}^{z}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \lim_{t\to -1^+}\left[\arcsin x\right]_t^0 + \lim_{z\to 1^-}\left[\arcsin x\right]_0^z = \lim_{t\to -1^+}\left[0 - \arcsin t\right] + \lim_{z\to 1^-}\left[\arcsin z - 0\right]_0^z = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Integrál konverguje.

Příklad 5: $\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$

Integrovaná funkce není ohraničená v bodě $x = 2$. Daný integrál proto rozepíšeme na součet dvou nevlastních integrálů, které budou mít v mezi singularitu:

$$\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \lim_{t\to 2^-}\int_1^t \frac{1}{(x-2)^2}\,dx + \lim_{z\to 2^+}\int_z^3 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx =$$

$$= \lim_{t\to 2^-}\left[-\frac{1}{x-2}\right]_1^t + \lim_{z\to 2^+}\left[-\frac{1}{x-2}\right]_z^3 = \lim_{t\to 2^-}\left[-\frac{1}{t-2}+\frac{1}{-1}\right] + \lim_{z\to 2^+}\left[-\frac{1}{1}+\frac{1}{z-2}\right]$$

Zbývá dořešit limity výrazů typu $\left\|\frac{k}{0}\right\|$. Budou nevlastní, o jejich znaménku rozhodneme na základě porovnání znaménka čitatele a jmenovatele, ale už teď víme, že integrál bude divergovat.

Pro úplnost : $\lim_{t\to 2^-}\left[-\frac{1}{t-2}+\frac{1}{-1}\right] + \lim_{z\to 2^+}\left[-\frac{1}{1}+\frac{1}{z-2}\right] = -(-\infty)-1-1+\infty = \infty$

Nevlastní integrál smíšeného typu

Příklad 1: $\int_1^\infty \frac{1}{x-2}\,dx$.

Integrál $\int_1^\infty \frac{1}{x-2}\,dx$ má singularitu v horní mezi (neohraničenost integračního intervalu), ale také uvnitř integračního intervalu v bodě $x = 2$ (neohraničenost funkce). Musíme tedy rozdělit integrační interval na tři podintervaly pomocí dělících bodů $x = 2$ a zvoleného bodu např. $c = 3$. Na každém ze tří intervalů $\langle 1,2),\ (2,3\rangle,\ \langle 3,\infty)$ bude mít integrál funkce $y = \frac{1}{x-2}$ už pouze jednu singularitu.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x-2}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x-2}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x-2}\,dx + \int_3^\infty \frac{1}{x-2}\,dx = \lim_{t_1\to 2^-}\int_1^{t_1} \frac{1}{x-2}\,dx + \lim_{t_2\to 2^+}\int_{t_2}^3 \frac{1}{x-2}\,dx +$$

$$+ \lim_{t_3\to\infty}\int_3^{t_3} \frac{1}{x-2}\,dx = \lim_{t_1\to 2^-}\left[\ln|x-2|\right]_1^{t_1} + \lim_{t_2\to 2^+}\left[\ln|x-2|\right]_{t_2}^3 + \lim_{t_3\to\infty}\left[\ln|x-2|\right]_3^{t_3} = \lim_{t_1\to 2^-}\left(\ln|t_1-2| - \ln 1\right) +$$

$$+ \lim_{t_2\to 2^+}\left(\ln 1 - \ln|t_2-2|\right) + \lim_{t_3\to\infty}\left(\ln|t_3-2| - \ln 1\right) = (-\infty - 0) + (0+\infty) + (\infty - 0).$$

Vzhledem k tomu, že nevlastní integrály na dílčích intervalech divergují, diverguje i zadaný integrál.